

Tecniche elettromagnetiche per l'acquisizione dell'informazione

- **Solo ricezione.**
- **Trasmissione e ricezione senza cooperazione**
- **Trasmissione e ricezione con cooperazione.**

La Radiometria

- Con un ricevitore selettivo si può pensare di ricevere:
- $\text{Acos}(2\pi ft)$
- Con una antenna direttiva si può pensare di individuare l'angolo d'arrivo
- Con più punti di ricezione si può pensare di individuare la posizione in un piano

Trasmissione e ricezione ad onda continua

- Si trasmette $s(t) = A\cos(2\pi ft)$
- Si riceve $g(t) = B\cos(2\pi ft - \phi(t))$ con B minore di A e $\phi(t)$ ritardo di fase in generale variabile nel tempo:

$$\tau(t) = 2r(t)/c$$

$$\phi(t) = 2\pi f\tau(t) = 2\pi f2r(t)/c = 2\pi 2r(t)/\lambda$$

Dove $r(t)$ è il range (distanza)

Approssimazione lineare

- $r(t) = r_0 + (dr/dt)_0 t$
- $(dr/dt)_0 = v$ range rate
- $\phi(t) = \phi_0 + 2\pi f_0 vt/c$, dove in
 $\phi_0 = 2\pi f_0 r_0/c$ è contenuta l'informazione di range iniziale e
- $f_d = -2fv/c$,
è detta **frequenza doppler**

Misura e ambiguità

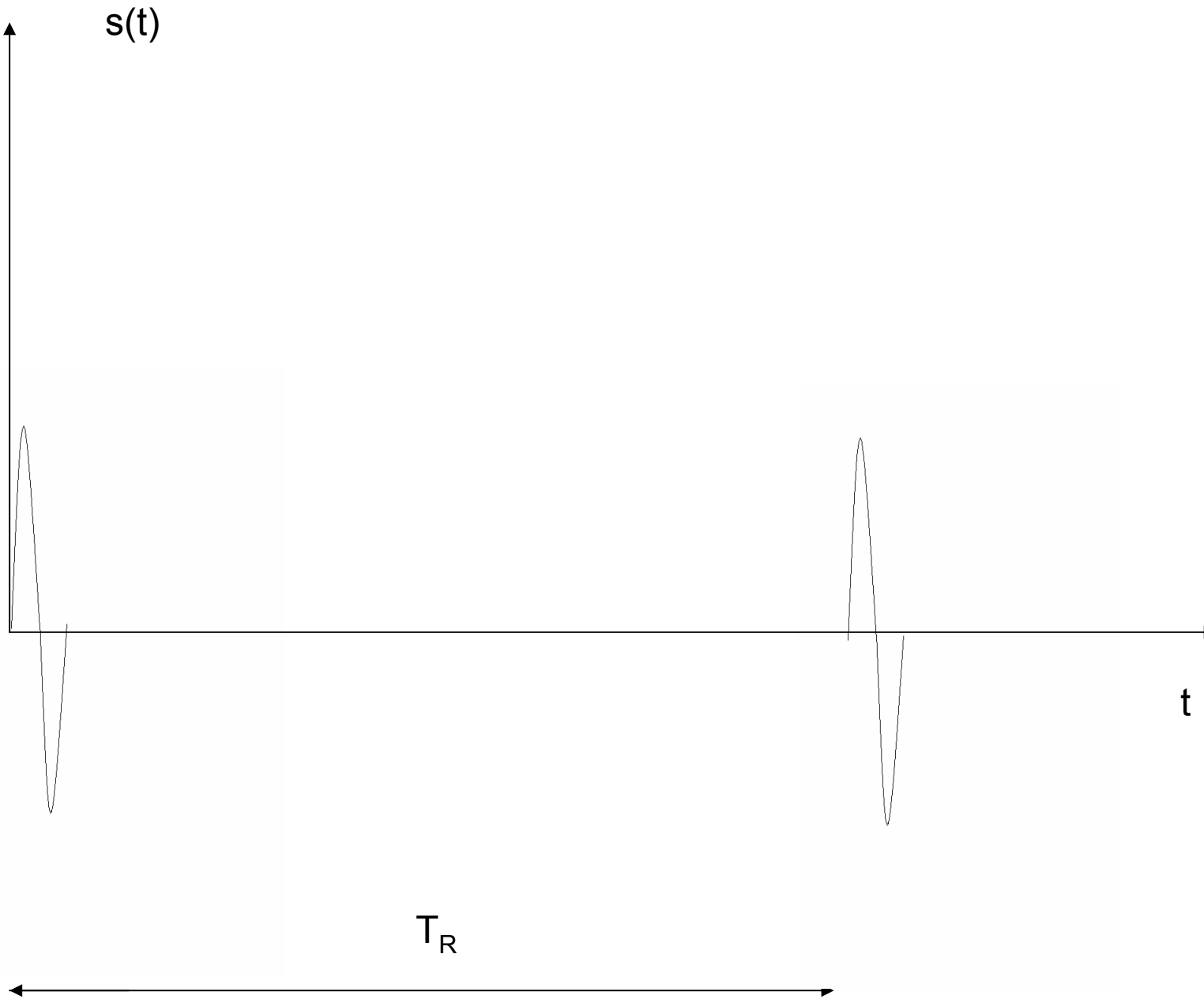
- Si può effettuare la misura:

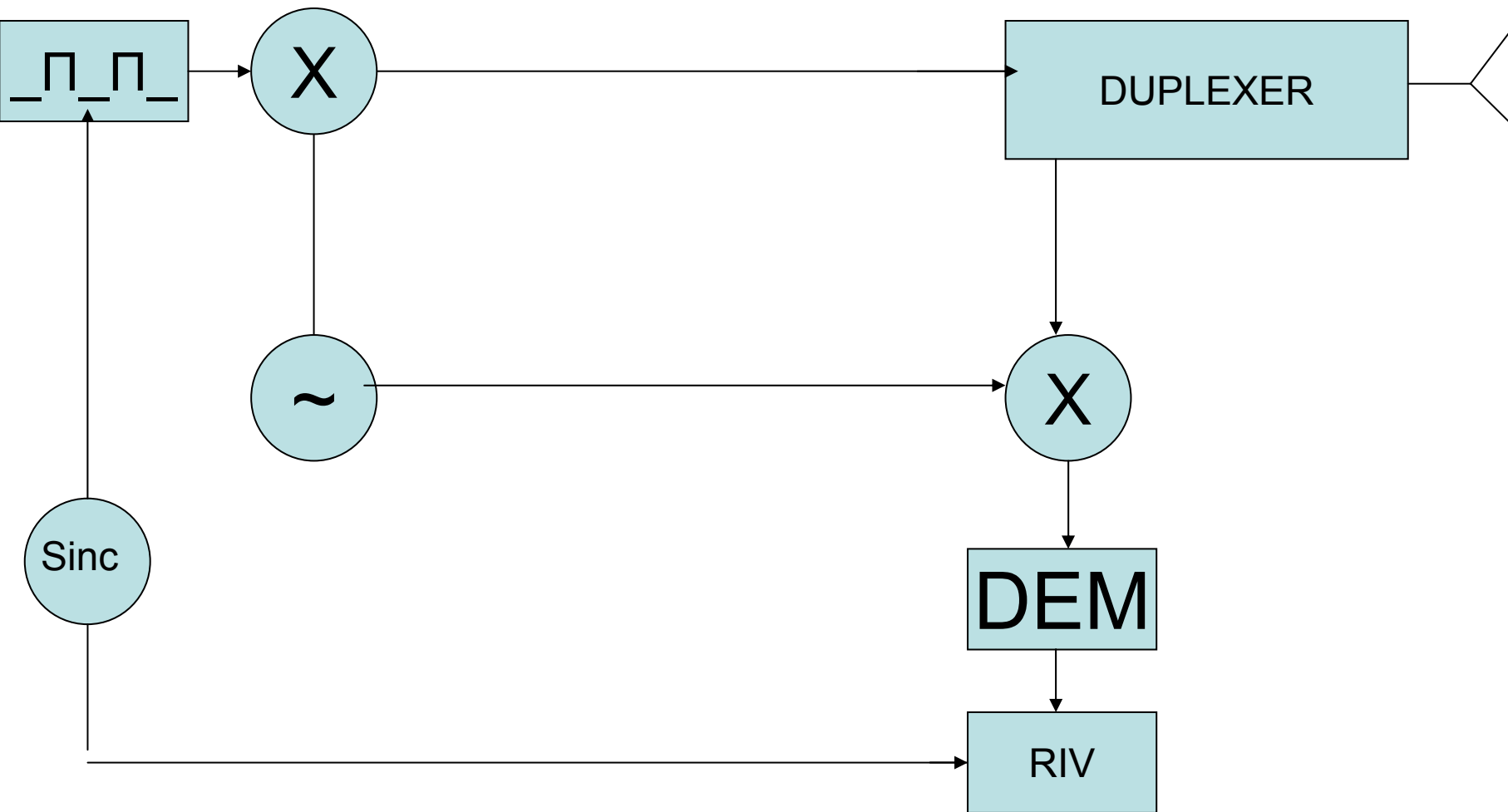
$$\int_0^{T_r} A \cos(2\pi ft) B \cos(2\pi ft - \phi(t)) dt = AB T_r \cos\phi(t) .$$

