

# POLARIZZAZIONE di Vettori Sinusoidali

## 1. Vettore complesso rappresentativo (trasformata di Steinmetz)

Una funzione vettoriale del tempo e dello spazio si dice (vettore) sinusoidale (o monocromatica) se ciascuna delle sue componenti è una funzione sinusoidale del tempo:

$$\begin{aligned}\vec{f}(P, t) &= f_x(P, t) \cdot \hat{i} + f_y(P, t) \cdot \hat{j} + f_z(P, t) \cdot \hat{k} = \\ &= A_x(P) \cdot \cos(\omega t + \phi_x(P)) \cdot \hat{i} + A_y(P) \cdot \cos(\omega t + \phi_y(P)) \cdot \hat{j} + A_z(P) \cdot \cos(\omega t + \phi_z(P)) \cdot \hat{k}\end{aligned}$$

In ogni punto dello spazio ed in ogni istante di tempo,  $\vec{f}(P, t) \in \Re^3$ .

Per ogni funzione vettoriale sinusoidale, si definisce *vettore (o fasore) complesso “rappresentativo”* (o *trasformata di Steinmetz*) della funzione sinusoidale il vettore

$$\vec{F} = A_x \cdot e^{j\phi_x} \cdot \hat{i} + A_y \cdot e^{j\phi_y} \cdot \hat{j} + A_z \cdot e^{j\phi_z} \cdot \hat{k} \quad [\text{Eq.1}]$$

dove si è omessa la dipendenza da  $P$  per brevità. In ogni punto dello spazio,  $\vec{F} \in \mathbb{C}^3$ .

Tale vettore è “rappresentativo” nel senso che ad una assegnata funzione sinusoidale corrisponde sempre uno ed un solo vettore complesso, e viceversa. Esiste cioè una corrispondenza biunivoca fra l’insieme delle funzioni sinusoidali e l’insieme dei vettori complessi ad esse associati.

In particolare, nota la funzione sinusoidale, il vettore complesso  $\vec{F}$  rappresentativo è dato immediatamente dall’eq. 1, mentre la funzione sinusoidale può essere ricavata a partire dal vettore complesso rappresentativo per mezzo della seguente espressione:

$$\vec{f} = \Re \left\{ \vec{F} \cdot e^{j\omega t} \right\} = \frac{1}{2} \left( \vec{F} \cdot e^{j\omega t} + \vec{F}^* \cdot e^{-j\omega t} \right) \quad [\text{Eq.2}]$$

Nell’ambito delle telecomunicazioni, non vengono mai utilizzati segnali e funzioni rigorosamente monocromatici per trasmettere informazione dal trasmettitore al ricevitore, perché è noto che un segnale periodico non consente il trasporto di alcuna informazione. *La modulazione, che rappresenta il processo con cui il messaggio informativo viene “aggiunto” alla portante, produce sempre segnali non periodici.*

E’ altrettanto noto, tuttavia, che il segnale modulante varia sempre molto lentamente rispetto alla portante sinusoidale di modulazione e che pertanto i segnali modulati hanno un andamento solo leggermente diverso da quello rigorosamente sinusoidale.

In prima approssimazione, quindi, i segnali trasmessi in un qualunque sistema di telecomunicazione possono essere considerati monocromatici, e quindi possono essere descritti anche per mezzo dei corrispondenti vettori complessi rappresentativi.

Inoltre, una qualunque equazione nel dominio del tempo, cioè fra funzioni sinusoidali, può essere riscritta in forma equivalente nel dominio dei fasori, cioè in termini dei corrispondenti vettori complessi rappresentativi.

Esempio: equazioni di Maxwell, mezzo lineare omogeneo isotropo tempo-invariante

Dominio del tempo

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{e} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{h} = \epsilon \cdot \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \sigma \cdot \vec{e} + \vec{j}_i \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{d} = \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 \end{array} \right.$$

Dominio dei fasori

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} + \sigma \cdot \vec{E} + \vec{j}_i \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right.$$

Si è mostrato fin qui la *possibilità* di definire un vettore complesso rappresentativo per ogni funzione vettoriale monocromatica (almeno in prima approssimazione) e di scrivere le equazioni fra grandezze sinusoidali anche nel dominio dei fasori, cioè in termini dei corrispondenti vettori complessi. Nulla si è per ora detto dell'*utilità* di tale possibilità, ed è pertanto lecito (e doveroso) chiedersi quale sia il reale vantaggio offerto dall'uso dei vettori complessi rappresentativi.

