

Antenne a Schiera (Array)

Introduzione

L'efficienza di un sistema di telecomunicazione dipende anche dalle antenne impiegate, che devono avere caratteristiche diverse a seconda del tipo di servizio e di applicazione.

Se si considera, ad esempio, un ponte radio, in cui entrambe le antenne sono fisse ed in posizione note, conviene utilizzare antenne fortemente direttive, per irradiare la maggior parte della potenza disponibile nella direzione del ricevitore che, a sua volta, dovrà essere in grado di raccogliere la maggior parte della potenza trasmessa.

Nel caso, invece, di *sistemi d'area* (ad es. sistemi radiomobili), conviene l'utilizzo di antenne non eccessivamente direttive, poiché data l'aleatorietà della posizione relativa dei corrispondenti, il trasmettitore dovrà essere in grado di raggiungere il ricevitore ovunque si trovi, mentre il ricevitore dovrà essere in grado di ricevere il segnale da qualunque direzione provenga.

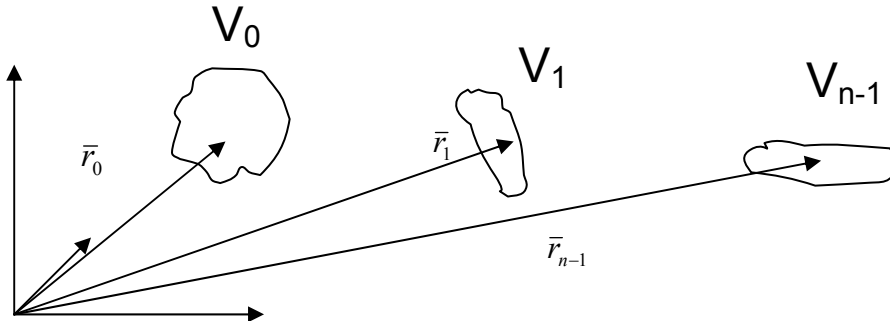
Appare pertanto evidente l'importanza di disporre di antenne dalle caratteristiche radiative anche molto diverse; uno dei metodi più utilizzati per sagomare opportunamente il diagramma di radiazione consiste nella realizzazione di antenne complesse “assemblando” antenne più semplici secondo determinate configurazioni geometriche ed elettriche. Il campo irradiato dall'antenna complessiva (detta *Array* o *Schiera*) è dato ovviamente dalla sovrapposizione dei campi irradiati dai singoli elementi (solitamente fra loro uguali, pur non essendo necessario); per ottenere antenne molto direttive, occorre che tali campi interferiscano costruttivamente nelle direzioni desiderate e distruttivamente in tutte le altre.

In particolare, i parametri di progetto sui quali operare per ottenere il diagramma di radiazione assegnato sono i seguenti:

1. *configurazione geometrica della schiera* (lineare, circolare, ecc.)
2. *numero di elementi e distanza fra gli elementi*
3. *ampiezza della corrente di eccitazione dei singoli elementi*
4. *sfasamenti delle correnti di eccitazione dei singoli elementi*
5. *diagramma di radiazione dei singoli elementi*

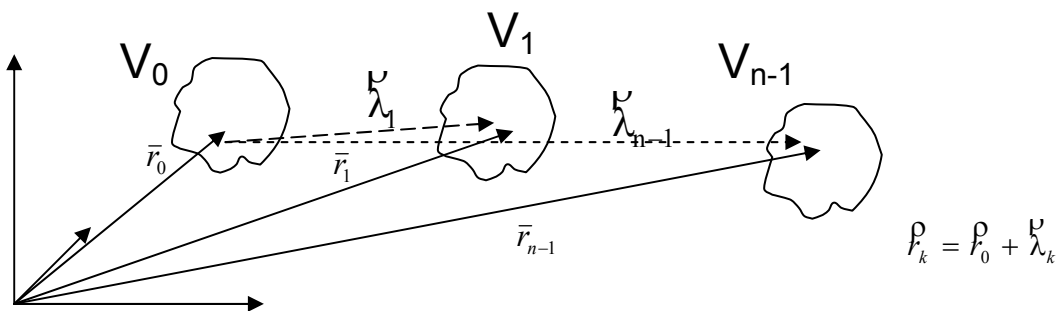
Antenne a schiera

Si considerino n sorgenti (elettriche) racchiuse negli n volumi $V_0, V_1, \dots, V_{n-1}$ (tipicamente saranno n dipoli o comunque, in generale, n antenne “elementari”)



La sorgente complessiva costituisce una cosiddetta *Schiera di Antenne* (o *Array*) se:

- 1) La sorgente V_k si può ottenere per traslazione da V_0 (*sorgenti V_i uguali ed ugualmente orientate*), cioè



- 2) Le densità di corrente impresses nelle sorgenti V_i sono fra loro uguali, a meno di uno sfasamento e una costante moltiplicativa, cioè

$$\rho_{J_k}(\vec{r}_k) = \Lambda_k e^{-j\delta_k} \rho_{J_0}(\vec{r}_0) \quad [1]$$

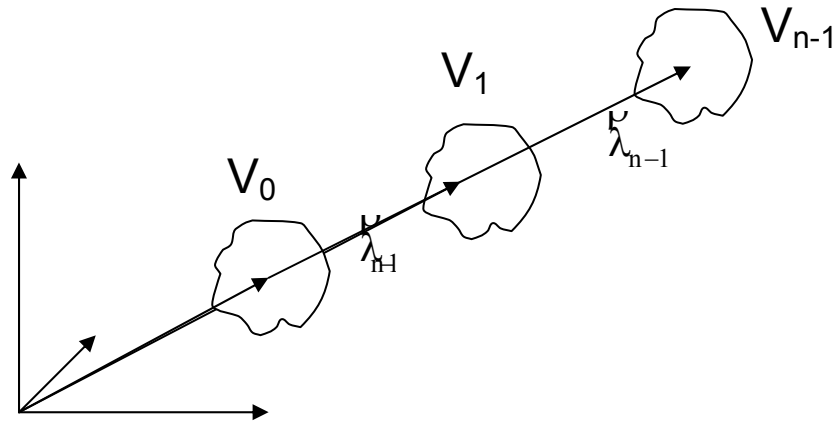
(ovviamente $\Lambda_0 = 1$ e $\delta_0 = 0$)

In pratica, tale relazione esprime l'ipotesi che i singoli elementi dell'array irradiano come se fossero isolati, senza alcun *accoppiamento* reciproco. In realtà, ogni elemento influenza gli altri, inducendo in ciascuno di essi opportune *correnti di polarizzazione* (che si “sommano” a quelle impresses), che devono essere tenute in debita considerazione per una rigorosa descrizione della schiera.

A seconda della posizione reciproca degli elementi della schiera si distinguono, ad esempio, *schiere lineari*, *schiere circolari*, *schiere planari*.