Con T_r multiplo del periodo

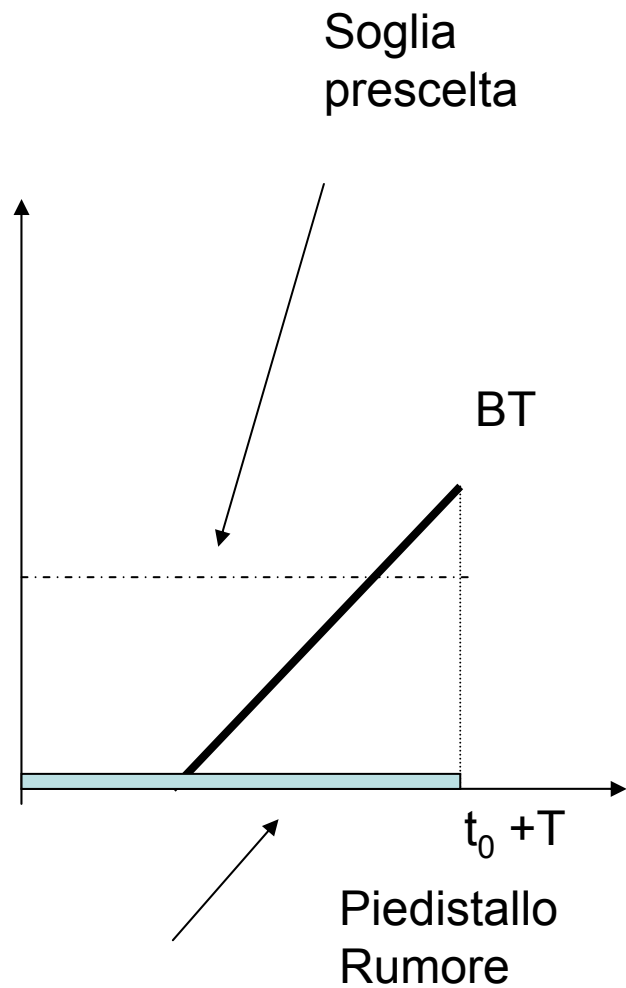
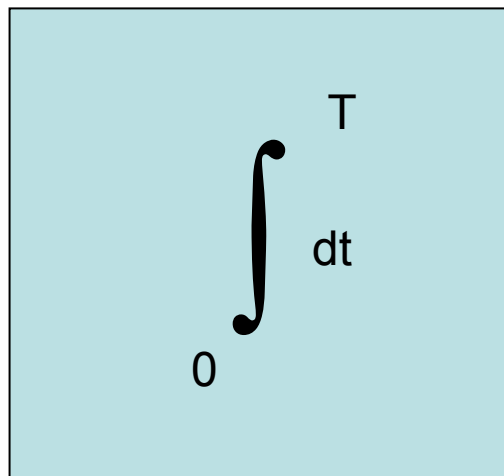
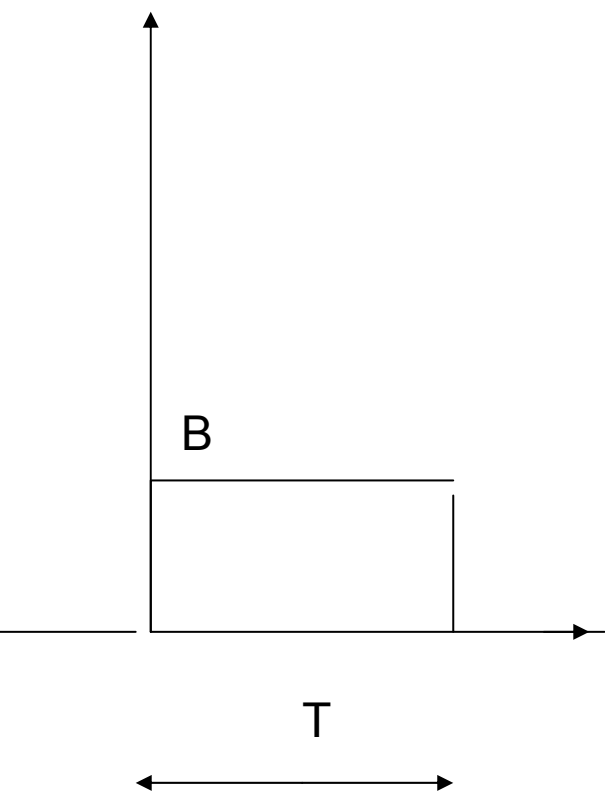
per $r_A = \lambda/2$ inizia l'ambiguità con ϕ pari ad una costante ϕ_0

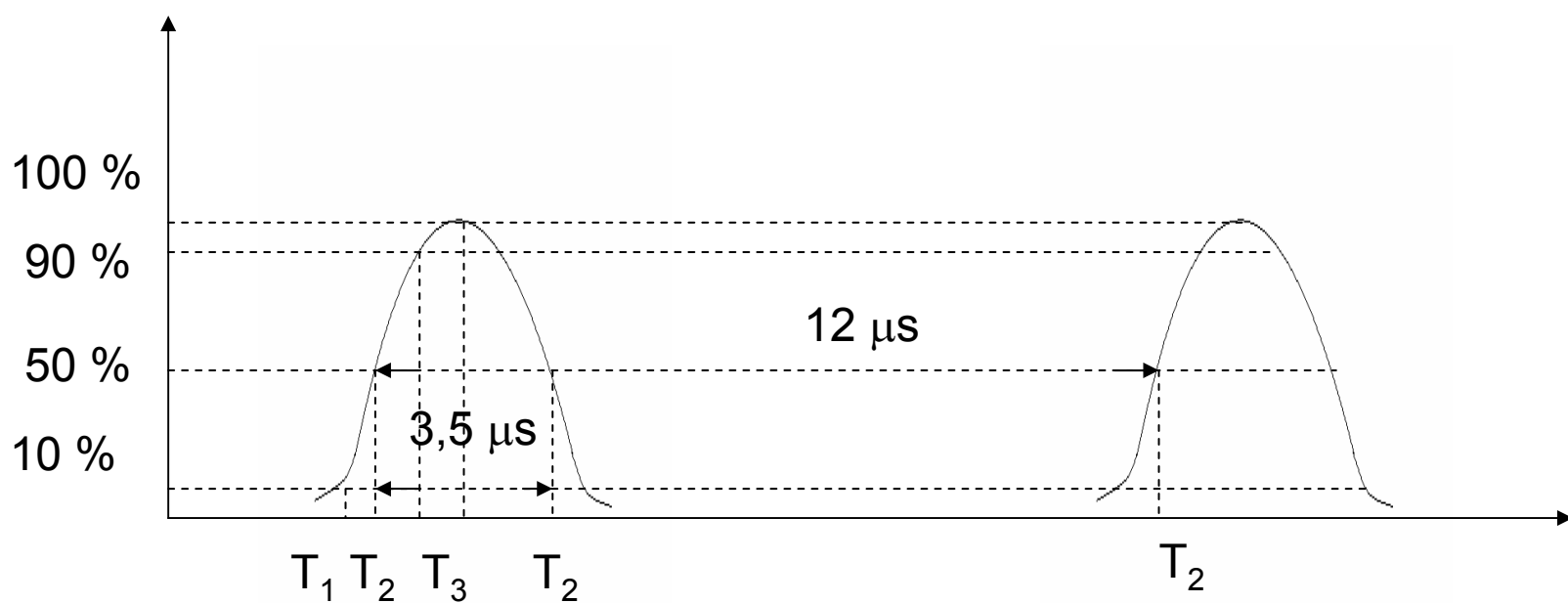
Si può passare allora a valutare $t_0 = 2r_0/c$