Innanzitutto si può osservare che, per definizione, le grandezze vettoriali sinusoidali sono funzione di quattro variabili (le coordinate x, y, z del punto P e il tempo t), mentre i fasori complessi sono funzioni delle sole coordinate x, y, z. L'eliminazione della variabile t semplifica le equazioni nel dominio dei fasori e permettendone così una (più) facile risoluzione.

Si considerino inoltre due generici vettori sinusoidali  $\vec{f}$  e  $\vec{g}$  di uguale frequenza, rappresentati nel campo complesso dai fasori  $\vec{F}$  e  $\vec{G}$ . Il valor medio temporale del prodotto scalare fra  $\vec{f}$  e  $\vec{g}$  è definito come

$$\langle \vec{f} \cdot \vec{g} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{f} \cdot \vec{g} dt$$

Grazie all'eq. 2 si può osservare che

$$\begin{aligned} \vec{f} \cdot \vec{g} &= \frac{(\vec{F} \cdot e^{j\omega t} + \vec{F}^* \cdot e^{-j\omega t}) \cdot (\vec{G} \cdot e^{j\omega t} + \vec{G}^* \cdot e^{-j\omega t})}{4} = \\ &= \frac{\vec{F} \cdot \vec{G}^* + \vec{F}^* \cdot \vec{G}}{4} + \frac{\vec{F} \cdot \vec{G} e^{j2\omega t} + \vec{F}^* \cdot \vec{G}^* e^{-j2\omega t}}{4} \end{aligned}$$

Si può ora osservare che

$$\begin{aligned} \frac{\vec{F} \cdot \vec{G} e^{j2\omega t} + \vec{F}^* \cdot \vec{G}^* e^{-j2\omega t}}{4} &= \frac{\left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{G}}{2}\right) e^{j2\omega t} + \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{G}}{2}\right)^* e^{-j2\omega t}}{2} = \Re \left\{ \frac{\vec{F} \cdot \vec{G}}{2} \cdot e^{j2\omega t} \right\} \\ \frac{\vec{F} \cdot \vec{G}^* + \vec{F}^* \cdot \vec{G}}{4} &= \frac{\left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{G}^*}{2}\right) e^{j0 \cdot t} + \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{G}^*}{2}\right)^* e^{-j0 \cdot t}}{2} = \Re \left\{ \frac{\vec{F} \cdot \vec{G}^*}{2} \cdot e^{j20 \cdot t} \right\} = \Re \left\{ \frac{\vec{F} \cdot \vec{G}^*}{2} \right\} \end{aligned}$$

Pertanto

$$\langle \vec{f} \cdot \vec{g} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{f} \cdot \vec{g} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \Re \left\{ \frac{\vec{F} \cdot \vec{G}^*}{2} \right\} + \Re \left\{ \frac{\vec{F} \cdot \vec{G}}{2} \cdot e^{j2\omega t} \right\} \right) dt$$

Il primo addendo non dipende evidentemente da  $t$ , mentre il secondo rappresenta una grandezza sinusoidale di pulsazione  $2\omega$ , e pertanto il suo valore medio da 0 a  $T$  è nullo. Si ottiene quindi

$$\langle \vec{f} \cdot \vec{g} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{f} \cdot \vec{g} dt = \Re \left\{ \frac{\vec{F} \cdot \vec{G}^*}{2} \right\} \quad [\text{Eq. 3}]$$

Per calcolare il valore medio del prodotto scalare di due grandezze vettoriali sinusoidali è sufficiente considerare la parte reale del prodotto scalare fra il fasore associato alla prima e il coniugato del fasore associato alla seconda .