Schiere lineari

Una schiera si dice lineare se gli elementi della schiera sono allineati, ovvero se i vettori di traslazione $\mathbf{l}_k$ sono collineari, cioè se hanno la stessa direzione (detta anche direzione di allineamento)



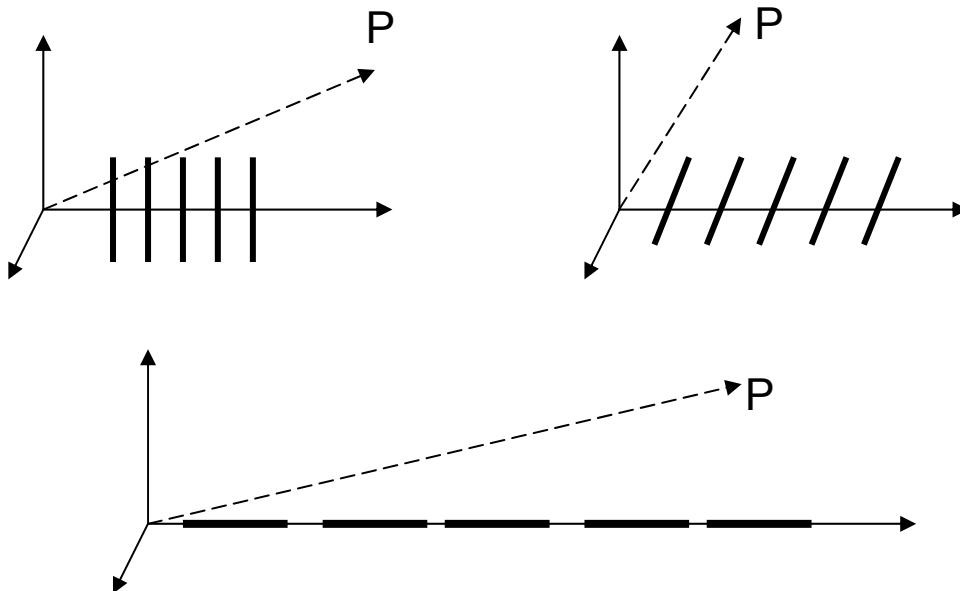
In particolare, una schiera lineare si dice *uniforme* se gli elementi radianti sono:

1. equidistanti: $\mathbf{l}_k = k \cdot \mathbf{l}$ ($\mathbf{l}$ è detto vettore di allineamento)

2. alimentati con

$\Lambda_k = 1 \quad \forall k$ $\delta_k = k\delta \quad -\pi < \delta < \pi$
--

Esempi



Il fattore complesso di schiera.

Dalla definizione di momento equivalente e per la sovrapposizione degli effetti, risulta:

$$\vec{M} = \sum_{k=0}^{n-1} \vec{M}_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{V_k} \vec{J}_k(\vec{r}_k) \cdot e^{j\beta \vec{r}_k \cdot \hat{i}_r} dV_k \right) \quad [2]$$

ma per le proprietà 1) e 2) che definiscono una schiera risulta

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{V_0} \Lambda_k \cdot \vec{J}_0(\vec{r}_0) \cdot e^{-j\delta_k} \cdot e^{j\beta(\vec{r}_0 + \vec{\lambda}_k) \cdot \hat{i}_r} dV_0 \right) = \\ &= \left[\sum_{k=0}^{n-1} \Lambda_k \cdot e^{j(\beta \vec{\lambda}_k \cdot \hat{i}_r - \delta_k)} \right] \cdot \int_{V_0} \vec{J}_0(\vec{r}_0) \cdot e^{j\beta \vec{r}_0 \cdot \hat{i}_r} dV_0 \end{aligned}$$

L'ultimo integrale rappresenta evidentemente il momento equivalente del singolo elemento radiante rispetto al riferimento considerato. Si pone inoltre

$$F(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{n-1} \Lambda_k \cdot e^{j(\beta \vec{\lambda}_k \cdot \hat{i}_r - \delta_k)} \quad \text{Fattore complesso di schiera}$$

mentre il modulo $|F(\theta, \phi)|$ prende il nome di *fattore di schiera*.

Si ottiene immediatamente

$$\vec{M}(\theta, \phi) = F(\theta, \phi) \cdot \vec{M}_0(\theta, \phi) \quad [3]$$

e quindi

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = -j \left(\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \hat{i}_r \times F(\theta, \phi) \vec{M}_0(\theta, \phi) \times \hat{i}_r \right) \cdot \frac{e^{-j\beta r}}{2\lambda r} = F(\theta, \phi) \cdot \vec{E}_0(r, \theta, \phi) \quad [4]$$

con $\vec{E}_0$ che indica ovviamente il campo generato dalla sola sorgente elementare V_0 . *Il campo complessivo irradiato dalla schiera lineare è uguale al prodotto fra il campo irradiato dal singolo elemento radiante e il fattore complesso di schiera.*

Si può quindi osservare immediatamente che l'interferenza fra gli n elementi componenti la schiera va a modificare il campo irradiato dal singolo elemento nella direzione (θ, ϕ) di un fattore pari a $F(\theta, \phi)$; *il campo complessivamente irradiato dalla schiera potrà pertanto risultare completamente diverso dal campo della singola antenna elementare.*

Il legame fra il campo irradiato dalla schiera complessiva ed il campo irradiato dal singolo elemento determina relazioni analoghe – o addirittura identiche – fra le altre grandezze caratteristiche della radiazione. In particolare, è immediato verificare che

$$I_R(\theta, \phi) = |F(\theta, \phi)|^2 \cdot I_{R0}(\theta, \phi) \quad [5]$$

$$f(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{I_R(\theta, \phi)}{I_R(\theta_M, \phi_M)}} = \sqrt{\frac{|F(\theta, \phi)|^2 I_{R0}(\theta, \phi)}{|F(\theta_M, \phi_M)|^2 I_{R0}(\theta_M, \phi_M)}} = \left| \frac{F(\theta, \phi)}{F(\theta_M, \phi_M)} \right| \cdot f_0(\theta, \phi) \quad [6]$$

$$d(\theta, \phi) \propto f(\theta, \phi)^2 = \left| \frac{F(\theta, \phi)}{F(\theta_M, \phi_M)} \right|^2 \cdot f_0(\theta, \phi)^2 \quad [7]$$

Inoltre, il campo $\vec{E}$ ed il campo $\vec{E}_0$ sono vettori paralleli (nel senso dei vettori complessi) e di conseguenza *il campo irradiato dalla schiera ha la stessa polarizzazione del campo irradiato dal singolo elemento.*

Scegliendo opportunamente i valori di n , λ_k , δ_k (che compaiono nell'espressione di F) e' possibile allora sagomare opportunamente il diagramma di radiazione $f(\theta, \phi)$ della schiera.

Progetto ottimo di una schiera lineare uniforme

Se la schiera lineare è anche uniforme, l'espressione del fattore complesso di schiera può essere così riscritta:

$$F(\theta, \phi) = \sum_{r=0}^{n-1} e^{jk(\beta \lambda \cdot \hat{i}_r - \delta)} \quad [8]$$