Schema semplificato del RADAR

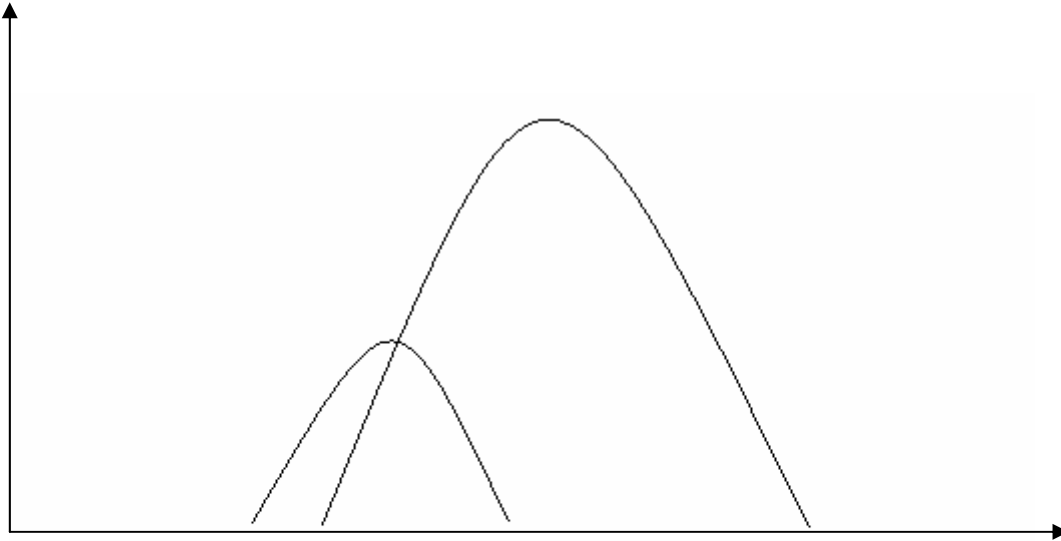




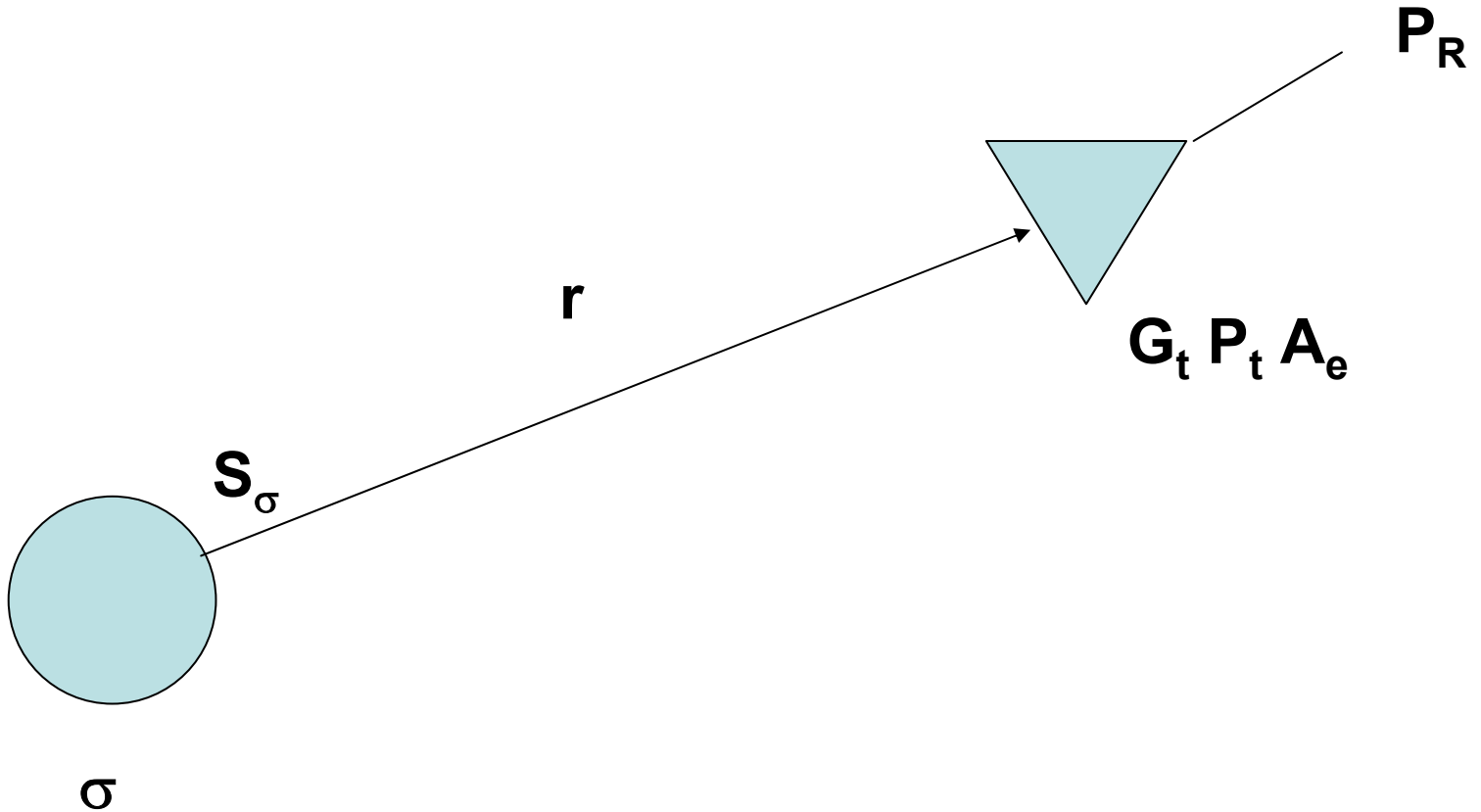
Durata al 50 % 3,5 μs
Tra il 10 % e il 90 % 2,5 μs
Tra i due impulsi 12 μs

DME MODO X

Tecnica Delay Amplify Compare



Lo scattering passivo



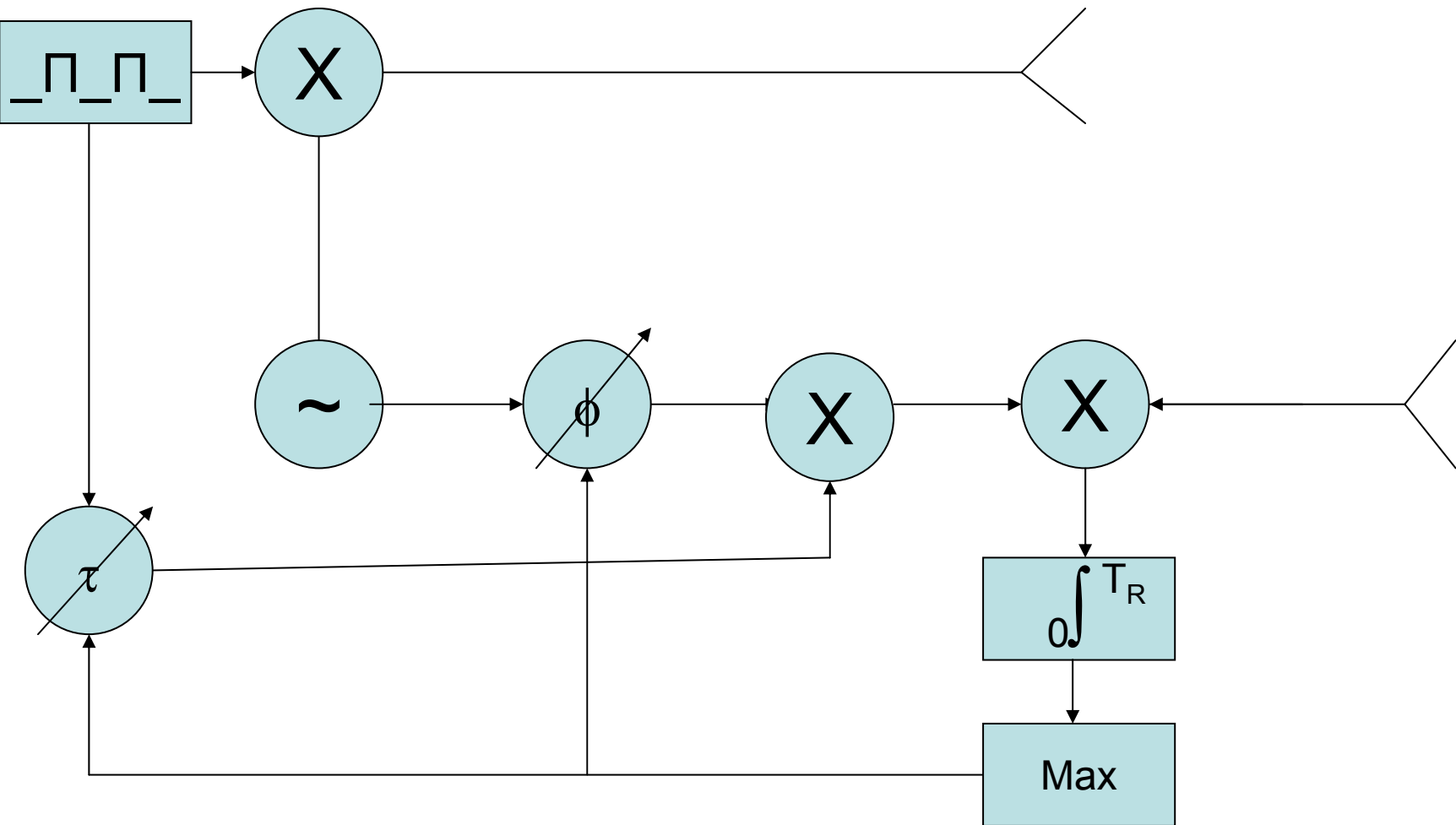
RADAR

$$S_{\sigma} = P_t G_t / 4\pi r^2$$

$$\sigma = ERP_{\sigma} / S_{\sigma}$$

$$P_R = S_{\sigma} \sigma A_e / 4\pi r^2 = P_t G_t \sigma A_e / (4\pi r^2)^2$$

$$r_M = [A_e^2 P_t \sigma / 4\pi \lambda^2 P_m]^{1/4}$$



Schema ottimale del RADAR

Nello schema “ottimale” del radar il tempo d’arrivo è stimato attraverso una operazione che più in generale è detta prodotto scalare