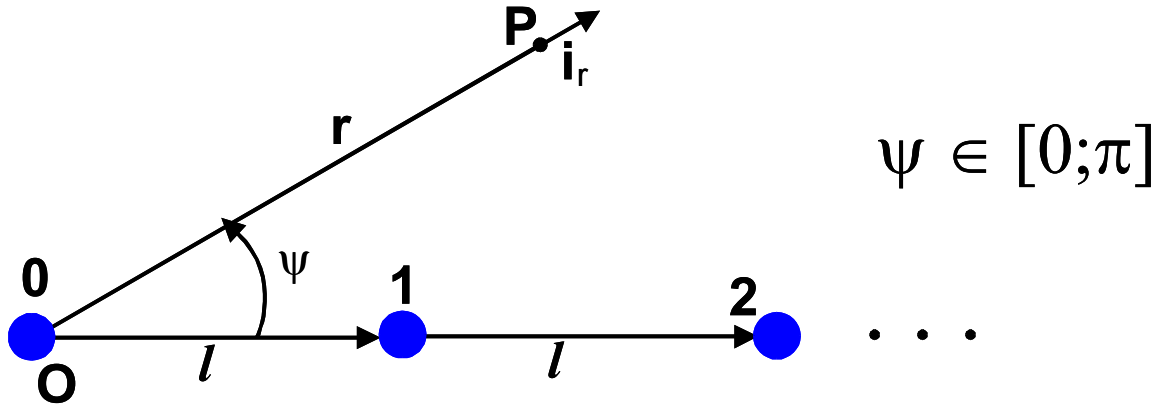
Poiché la sommatoria che definisce F e' una progressione geometrica, la somma e' nota e vale:

$$F = \sum_{r=0}^{n-1} e^{jk(\beta \lambda \cdot \hat{i}_r - \delta)} = \frac{1 - e^{jn(\beta \lambda \cdot \hat{i}_r - \delta)}}{1 - e^{j(\beta \lambda \cdot \hat{i}_r - \delta)}} \quad [9]$$

raccogliendo $e^{\frac{jn}{2}(\beta \lambda \cdot \hat{i}_r - \delta)}$ a numeratore e $e^{\frac{j}{2}(\beta \lambda \cdot \hat{i}_r - \delta)}$ a denominatore rispettivamente, con qualche passaggio matematico e' possibile ottenere:

$$F(u) = e^{j(n-1)u} \cdot \frac{\sin(nu)}{\sin(u)} \quad \text{con} \quad u = \frac{\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{i}}_r^D \cdot \hat{\mathbf{i}}_r - \frac{\delta}{2} = \frac{\pi\lambda}{\lambda} \cdot \cos \psi - \frac{\delta}{2}$$

dove Ψ rappresenta l'angolo fra la direzione di allineamento e la direzione radiale



Dovendo essere $0 \leq \psi < \pi$ allora necessariamente $u_1 \leq u \leq u_2$, dove:

$$u_1 = -\frac{\pi\lambda}{\lambda} - \frac{\delta}{2} \quad [10]$$

$$u_2 = \frac{\pi\lambda}{\lambda} - \frac{\delta}{2} \quad [11]$$

Si può dimostrare che, scegliendo l'origine del sistema di riferimento nel punto medio della schiera, scompare l'esponentiale complesso ed il fattore complesso di schiera diviene una funzione reale.

$$F(u) = \frac{\sin(nu)}{\sin(u)}$$

Si definisce in ogni caso fattore di schiera *normalizzato* la funzione

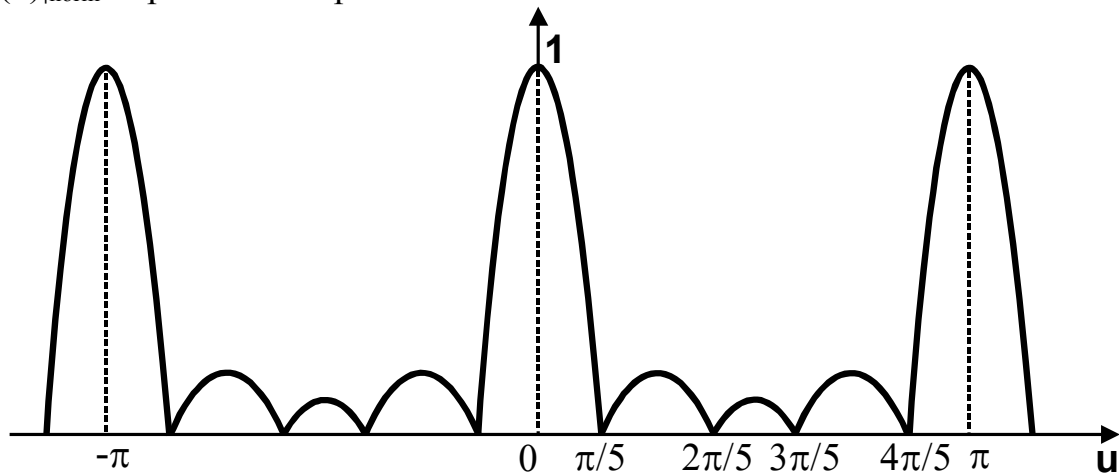
$$|F|_{\text{norm}} = \frac{|F|}{|F|_{\text{MAX}}} = \frac{1}{n} \left| \frac{\sin(nu)}{\sin(u)} \right| \quad [12]$$

Il fattore di schiera normalizzato rappresenta una funzione molto importante poiché il suo andamento descrive le caratteristiche di radiazione della schiera. Per ottenere una schiera lineare uniforme con determinate caratteristiche, si possono scegliere i

parametri di progetto (λ , n , δ) in modo che il fattore di schiera normalizzato abbia l'andamento corrispondente alle proprietà radiative desiderate.

Nel seguito sono quindi brevemente riassunte le caratteristiche principali del fattore di schiera normalizzato:

- $|F(u)|_{\text{norm}}$ è periodica di periodo π .



- **Massimi assoluti** : $|F(u)|_{\text{norm}}$ ha un *massimo assoluto* (di valore =1) per tutti gli $u = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, appartenenti all'intervallo permesso $[u_1, u_2]$.

Massimi relativi: $|F(u)|_{\text{norm}}$ presenta inoltre dei *massimi relativi*, approssimativamente in corrispondenza di quei valori di $u \in [u_1, u_2]$ che massimizzano $|\sin(nu)|$, cioè

$$u = \pm (2k+1) \pi / 2n \Rightarrow \cos \psi = \delta \lambda / 2\pi l \pm (2k+1) \lambda / 2ln \quad k=1,2,3,..$$

- **Zeri**: gli zeri di $|F(u)|_{\text{norm}}$ si hanno ovviamente per quegli $u \in [u_1, u_2]$ che annullano $|\sin(nu)|$, e cioè

$$u = \pm k\pi/n \quad k=1,2,3,..., n-1, n+1, ...$$

$$\cos \psi = \delta \lambda / 2\pi l \pm k\lambda / nl \quad k=1,2,3,..., n-1, n+1, ...$$

Gli zeri del fattore di schiera normalizzato corrispondono sempre a direzioni di zero della schiera complessiva, mentre non è detto che i massimi (assoluti e relativi) corrispondano alle direzioni dei lobi di radiazione (principali e secondari). Non bisogna dimenticare, infatti, che *la funzione di radiazione complessiva è data dal prodotto fra il fattore di schiera normalizzato e la funzione di radiazione del singolo elemento radiante. Pertanto, in virtù di tale prodotto, le direzioni di massima radiazione della schiera complessiva possono non corrispondere né alle direzioni di*

massimo del fattore di schiera normalizzato, né ai massimi di radiazione del singolo elemento.

Salvo rare eccezioni, una schiera lineare uniforme viene usualmente realizzata in modo che il fattore di schiera normalizzato abbia:

1. Un solo massimo assoluto nell'intervallo $[u_1, u_2]$;
2. Massimi relativi nell'intervallo $[u_1, u_2]$. decrescenti;
3. Massima ampiezza dell'intervallo $[u_1, u_2]$ (nel rispetto delle condizioni 1 e 2)

Le condizioni 1) – 3) definiscono il cosiddetto *progetto ottimo* di una schiera, e si traducono quantitativamente nelle seguenti disuguaglianze

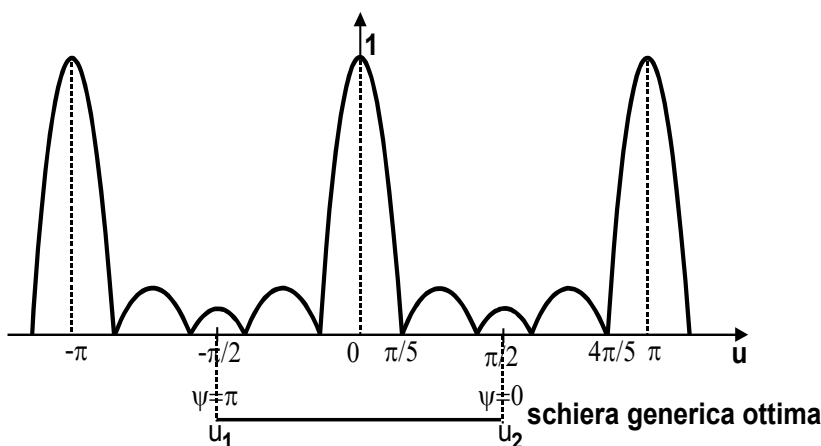
$$\frac{\pi\lambda}{\lambda} \geq \left| \frac{\delta}{2} \right|$$

$$[u_1, u_2] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow \frac{\pi\lambda}{\lambda} \pm \frac{\delta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

Benché non strettamente necessario, la seconda disuguaglianza viene presa, quando possibile, col segno di uguaglianza. L'unico massimo assoluto si ha quindi per $u=0$ e pertanto nella direzione ψ che soddisfa la seguente uguaglianza

$$u = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\psi_{\max} = \delta\lambda / 2\pi l, \quad 0 \leq \psi_{\max} < \pi$$

Si osservi che il valore $\Psi = \Psi_{\max}$ non individua in realtà una sola direzione, ma piuttosto tutte le (infinite) direzioni relative alle direttrici di un cono avente per asse la direzione di allineamento e una apertura pari a 2Ψ (uniche eccezioni i casi $\Psi=0$ e $\Psi=\pi$)



Esempio: n=5

Nel caso di progetto ottimo, il fattore di schiera normalizzato $|F(u)|_{\text{norm}}$ presenta un numero di massimi nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ pari a $n-1$ (uno assoluto e $n-2$ relativi decrescenti).

Schiere lineari uniformi: esempi

1. *Schiera a radiazione trasversale (Broad-Side)*

Sono schiere lineari uniformi aventi la direzione di massimo di $|F|_{norm}$ perpendicolare alla direzione di allineamento, cioè per $\Psi = \pi/2$, e quindi

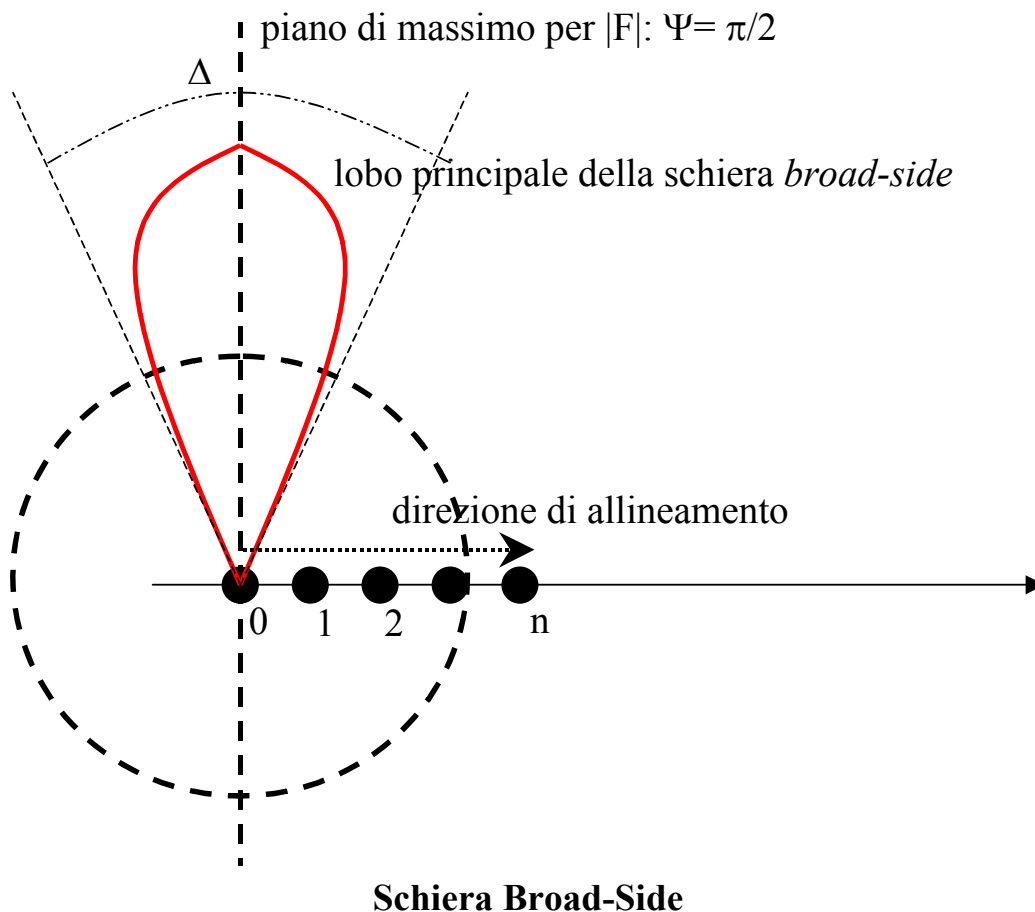
$$\cos \psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = 0 \quad (\text{tutti gli elementi alimentati in fase})$$

Si noti che la condizione $\psi = \pi/2$ individua un intero piano (quello $\perp$ alla direzione di allineamento), e non una specifica direzione. Nel caso di progetto ottimo resta da imporre

$$u_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\lambda}{2}$$

Progetto ottimo	$\Rightarrow$	$\lambda = \lambda/2$
Schiera Broadside		$\delta = 0$

Considerando una schiera di dipoli elementari disposti perpendicolarmente al piano del foglio, risulta quindi:



calcolando le due direzioni di zero più vicine al massimo si può stimare l'apertura del lobo principale

$$\Delta = 2 \arcsin\left(\frac{\lambda}{n\lambda}\right)_{\text{p.ottimo}} = 2 \arcsin\left(\frac{2}{n}\right)$$

2. Schiera a radiazione longitudinale (End-Fire)

Sono schiere uniformi aventi la direzione di massimo di $|F|$ coincidente con la direzione di allineamento, cioè per $\psi=0$, e quindi