$$(x, y) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt$$

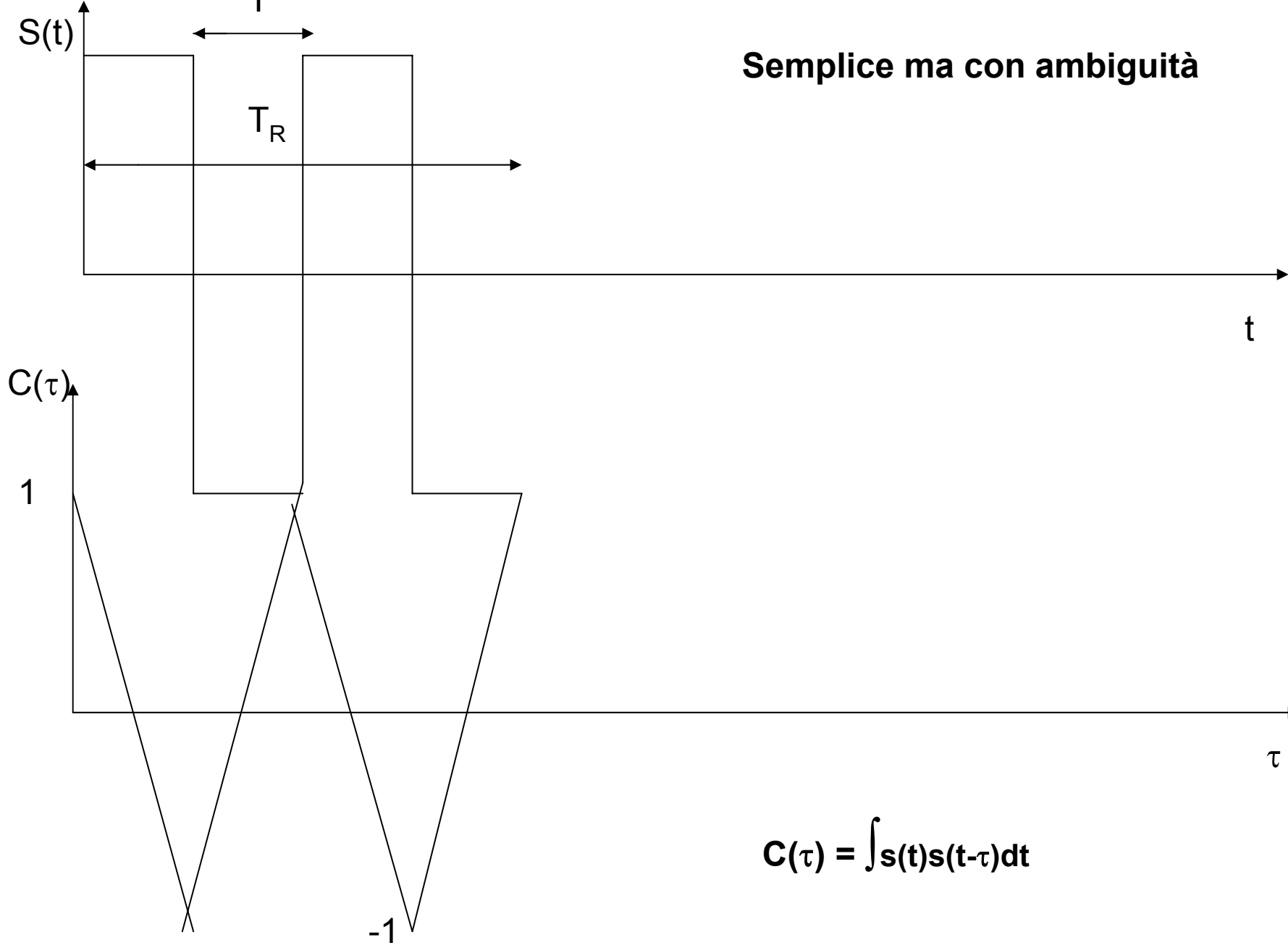
$$(x, y) = \int_0^T x(t)y(t)dt$$

$$(\mathbf{x}(\mathbf{t}) \mathbf{x}(\mathbf{t}-\tau)) = \int \mathbf{x}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{t} - \tau) \mathbf{d}t = \mathbf{C}(\tau)$$

La stima è fatta quando si ha il massimo ovvero $\tau = 0$

- La stima funziona anche se si ha un segnale non impulsivo ma periodico, e l'intervallo di integrazione è un multiplo del periodo
- Si può dunque usare segnali periodici indefinitamente lunghi e ridurre le potenze di picco
- La scelta viene fatta sulla base delle proprietà della autocorrelazione e del prodotto scalare
- La autocorrelazione deve avere il picco ben riconoscibile
- I prodotti scalari con altri segnali della famiglia devono essere piccoli (zero se possibile)

Semplice ma con ambiguità



Spazio metrico e distanza euclidea

Per segnali di energia

$$d(x, y) \hat{=} \|x(t) - y(t)\|_2 = \left[\int_T |x(t) - y(t)|^2 dt \right]^{1/2}$$

Dove sia $x(t)$ che $y(t)$ sono segnali di energia (in $L_2(T)$):

$$\int |X(f)|^2 df = \int x^2(t) dt = E_{xx}$$

Si disponga in L_2 di un insieme ortonormale di N funzioni

$$(\psi_k, \psi_h) = \int \psi_k(t) \psi_h^*(t) dt = \begin{cases} 0, & \forall h \neq k \\ 1, & h = k \end{cases}$$

Espansione, solitamente approssimata, tramite le funzioni

$$\tilde{x}(t) \cong \sum_{k=1}^N \alpha_k \psi_k(t)$$

Scelta sulla base della approssimazione lineare in media

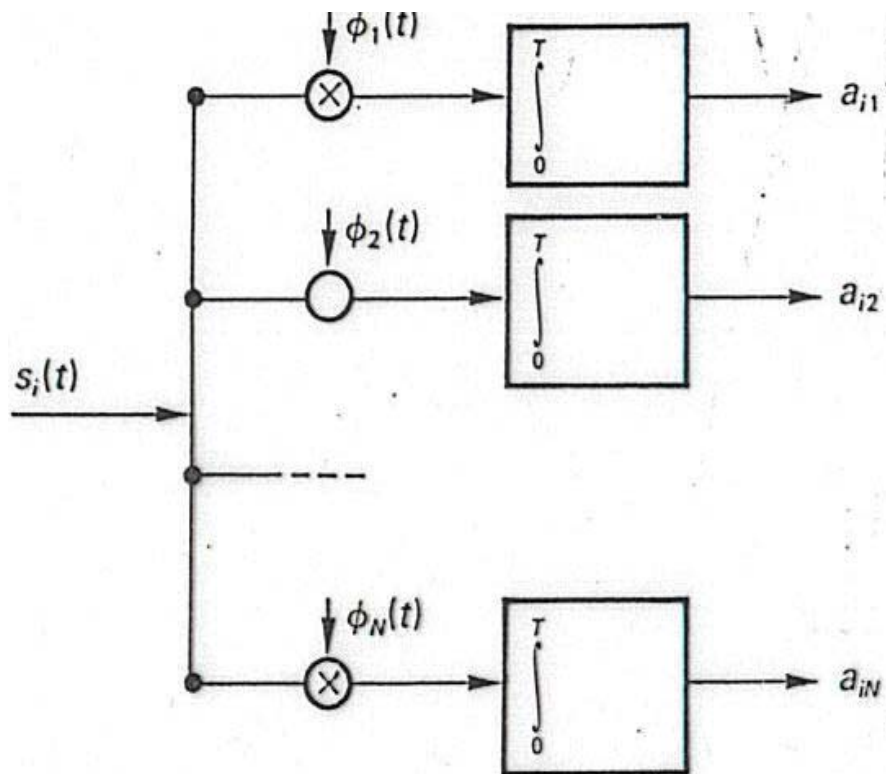
$$\alpha_k = (x, \psi_k) = \int_T x(t) \psi_k^*(t) dt$$

Approssimazione nel senso dei minimi quadrati o distanza euclidea

$$d^2(x, \tilde{x}) = \int_T |x(t) - \tilde{x}(t)|^2 dt$$

$$(x - \tilde{x}, \phi_k) = 0$$

**Il vettore errore è ortogonale alla rappresentazione:
è in una ulteriore direzione dello spazio**



Schema di estrazione dei coefficienti

L'insieme $\{\phi_k(t)\}$ è ritenuto soddisfacente per rappresentare una certa classe di segnali $x(t)$ se la accuratezza della rappresentazione migliora indefinitamente all'aumentare del numero N delle funzioni utilizzate; l'insieme ortonormale $\{\psi_k(t)\}$ costituisce allora una **base** per la classe dei segnali considerati. Si usa pertanto scrivere per N che tende all'infinito:

$$x(t) = \sum X_k \phi_k(t) \quad , \quad \text{con} \quad X_k = \alpha_k = (X, \psi_k)$$

Il cambio di notazione significa che la eguaglianza è verificata nel senso della approssimazione lineare in media e risulta

$$|X_k|^2 = E_{xx}$$

Segnali a dimensione finita

- In alcuni casi si arriva all'eguaglianza per un numero N finito di funzioni.
- Si dice allora che il segnale ha N dimensioni e il suo spazio rappresentativo è di pari coordinate
- Ciò accade certamente se il segnale è da noi costruito e non corrotto.
- Tutte le relazioni precedenti si applicano a N finito.

A partire da

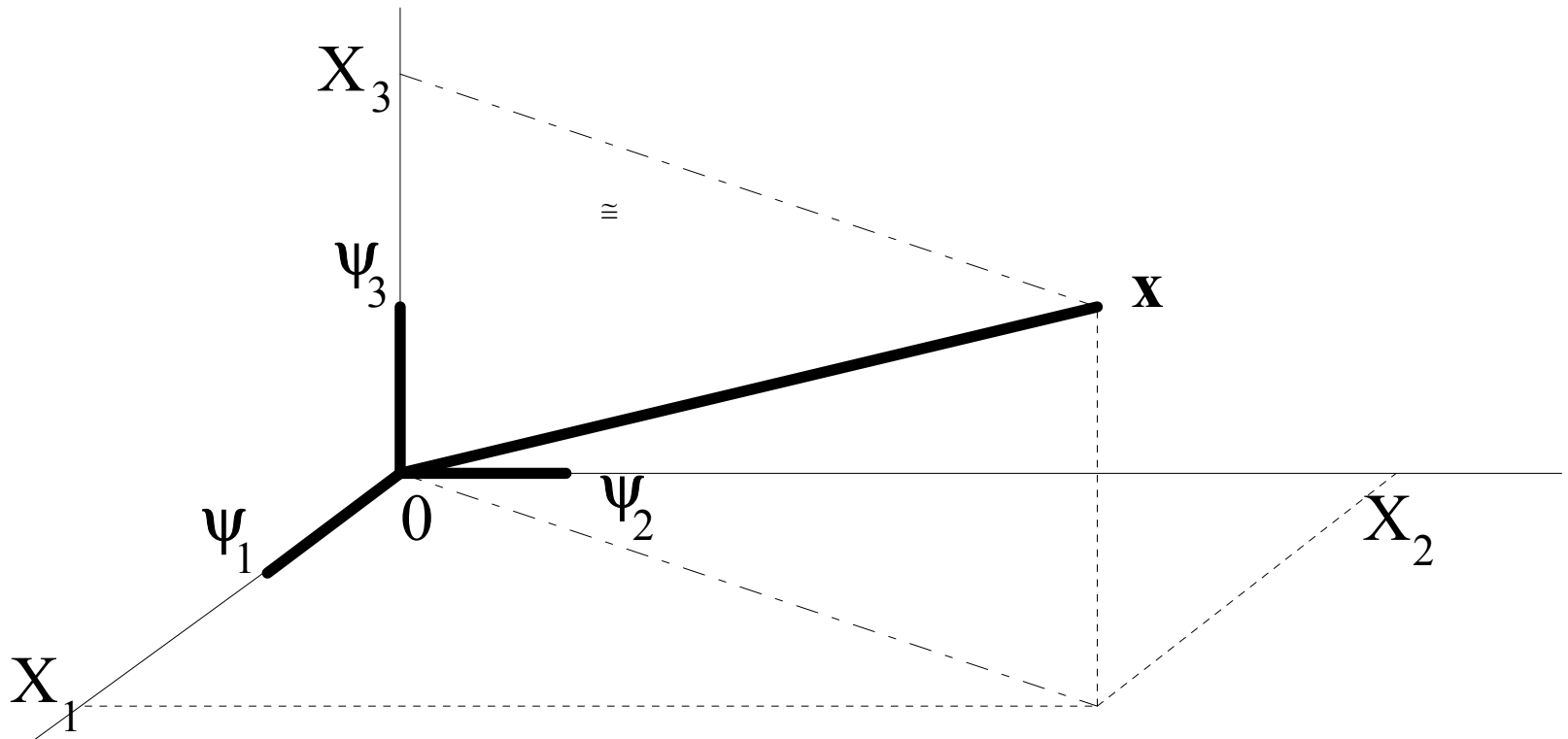
$$\tilde{x}(t) \cong \sum_{k=1}^N \alpha_k \psi_k(t)$$