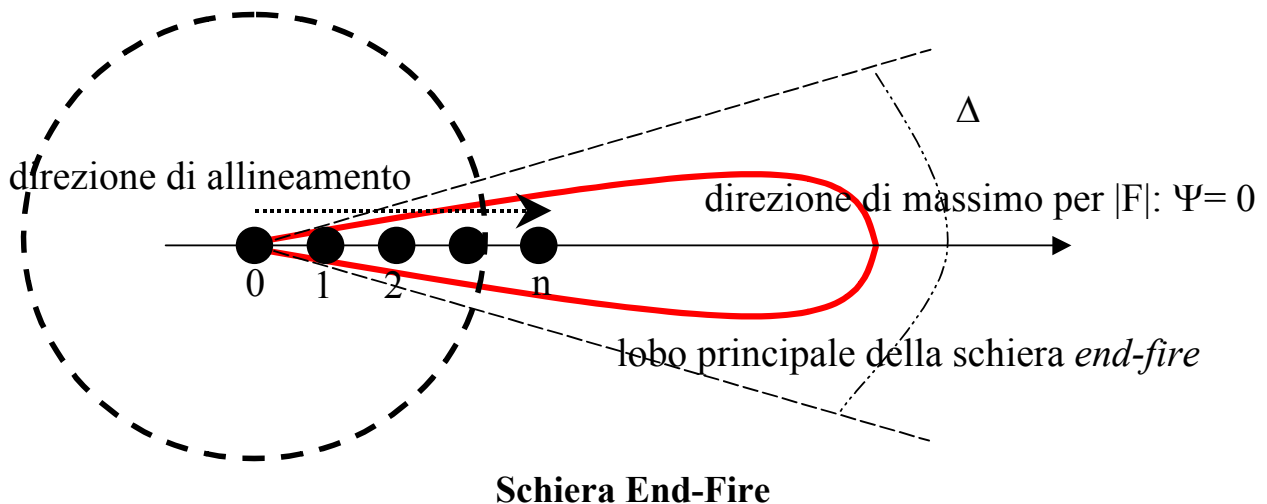
$$\cos \psi = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \delta = 2\pi l / \lambda$$

Poiché tale valore di δ determina automaticamente $u_2 = 0$, per realizzare il progetto ottimo resta da imporre

$$u_1 = -\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\lambda}{4} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\pi}{2}$$

Progetto ottimo	$\Rightarrow$	$l = \lambda/4$
Schiera End-Fire		$\delta = \pi/2$

Considerando una schiera di dipoli elementari disposti perpendicolarmente al piano del foglio, risulta quindi:



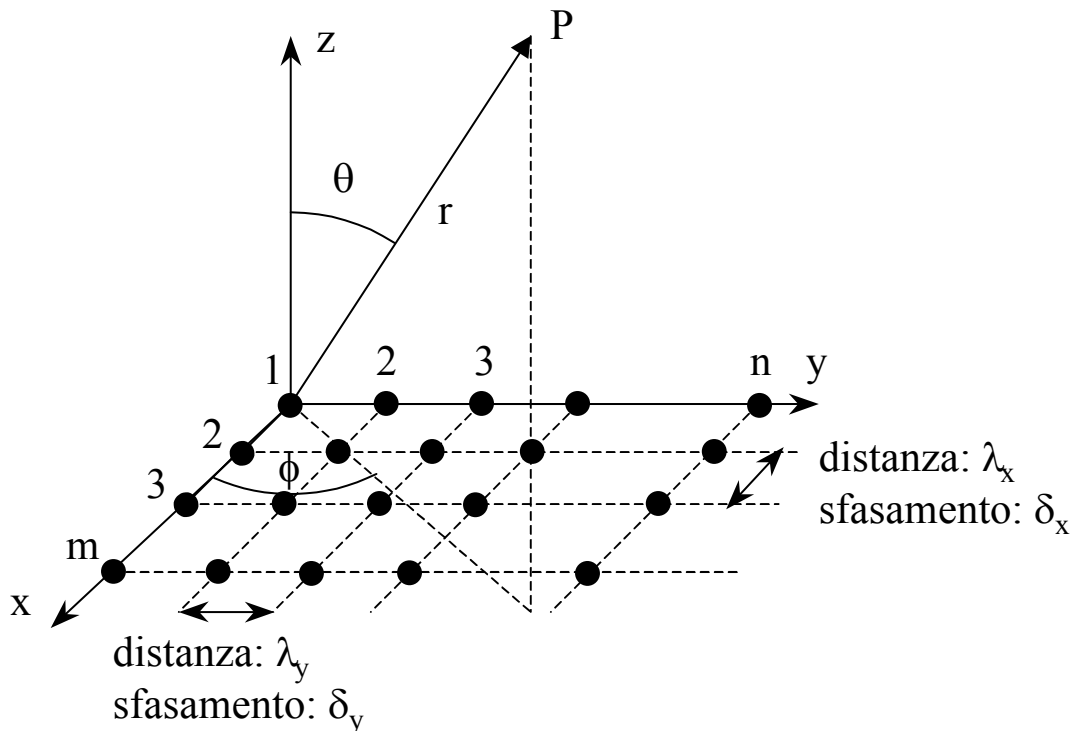
Analogamente a quanto fatto nel caso precedente si può calcolare l'espressione dell'ampiezza del lobo principale:

$$\Delta = 4 \arcsin \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2n\lambda}} \right)_{\text{p.ottimo}} = 4 \arcsin \left(\sqrt{\frac{2}{n}} \right)$$

Schiere planari

Le schiere planari (dette anche *cortine* o *schiere di schiere*) possono essere considerate come una semplice generalizzazione delle schiere lineari; a fronte di una maggiore complessità, permettono un maggior controllo sulla forma del diagramma di radiazione, che può essere quindi sagomato in maniera più duttile e flessibile. Grazie a questa versatilità, sono largamente impiegate nell'ambito delle telecomunicazioni (radar, sistemi radiomobili, ecc.).

Un array planare è una schiera costituita da ($m \cdot n$) antenne elementari disposte in un piano a formare una “matrice di m righe e n colonne”, in modo che gli elementi di ogni riga e di ogni colonna rappresentino una schiera lineare uniforme (con sfasamenti δ_x e δ_y caratteristici, rispettivamente, di ogni riga ed ogni colonna) (vedi figura).



Il calcolo del campo irradiato da una schiera planare nel punto $P(r, \theta, \phi)$ a grande distanza può essere facilmente svolto a partire dal campo irradiato da una schiera lineare uniforme.

Si consideri infatti la schiera lineare costituita dagli m elementi disposti sull'asse x ; il campo da essa irradiato sarà dato dalla seguente espressione:

$$\tilde{E}'(r, \theta, \phi) = \tilde{E}_0(r, \theta, \phi) \cdot F_x(\theta, \phi) \quad [13]$$

dove $\tilde{E}_0(r, \theta, \phi)$ rappresenta ovviamente il campo irradiato dal singolo elemento della schiera e $F_x(\theta, \phi)$ rappresenta il fattore di schiera, e cioè

$$F_x(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{m-1} e^{jk(\beta \lambda_x^p \cdot l_r - \delta_x)} \quad [14]$$

E' ora immediato osservare che tutte le n colonne della matrice di elementi radianti rappresentano schiere lineari uniformi di m elementi *tutte uguali fra loro*.

La schiera planare può allora essere considerata come una schiera lineare di n elementi uguali allineati nella direzione dell'asse y, ciascuno dei quali è a sua volta una schiera lineare di m elementi allineati in direzione x. Il campo complessivamente irradiato può quindi essere espresso come:

$$\tilde{E}(r, \theta, \phi) = \tilde{E}'(r, \theta, \phi) \cdot F_y(\theta, \phi) \quad [15]$$

con

$$F_y(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{jk(\beta \lambda_y^p \cdot l_r - \delta_y)} \quad [16]$$

Dalla combinazione delle relazioni [13-16] si ottiene infine

$$\tilde{E}(r, \theta, \phi) = \tilde{E}_0(r, \theta, \phi) \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{m-1} e^{jk(\beta \lambda_x^p \cdot l_r - \delta_x)} \right)}_{F(\theta, \phi)} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{jk(\beta \lambda_y^p \cdot l_r - \delta_y)} \right)$$

Come per le schiere lineari, il campo complessivamente irradiato da una schiera planare è dato dal prodotto fra il campo irradiato dal singolo elemento radiante e un opportuno fattore complesso di schiera. Restano quindi formalmente valide anche per le schiere planari espressioni analoghe alle [5] – [6] – [7]. Anche per le schiere planari, inoltre, *il campo irradiato complessivo ha la stessa polarizzazione del campo irradiato dal singolo elemento*

In particolare, *il fattore di schiera complesso di un array planare è dato quindi dal prodotto dei fattori complessi di schiera nelle direzioni x e y rispettivamente.*

Poiché le [14] e [16] rappresentano ciascuna una progressione geometrica, è possibile scrivere immediatamente

$$F(u_x, u_y) = e^{j(m-1)u_x} \cdot e^{j(n-1)u_y} \cdot \left\{ \frac{\sin(mu_x)}{\sin(u_x)} \right\} \cdot \left\{ \frac{\sin(nu_y)}{\sin(u_y)} \right\} \quad [17]$$

e quindi

$$|F(u_x, u_y)|_{\text{norm}} = |F_x(u_x)|_{\text{norm}} \cdot |F_y(u_y)|_{\text{norm}} = \frac{1}{m \cdot n} \frac{|\sin(mu_x)|}{|\sin(u_x)|} \cdot \frac{|\sin(nu_y)|}{|\sin(u_y)|} \quad [18]$$

dove:

$$\begin{aligned} \blacksquare u_x &= \frac{\pi \rho}{\lambda} \lambda_x \cdot \hat{i}_r - \frac{\delta_x}{2} = \frac{\pi \lambda_x}{\lambda} \cos \psi_x - \frac{\delta_x}{2} ; \\ \blacksquare u_y &= \frac{\pi \rho}{\lambda} \lambda_y \cdot \hat{i}_r - \frac{\delta_y}{2} = \frac{\pi \lambda_y}{\lambda} \cdot \cos \psi_y - \frac{\delta_y}{2} \end{aligned}$$

Con riferimento alla figura a inizio paragrafo, si osservi inoltre che, essendo $\lambda_x = \lambda_x \cdot \hat{i}_x$ e $\lambda_y = \lambda_y \cdot \hat{i}_y$ risulta anche

$$\begin{aligned} \blacksquare \cos \psi_x &= \hat{i}_x \cdot \hat{i}_r = \hat{i}_x \cdot (\sin \theta \cos \phi \cdot \hat{i}_x + \sin \theta \sin \phi \cdot \hat{i}_y + \cos \theta \cdot \hat{i}_z) = \sin \theta \cos \phi \\ \blacksquare \cos \psi_y &= \hat{i}_y \cdot \hat{i}_r = \hat{i}_y \cdot (\sin \theta \cos \phi \cdot \hat{i}_x + \sin \theta \sin \phi \cdot \hat{i}_y + \cos \theta \cdot \hat{i}_z) = \sin \theta \sin \phi \end{aligned}$$

Il massimo di $|F_x|_{\text{norm}}$ si ha ovviamente per $u_x = 0$, mentre il massimo di $|F_y|_{\text{norm}}$ per $u_y = 0$; per orientare il massimo del fattore di schiera dell'array planare nella direzione (θ_M, ϕ_M) occorre imporre tali condizioni simultaneamente:

$$\begin{cases} u_x = 0 \\ u_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_x = \beta \lambda_x \cdot \sin \theta_M \cos \phi_M \\ \delta_y = \beta \lambda_y \cdot \sin \theta_M \sin \phi_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan \phi_M = \frac{\delta_y \cdot \lambda_x}{\delta_x \cdot \lambda_y} \\ \sin^2 \theta_M = \left(\frac{\delta_x}{\beta \lambda_x} \right)^2 + \left(\frac{\delta_y}{\beta \lambda_y} \right)^2 \end{cases} \quad [19]$$

La [19] mette quindi in evidenza quale deve essere la relazione fra i parametri di progetto λ_x , δ_x , λ_y , δ_y per ottenere il massimo di radiazione nella direzione desiderata.

Si osservi che poiché $\tan(\phi_M) = \tan(\phi_M + 180)$ e $\sin(\theta_M) = \sin(180 - \theta_M)$ le direzioni di massimo sono in realtà sempre 4: (θ_M, ϕ_M) , $(\theta_M, \phi_M + 180)$, $(180 - \theta_M, \phi_M)$, $(180 - \theta_M, \phi_M + 180)$.

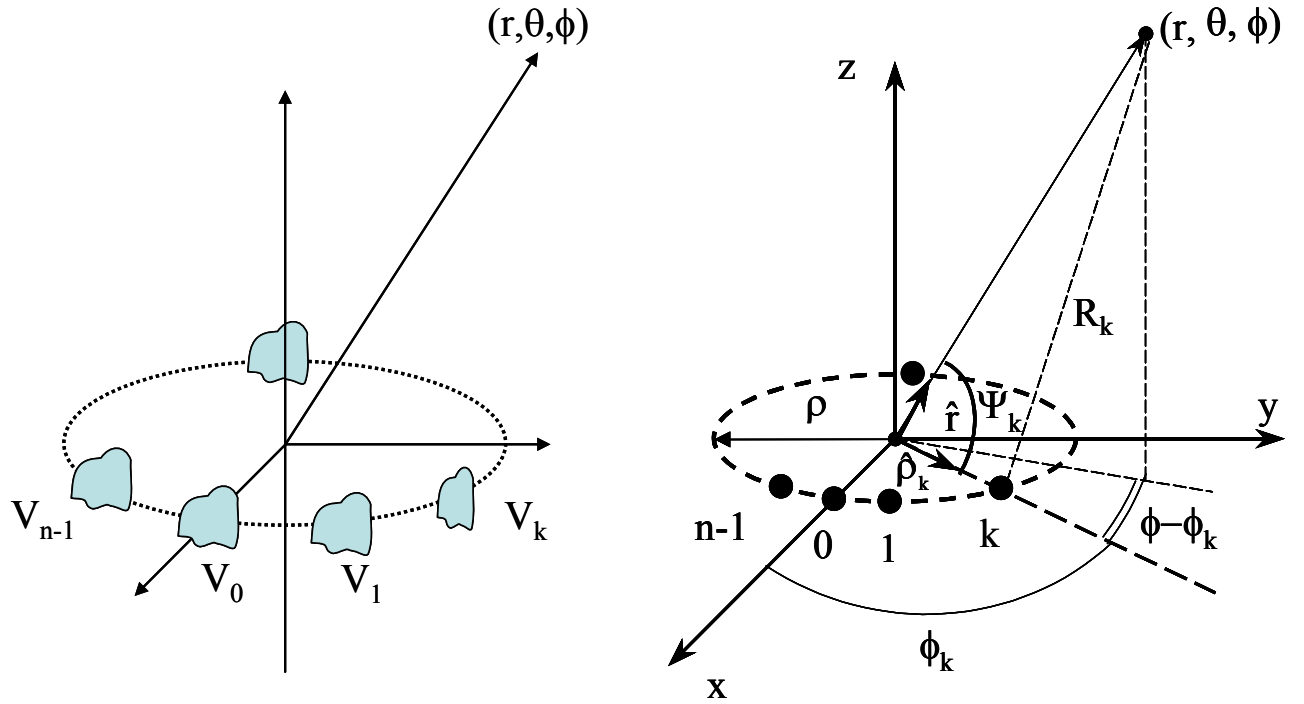
Inoltre, l'andamento di $|F|$ risulta simmetrico rispetto al piano individuato dagli elementi dell'array.