Esatta se $x(t)$ è a N dimensioni o approssimata con

$$\alpha_k = (x, \psi_k)$$

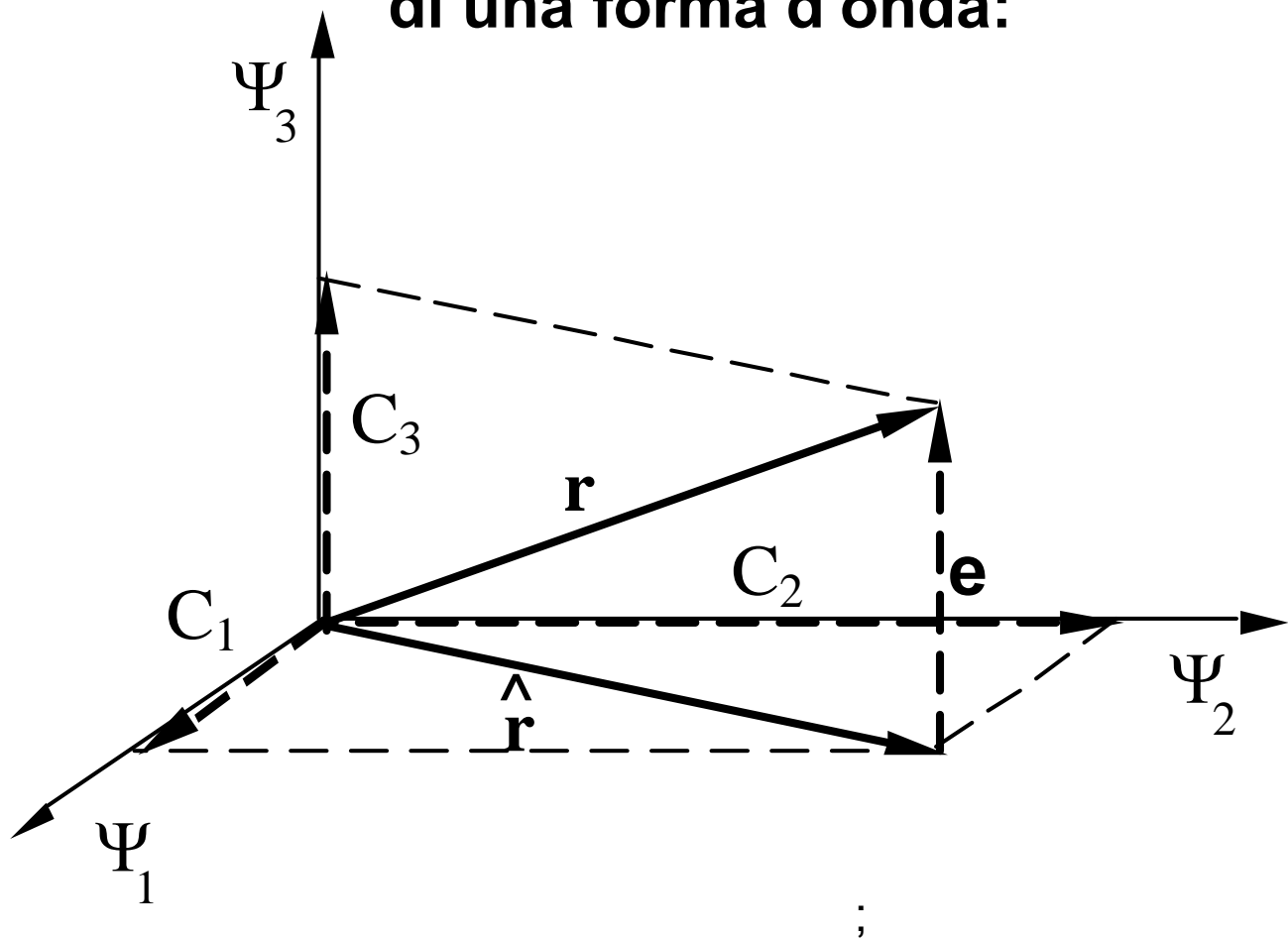
A $x(t)$ si può associare una ennupla di valori che diventano componenti di un vettore rappresentabile in uno spazio a N dimensioni con N versori a identificare le N funzioni

Rappresentazione di un segnale reale $x(t)$ mediante un vettore \mathbf{x} nello spazio dei segnali.



$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^N X_k \psi_k$$

Rappresentazioni esatte e approssimate di una forma d'onda:



\mathbf{r} é la rappresentazione esatta nello spazio a tre dimensioni;

$\hat{\mathbf{r}}$ quella approssimata a sole due dimensioni;

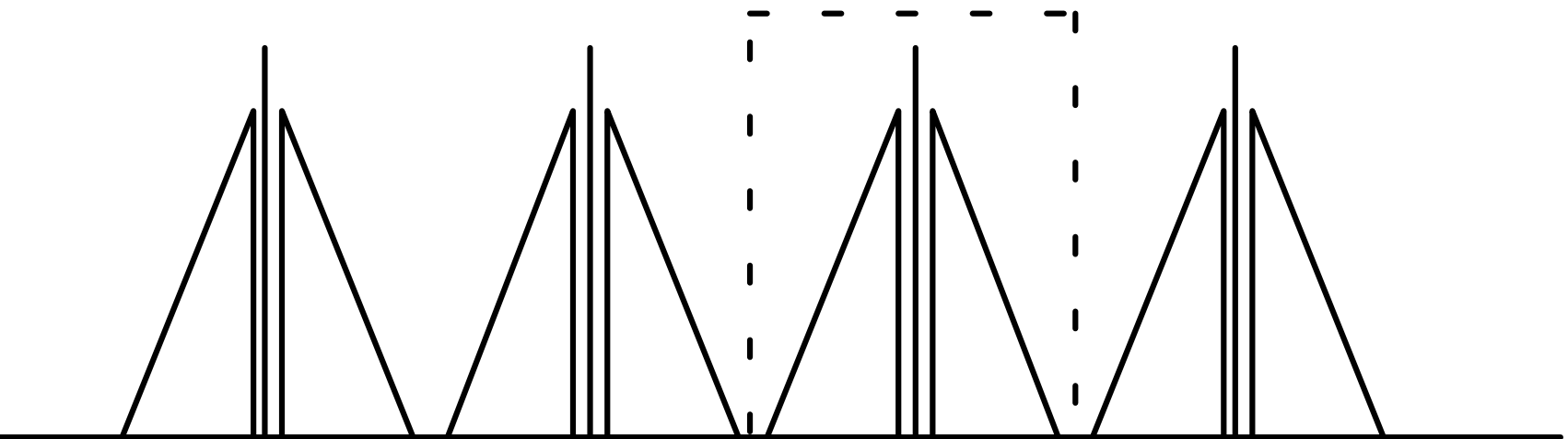
\mathbf{e} è l'errore residuo nel caso di rappresentazione approssimata.

$$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{k=1}^N X_k^2 = E_{\mathbf{xx}}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^N X_k Y_k$$

Per un numero finito M di segnali di energia, il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt garantisce la piena validità della rappresentazione facendo ricorso a precisabili funzioni ortonormali in numero finito $N \leq M$.

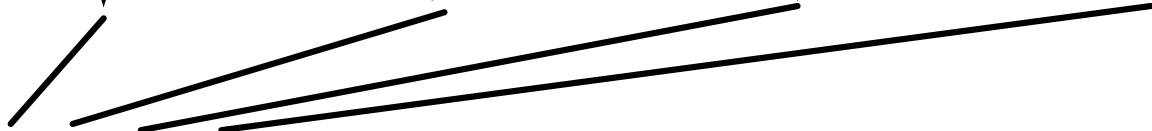
Filtro

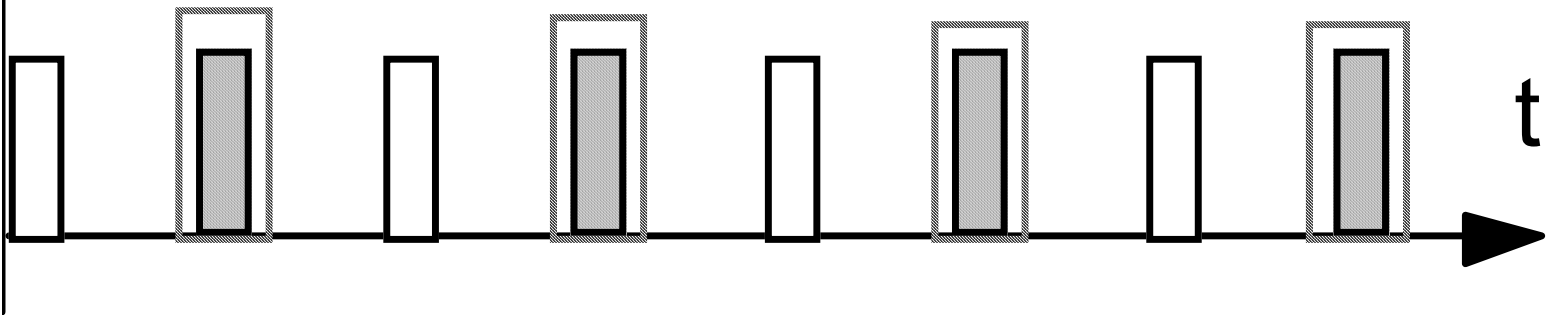
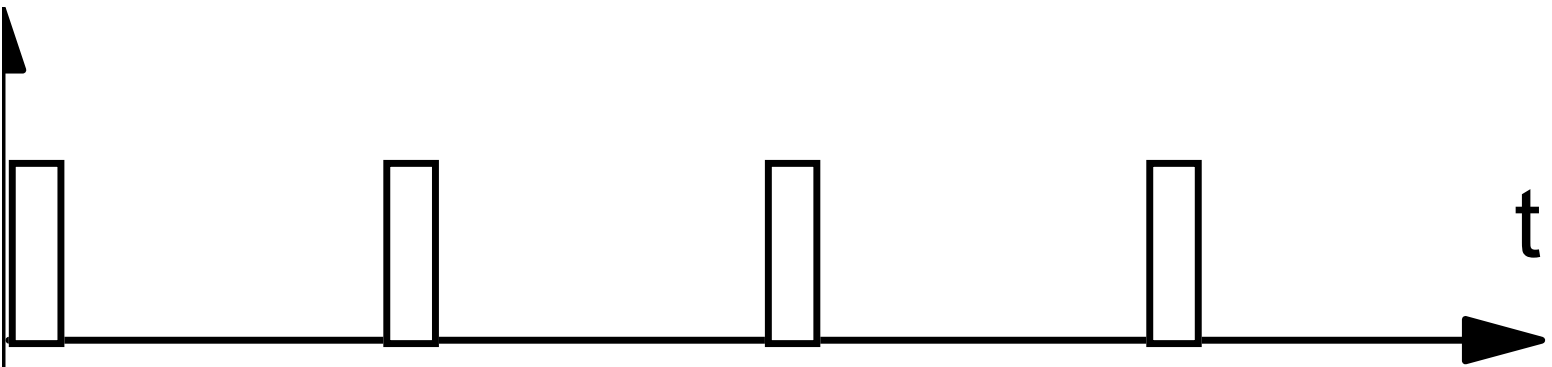


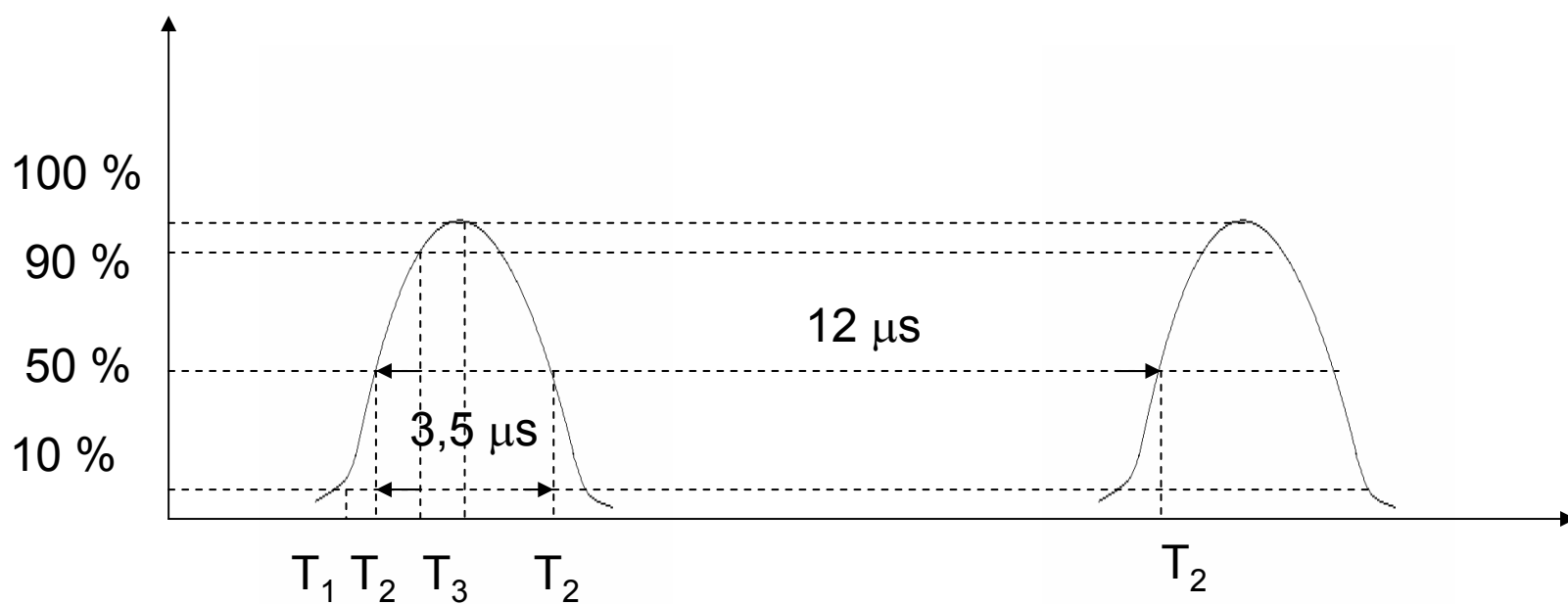
frequenz



canali



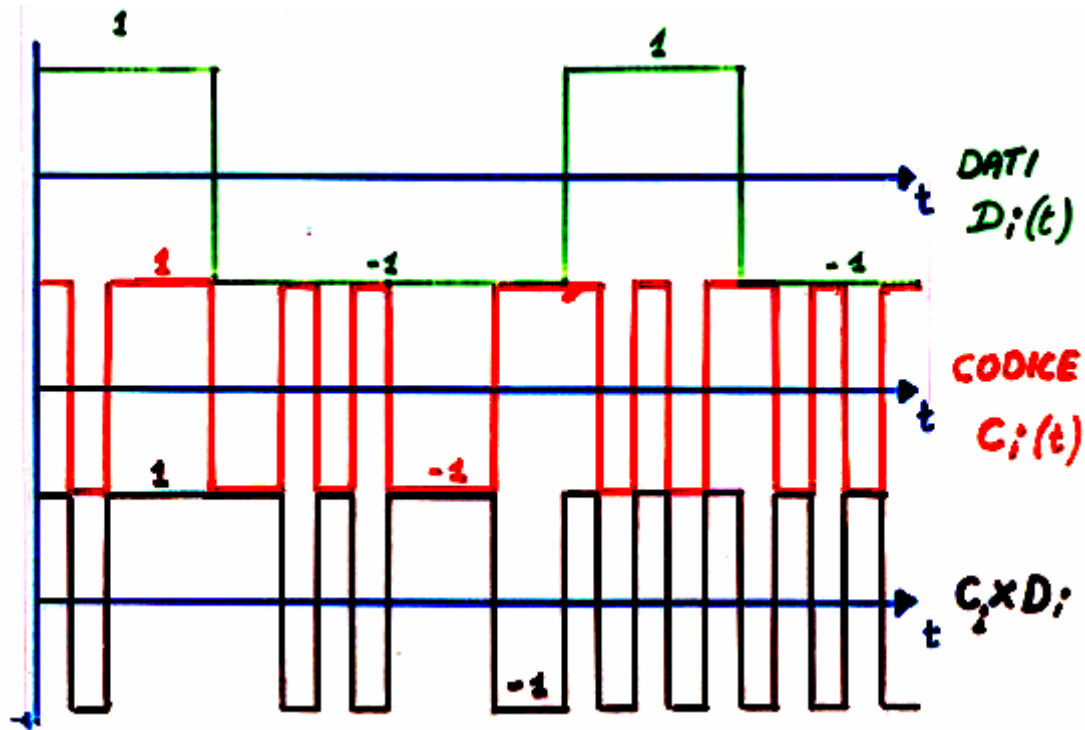




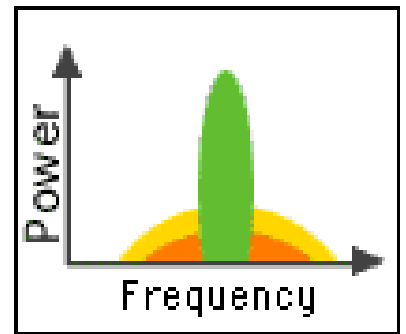
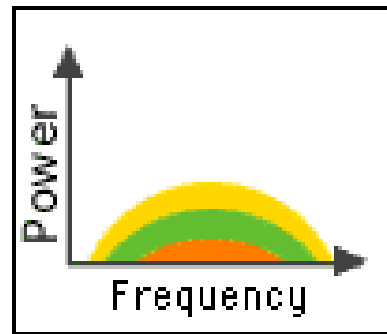
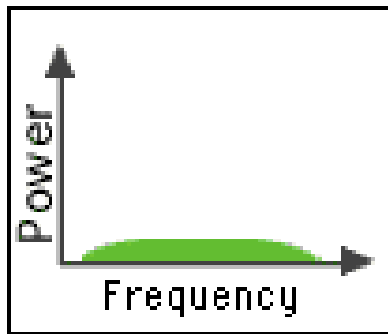
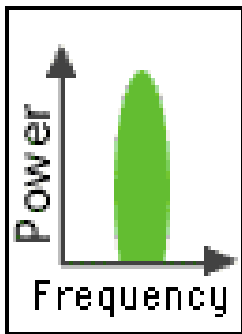
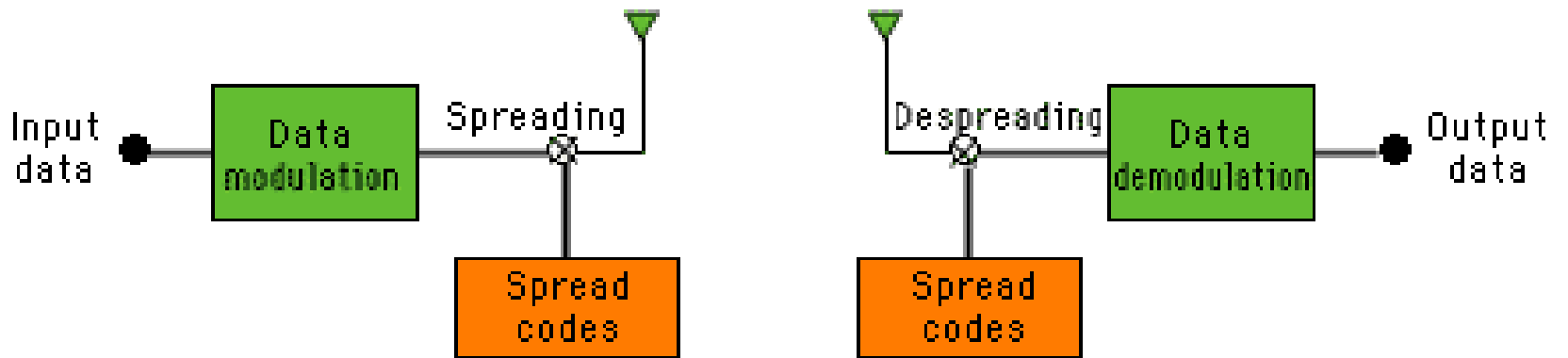
Durata al 50 % $3,5 \mu\text{s}$
Tra il 10 % e il 90 % $2,5 \mu\text{s}$
Tra i due impulsi $12 \mu\text{s}$