Schiere circolari

Le schiere circolari rappresentano una tipologia di antenna di notevole interesse pratico, poiché sono utilizzate in numerose applicazioni nel campo della radiolocalizzazione (*direction finding*, radar, sonar, ecc.)

Una schiera si dice circolare se gli elementi radianti sono disposti nello spazio in modo che ciascun elemento possa essere sovrapposto al successivo per mezzo di una rotazione (di ampiezza costante) attorno ad un asse detto asse della schiera.

In tal modo i centri di fase delle antenne che formano la schiera appartengono ad una circonferenza di raggio ρ .



$$\phi_k = 2\pi \cdot (k/n) \quad k=0,1,2,\dots,n-1$$

Figura A

La relazione fra il vettore $\vec{w}_k$ e il “corrispondente” vettore $\vec{w}_0$ è allora la seguente:

$$\vec{w}_k = \tilde{R}_k \cdot \vec{w}_0 = \begin{bmatrix} \cos \phi_k & -\sin \phi_k & 0 \\ \sin \phi_k & \cos \phi_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{w}_0$$

dove R_k rappresenta la matrice di una rotazione antioraria di un angolo ϕ_k .

Pertanto il momento equivalente complessivo rispetto all'origine O può essere espresso come:

$$\vec{M} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{V_k} \vec{J}_k(\vec{w}_k) \cdot e^{j\beta \vec{w}_k \cdot \hat{i}_r} dV_k = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{V_0} \Lambda_k \vec{J}_0(\vec{w}_0) \cdot e^{-j\delta_k} \cdot e^{j\beta (\tilde{R}_k \cdot \vec{w}_0) \cdot \hat{i}_r} dV_0$$

Tale espressione non permette, tuttavia, di mettere facilmente in evidenza il momento equivalente del singolo elemento radiante.

Sia allora $\vec{M}_C(\theta, \phi)$ il momento equivalente di un *ipotetico* elemento radiante identico a quelli che costituiscono la schiera, ma “centrato” nell’origine del sistema di riferimento, ovvero avente centro di fase coincidente con l’origine O (vedi figura B).

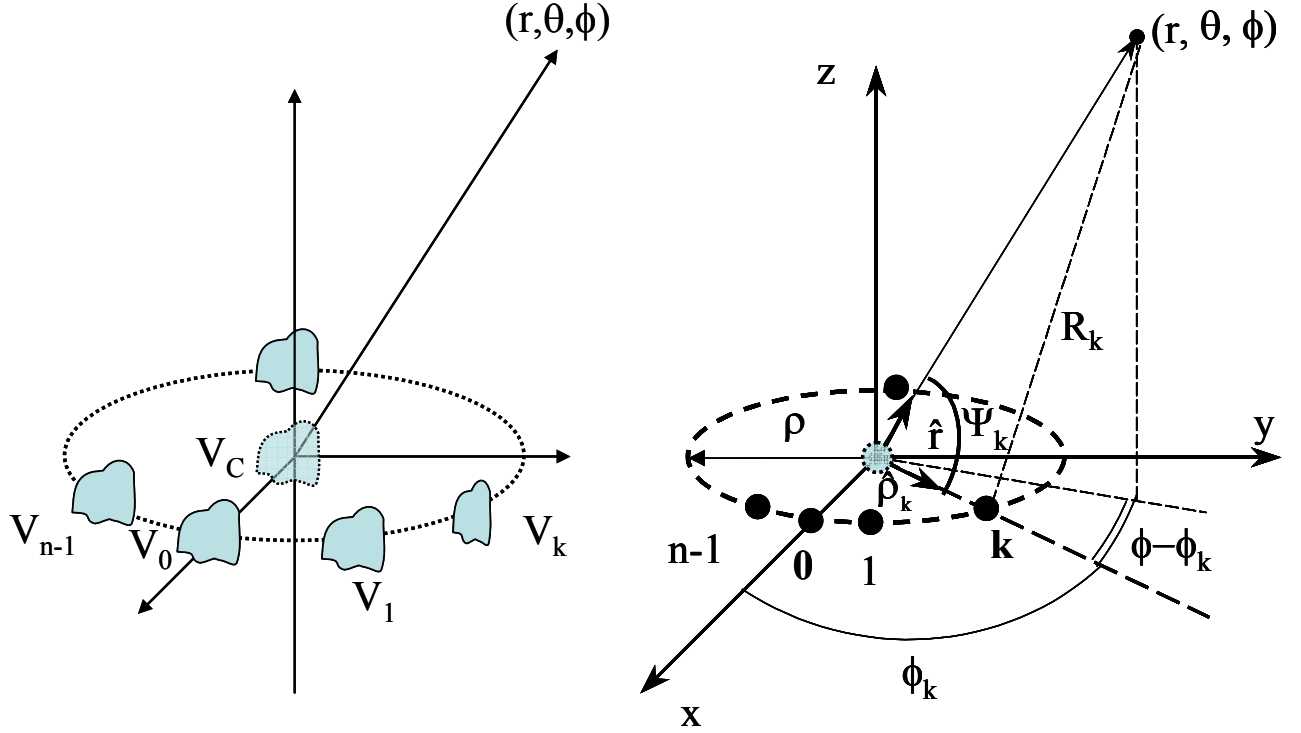


Figura B

Per una nota proprietà generale del momento equivalente di una sorgente, esiste una precisa relazione fra il momento rispetto ad O della sorgente “centrata” nell’origine e il momento rispetto ad O della stessa sorgente traslata della quantità $\vec{\rho}_k = \rho \cdot (\cos \phi_k \hat{i}_x + \sin \phi_k \cdot \hat{i}_y)$. Supponendo $\Lambda_C = \Lambda_0 = 1$ e $\delta_C = \delta_0 = 0$, in particolare risulta

$$\vec{M}_k^\rho = \Lambda_k \cdot e^{-j\delta_k} \cdot \vec{M}_C^\rho \cdot e^{j\beta \vec{\rho}_k \cdot \hat{i}_r} \quad [20]$$

E pertanto

$$\vec{M}(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{n-1} \vec{M}_k^\rho(\theta, \phi) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \Lambda_k \cdot e^{-j\delta_k} \cdot e^{j\beta \vec{\rho}_k \cdot \hat{i}_r} \right) \cdot \vec{M}_C^\rho(\theta, \phi) \quad [21]$$

$F(\theta, \phi)$

La funzione $F(\theta, \phi)$ rappresenta quindi il *fattore di schiera complesso* della schiera circolare. Poiché risulta

$$\begin{aligned} \rho_k \cdot \hat{i}_r &= \rho (\cos \phi_k \hat{i}_x + \sin \phi_k \hat{i}_y) \cdot (\sin \theta \cos \phi \hat{i}_x + \sin \theta \sin \phi \hat{i}_y + \cos \phi \hat{i}_z) = \\ &= \rho (\cos \phi_k \sin \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi \sin \phi_k) = \rho \cdot \sin \theta \cdot \cos(\phi - \phi_k) \end{aligned}$$

e la funzione $F(\theta, \phi)$ può essere così riscritta

$$F(\theta, \phi) = \sum_{k=0}^{n-1} \Lambda_k \cdot e^{j(\beta \rho \cdot \sin \theta \cdot \cos(\phi - \phi_k) - \delta_k)} \quad [22]$$

E' quindi immediato ottenere

$$E(r, \theta, \phi) = F(\theta, \phi) \cdot \check{E}_C(r, \theta, \phi) \quad [23]$$

Dal punto di vista concettuale, tale espressione dice che il campo complessivo irradiato da una schiera circolare è uguale al prodotto fra il campo irradiato dal singolo elemento *collocato al centro della schiera* e il fattore complesso di schiera.

Se non si vuole fare riferimento ad un elemento radiante al centro della schiera (che di fatto non c'è), e possibile osservare che, invertendo la [20] per $k=0$, si ottiene:

$$\check{M}_C = \check{M}_0 \cdot e^{-j\beta \rho_0 \cdot \hat{i}_r} \underset{\rho_0 = \rho \cdot \hat{i}_x}{=} \check{M}_0 \cdot e^{-j\beta \rho \sin \theta \cos \phi}$$

Le espressioni per il momento equivalente ed il campo complessivo irradiato diventano rispettivamente

$$\check{M}(\theta, \phi) = e^{-j\beta \rho \sin \theta \cos \phi} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} \Lambda_k \cdot e^{j(\beta \rho \sin \theta \cos(\phi - \phi_k) - \delta_k)} \right) \cdot \check{M}_0(\theta, \phi) \quad [24]$$

1 4 4 4 4 4 4 4 2 4 4 4 4 4 4 4 3
F(θ,φ)

$$\check{E}(r, \theta, \phi) = F(\theta, \phi) \cdot \check{E}_0(r, \theta, \phi) \quad [25]$$

Cambiando leggermente l'espressione del fattore di schiera, il campo complessivo irradiato da una schiera circolare può essere calcolato anche come il prodotto fra il campo irradiato dal singolo elemento della schiera e il fattore complesso di schiera.

Sia che si consideri la [23] che la [25], restano valide anche per le schiere circolari espressioni analoghe alle [5] – [6] – [7]. Inoltre, *il campo irradiato dalla schiera ha la stessa polarizzazione del campo irradiato dal singolo elemento*

Osservando la [22] o la [24], appare chiaro che, diversamente dal caso lineare la sommatoria che definisce F non rappresenta una progressione geometrica (nemmeno se si ponesse $\delta_k = k\delta$, come per le schiere lineari uniformi), e per questo l'analisi della del fattore di schiera normalizzato, anche solo qualitativa, risulta alquanto complicata. Limitandosi per semplicità al caso $\Lambda_k=1$, può tuttavia osservare che:

➔ per orientare il massimo di $|F|$ nella direzione (θ_M, ϕ_M) occorre scegliere gli sfasamenti relativi delle correnti di eccitazione nel seguente modo

$$\delta_k = \begin{cases} 0 & \text{per } k = 0, \text{ in accordo alla [1]} \\ \beta\rho \cdot \sin\theta_M \cdot [\cos(\phi_M - \phi_k) - \cos\phi_M] & \text{per } k \neq 0 \end{cases} \quad [26]$$

in tal modo tutti gli addendi della [22] (e analogamente della [24]) si riducono ad 1 e si sommano quindi in fase; si ottiene pertanto $|F(\theta_M, \phi_M)| = n \Rightarrow |F(\theta_M, \phi_M)| = n$;

➔ poiché $\sin(\theta_M) = \sin(180-\theta_M)$ il fattore di schiera risulta simmetrico rispetto al piano contenente gli elementi;

➔ posto

$$\rho_0 = \rho \cdot \sqrt{[(\sin\theta\cos\phi - \sin\theta_M\cos\phi_M)^2 + (\sin\theta\sin\phi - \sin\theta_M\sin\phi_M)^2]}$$

$$\xi = \tan^{-1} \left[\frac{\sin\theta\sin\phi - \sin\theta_M\sin\phi_M}{\sin\theta\cos\phi - \sin\theta_M\cos\phi_M} \right]$$

si può dimostrare (C. Balanis, *Antenna Theory*, Wiley) che il fattore di schiera può essere espresso come

$$F(P) = n \cdot e^{-j\beta\rho(\sin\theta\cos\phi - \sin\theta_M\cos\phi_M)} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{m \cdot n}(\beta\rho_0) \cdot e^{jm \cdot n \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \xi\right)}$$

dove $J_{m \cdot n}(x)$ indica la funzione di Bessel di prima specie di ordine $(m \cdot n)$.

Riepilogo antenne a schiera

Come è stato ampiamente illustrato, il comportamento complessivo di una schiera di antenne (in termini di campo irradiato) può differire anche sensibilmente dal comportamento del singolo elemento radiante.

Esiste tuttavia una precisa relazione fra le proprietà di radiazione complessive e le caratteristiche radiative del singolo elemento. In particolare, si è mostrato che vale sempre la seguente relazione generale:

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = F(\theta, \phi) \cdot \vec{E}_0(r, \theta, \phi)$$

dove

- ★ $\vec{E}(r, \theta, \phi)$ rappresenta il campo complessivo irradiato nel punto (r, θ, ϕ)
- ★ $\vec{E}_0(r, \theta, \phi)$ rappresenta il campo irradiato dal singolo elemento nel punto (r, θ, ϕ)
- ★ $F(\theta, \phi)$ rappresenta il fattore complesso di schiera nella direzione (θ, ϕ) .
L'espressione della funzione $F(\theta, \phi)$ dipende dal numero degli elementi e dalla loro disposizione geometrica, nonché dalle costanti (complesse) di proporzionalità fra le densità di corrente impressa (cioè dai valori di Λ_k e δ_k).

Il parallelismo fra i vettori $\vec{E}(r, \theta, \phi)$ ed $\vec{E}_0(r, \theta, \phi)$ - nel senso dei vettori complessi - garantisce che *il campo irradiato complessivo ha la stessa polarizzazione del campo irradiato dal singolo elemento che compone la schiera*.

A partire dall'espressione del campo irradiato, è immediato ricavare relazioni analoghe per le grandezze caratteristiche della radiazione complessiva:

$$I_R(\theta, \phi) = |F(\theta, \phi)|^2 \cdot I_{R0}(\theta, \phi)$$

$$f(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{I_R(\theta, \phi)}{I_R(\theta_M, \phi_M)}} = \sqrt{\frac{|F(\theta, \phi)|^2 I_{R0}(\theta, \phi)}{|F(\theta_M, \phi_M)|^2 I_{R0}(\theta_M, \phi_M)}} = \left| \frac{F(\theta, \phi)}{F(\theta_M, \phi_M)} \right| \cdot f_0(\theta, \phi)$$

funzione di radiazione
della schiera se gli
elementi fossero isotropi

$$d(\theta, \phi) \propto f(\theta, \phi)^2 = \left| \frac{F(\theta, \phi)}{F(\theta_M, \phi_M)} \right|^2 \cdot f_0(\theta, \phi)^2$$

Tali relazioni mettono in evidenza che la funzione di radiazione associata al fattore di schiera complesso rappresenta la funzione di radiazione che avrebbe la schiera *se fosse costituita da elementi isotropi con identiche correnti di eccitazione*.

Pertanto, il funzionamento di una schiera può essere concettualmente descritto per mezzo della cosiddetta regola della “moltiplicazione dei pattern” (*pattern multiplication*), nota anche come

REGOLA di KRAUSS: *il valore della funzione di radiazione di una schiera di antenne può essere determinato, per ogni direzione, moltiplicando il valore della funzione di radiazione del singolo elemento radiante per il valore della funzione di radiazione di una schiera di elementi isotropici, posizionati ed eccitati come gli elementi della schiera reale.*

diagramma di radiazione
del singolo elemento



diagramma di radiazione della
schiera di elementi isotropici



diagramma di radiazione
complessivo