DME MODO X

SEGNALE CDMA A SEQUENZA DIRETTA



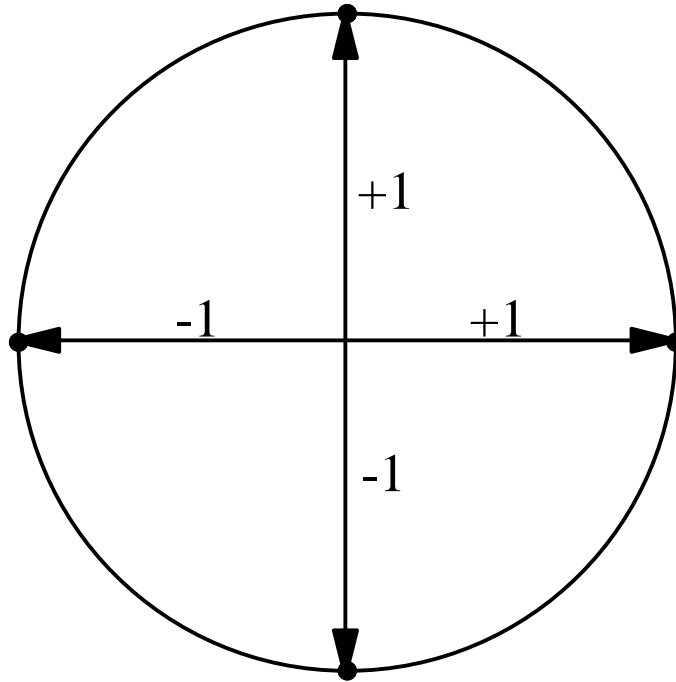
Se ci sono più segnali ci sono altrettanti codici
La separazione delle diverse comunicazioni è frutto
delle proprietà dei codici (ortogonalità)

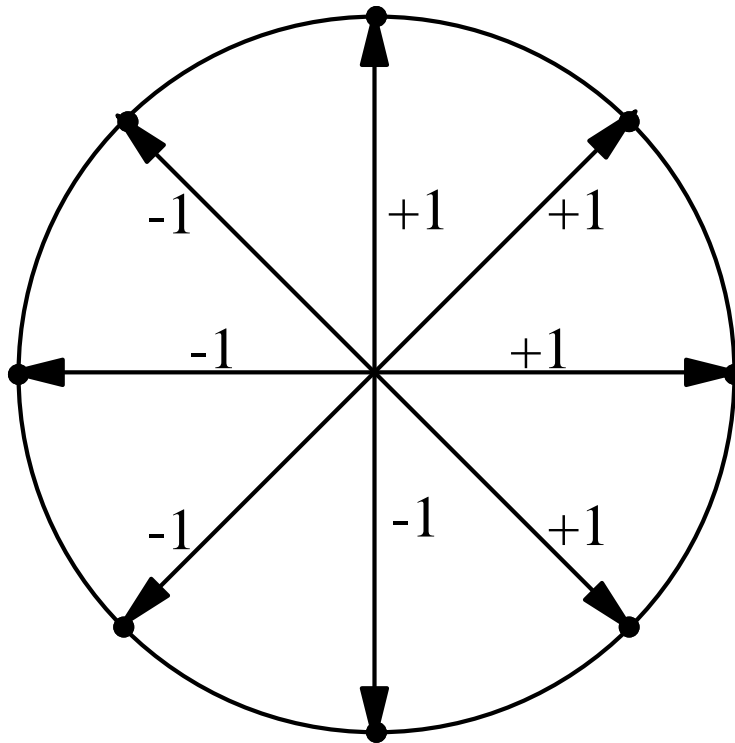


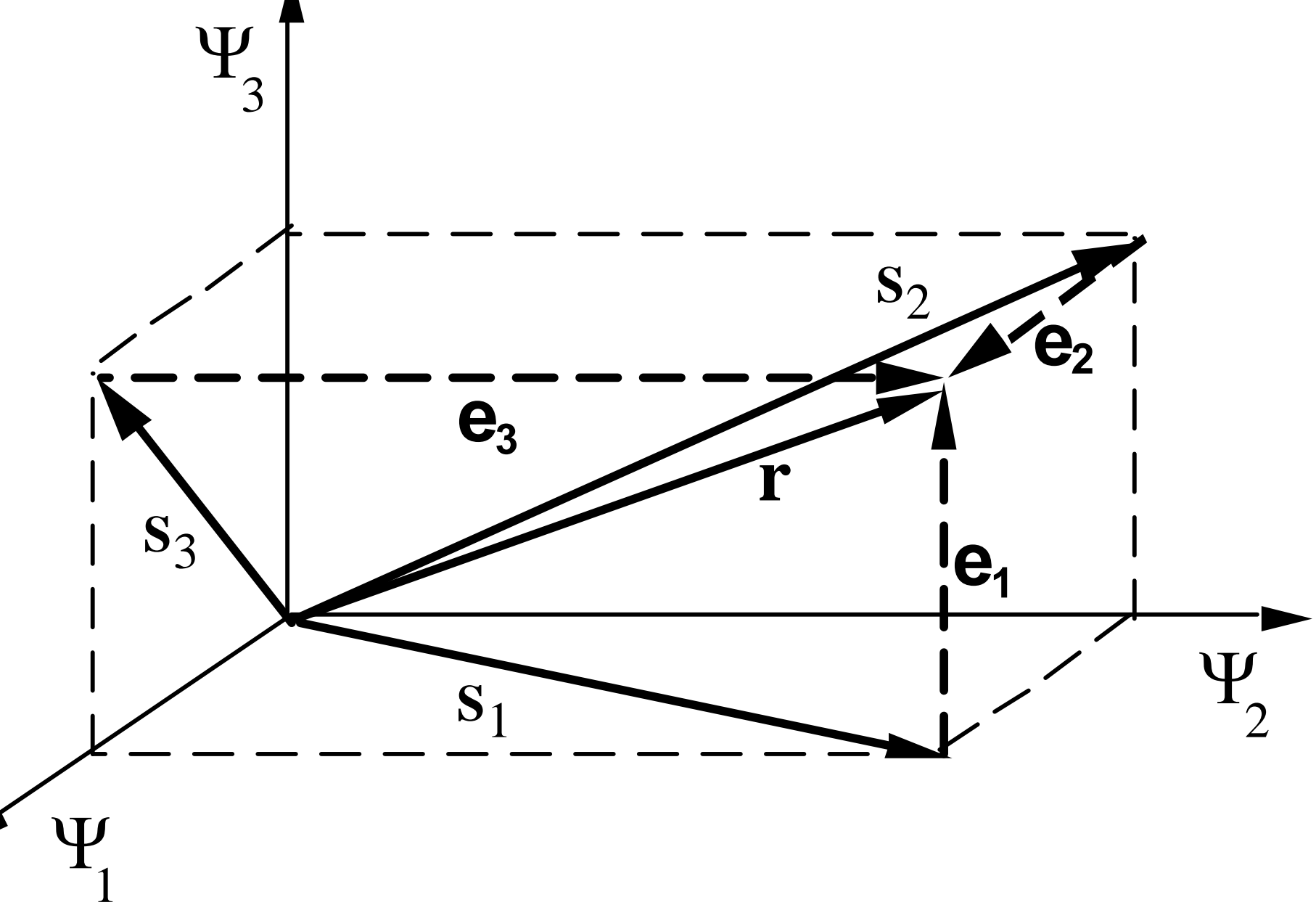
Codici ortogonali

0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0

Sistema di segnali quaternario ottenuto a partire da due funzioni ortonormali (4PSK)







Interpretazione del prodotto scalare per segnali reali

$$(x, y) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt$$

$$(x, y) = \int_0^T x(t)y(t)dt$$

Filtro adattato

Si consideri un filtro con la seguente $h(t)$

$$h(t) \underline{\underline{=}} y(T - t);$$

L'uscita $s(t)$ se l'ingresso $x(t)$ è limitato a T :

$$s(t) \underline{\underline{=}} x(t) * h(t) = \int_0^T x(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Che per $t=T$ offre:

$$s(T) = \int_0^T x(\tau) h(T - \tau) d\tau = \int_0^T x(\tau) y(\tau) d\tau = (x, y)$$

Autocorrelazione

$$s(T) = \int_0^T x(\tau) h(T - \tau) d\tau = \int_0^T x(\tau) y(\tau) d\tau = (x, y)$$

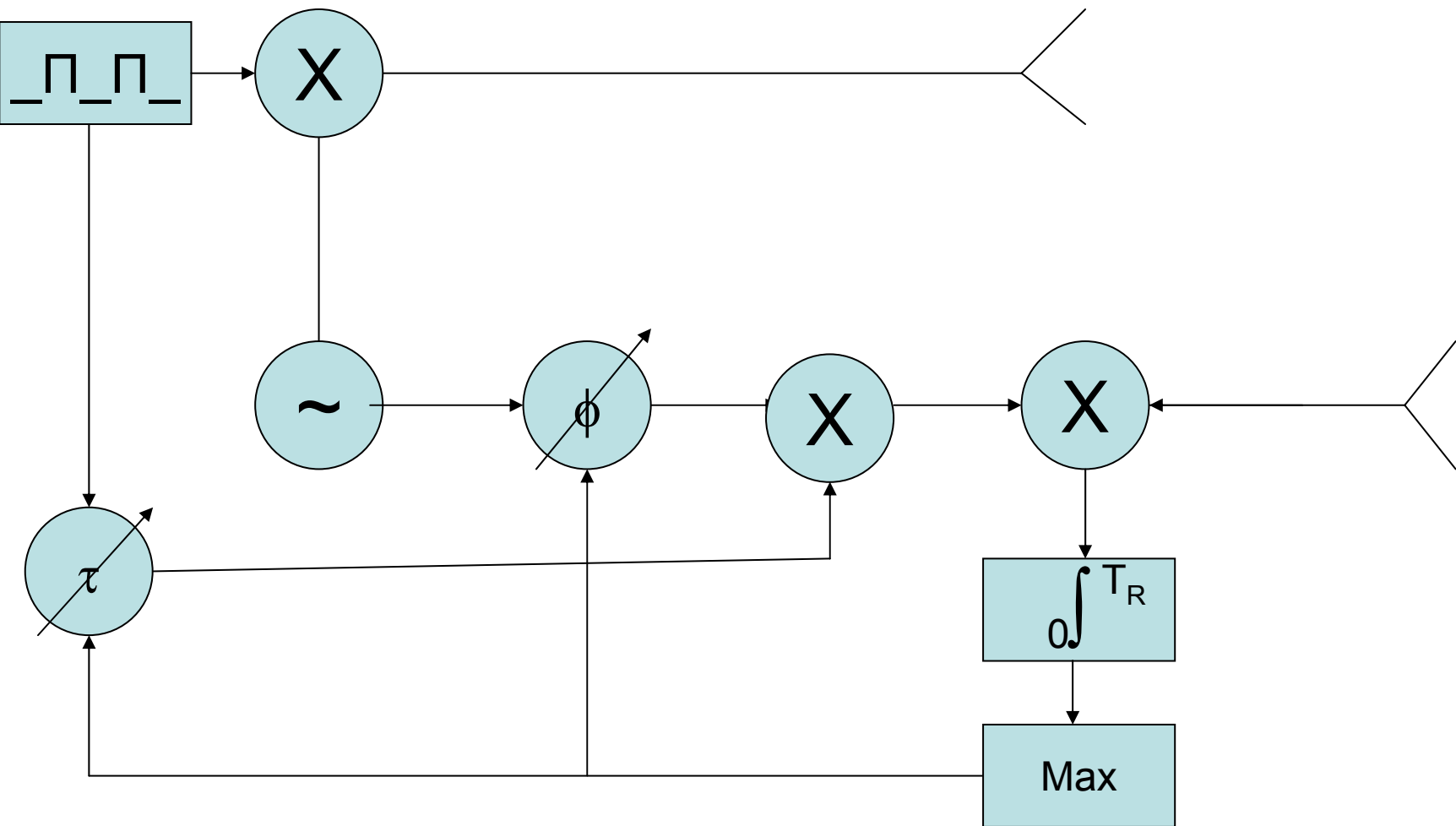
**Se $y(\tau) = x(\tau - \xi)$ l'integrale precedente rappresenta
la funzione di autocorrelazione**

$C(\xi)$ valutata nel tempo T

Al sincronismo, per $\xi = 0$

$$**C(\xi) = E**$$

Dove E è l'energia totale del segnale $x(t)$



Questo schema dunque è ottimale per avere il massimo alla fine della osservazione

Filtro adattato I

Si consideri un segnale $x(t)$, di durata T , che opera in presenza di rumore additivo $n(t)$ avente caratteristiche di rumore gaussiano bianco con densità spettrale bilaterale N_0 . Si supponga che segnale e rumore siano all'ingresso di un quadripolo lineare invariante nel tempo caratterizzato da una risposta impulsiva $h(t)$, o da una funzione di trasferimento $H(f)$ data da

$$H(f) = \int h(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

Filtro adattato II

- L'uscita si presenta dunque nella forma:

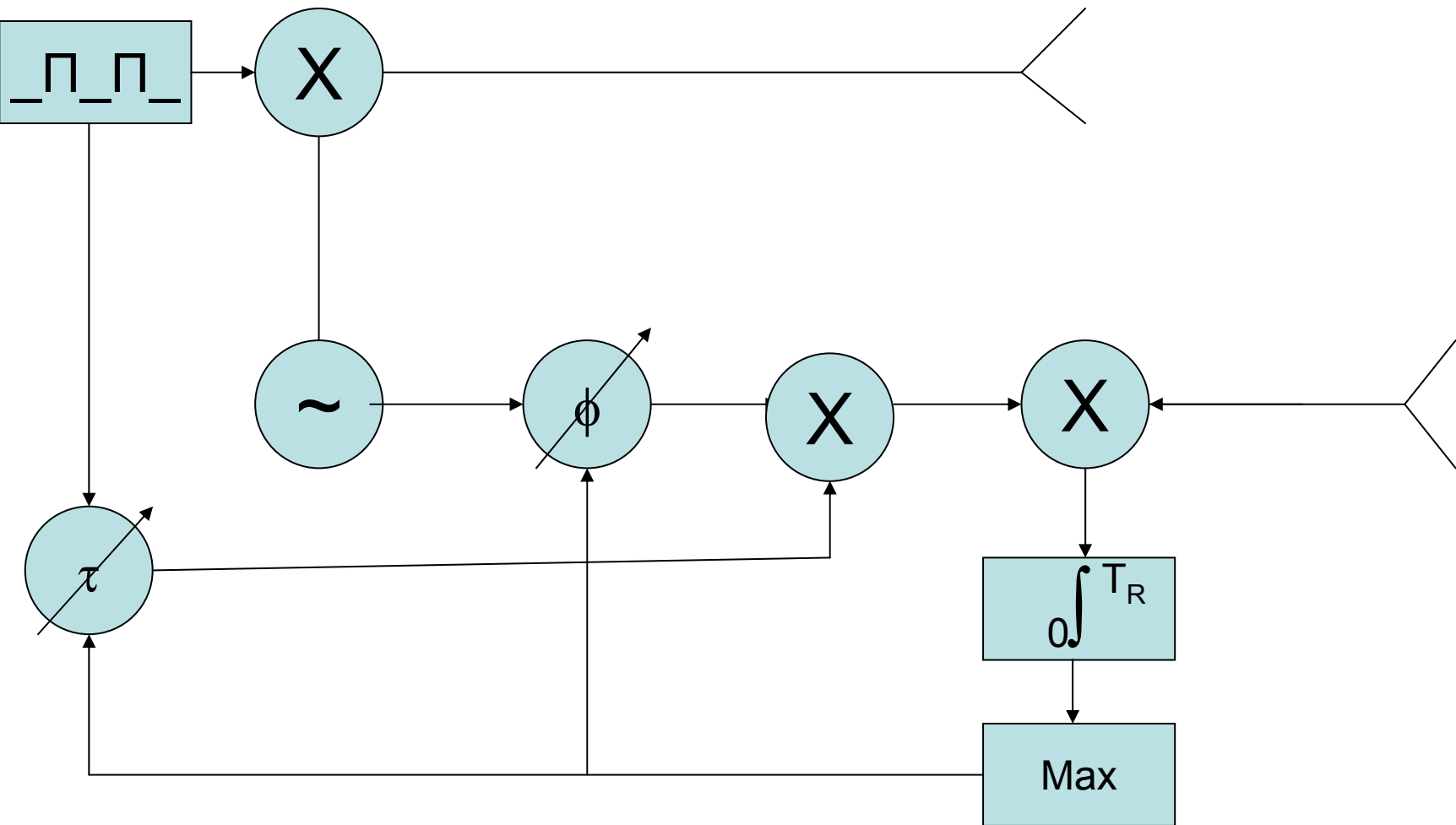
$$y(t) = \int x(\tau) h(t-\tau) d\tau ,$$

Dove gli estremi di integrazione possono essere limitati tra 0 e T.

Si voglia ora determinare le caratteristiche del filtro che rende massimo il rapporto $y^2(T)/N_0$ dove N_0 è la potenza di rumore dopo il filtro e $y^2(T)$ rappresenta la potenza del segnale in uscita nel momento di decisione.

Filtro adattato III

- $y(T) = \int X(f) H(f) e^{j2\pi fT} df$
- $N_0 = E(n^2(t)) = \int \underline{N}_0 |H(f)|^2 df$
- $y^2(T)/N_0 = \left| \int X(f) H(f) e^{j2\pi fT} df \right|^2 / N_0 \int |H(f)|^2 df$
- Poichè vale la diseguaglianza
- $\left| \int f(x) g(x) dx \right|^2 \leq \int |f(x)|^2 dx \int |g(x)|^2 dx$
- con il segno eguale per $g(x) = f(x)^*$,
- si ha il massimo per $H(f) = X^*(f) e^{-j2\pi fT}$
- $[y^2(T)/N_0]_{\max} = \int |X(f)|^2 df / N_0 = E / N_0 =$
- $= \int x^2(t) dt$



Questo schema dunque è ottimale per avere il massimo del rapporto segnale rumore alla fine dell'osservazione.

Errore nella valutazione del picco

- [T16] $y = f(x)$, .
- Nell'intorno di un valore x_0 da stimare le variazioni infinitesime sono date da:
- [T17] $dy = f'(x_0) dx$.
- Confondendo in prima approssimazione le variazioni piccole con i differenziali si ha:
- [T18] $dx = dy/f'(x_0)$.
- Dunque se nella fase di misura di y si commette un errore, la sua influenza sulla imprecisione di valutazione della variabile x è tanto più marcata quanto più è piccola la derivata della funzione che li lega nell'intorno del valore da determinare.