Analogamente si può dimostrare che:

$$\langle \vec{f} \times \vec{g} \rangle = \Re \left\{ \frac{\vec{F} \times \vec{G}^*}{2} \right\} \quad [\text{Eq. 4}]$$

Poiché numerose grandezze di interesse elettromagnetico si ricavano a partire dal prodotto scalare o vettoriale dei campi elettrico e magnetico, è evidente come il ricorso ai fasori complessi permetta tramite le eq. 3 e 4 una rapida valutazione dei valori medi delle grandezze elettromagnetiche più rilevanti

Esempio: la propagazione di un'onda dal trasmettitore al ricevitore è sempre associata al trasferimento di potenza fra i terminali. In particolare, la quantità di potenza che, in un certo istante, attraversa l'unità di superficie disposta perpendicolarmente alla direzione di propagazione (densità di potenza w) è data in ogni punto dal modulo del vettore di Poynting in quell'istante ed in quel punto:

$$w(x, y, z, t) = |\vec{s}(x, y, z, t)| = |\vec{e}(x, y, z, t) \times \vec{h}(x, y, z, t)|$$

Il valore medio della densità di potenza è quindi dato immediatamente da

$$\langle w(x, y, z, t) \rangle = \langle |\vec{s}(x, y, z, t)| \rangle = \left| \Re \left[ \frac{\vec{E} \times \vec{H}^*}{2} \right] \right|$$

Infine, il ricorso ai vettori complessi risulta di utilità nella valutazione della *polarizzazione* di una grandezza vettoriale sinusoidale, come sarà illustrato nel paragrafo successivo.

## 2. Polarizzazione

Sia  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(P)$  il vettore complesso rappresentativo del generico vettore sinusoidale  $\mathbf{e}(P,t)$  in un punto  $P=(x,y,z)$  qualunque dello spazio, che ai fini della trattazione che segue si può supporre fissato (sarà quindi omessa la dipendenza dal punto di tutte le grandezze). Proiettando  $\mathbf{E}$  lungo gli assi di un generico sistema di riferimento cartesiano ortogonale si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_x \hat{\mathbf{i}}_x + E_y \hat{\mathbf{i}}_y + E_z \hat{\mathbf{i}}_z = |E_x| e^{j\phi_x} \hat{\mathbf{i}}_x + |E_y| e^{j\phi_y} \hat{\mathbf{i}}_y + |E_z| e^{j\phi_z} \hat{\mathbf{i}}_z = \\ &= |E_x| [\cos \phi_x + j \sin \phi_x] \hat{\mathbf{i}}_x + |E_y| [\cos \phi_y + j \sin \phi_y] \hat{\mathbf{i}}_y + |E_z| [\cos \phi_z + j \sin \phi_z] \hat{\mathbf{i}}_z\end{aligned}$$

Alternativamente,  $\mathbf{E}$  può essere espresso come:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_R + j\mathbf{E}_I \quad [\text{Eq. 5}]$$

avendo posto:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_R = |E_x| \cos \phi_x \cdot \hat{\mathbf{i}}_x + |E_y| \cos \phi_y \cdot \hat{\mathbf{i}}_y + |E_z| \cos \phi_z \cdot \hat{\mathbf{i}}_z \\ \mathbf{E}_I = |E_x| \sin \phi_x \cdot \hat{\mathbf{i}}_x + |E_y| \sin \phi_y \cdot \hat{\mathbf{i}}_y + |E_z| \sin \phi_z \cdot \hat{\mathbf{i}}_z \end{cases}$$

I pedici R ed I sottolineano che i vettori *reali*  $\mathbf{E}_R$  ed  $\mathbf{E}_I$  rappresentano rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria del fasore complesso associato al vettore sinusoidale  $\mathbf{e}(t)$ . Applicando l'antitrasformata di Steinmetz vettoriale al vettore complesso rappresentativo  $\mathbf{E}$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(t) &= \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} e^{j\omega t} \} = \operatorname{Re} \{ (\mathbf{E}_R + j\mathbf{E}_I) e^{j\omega t} \} = \operatorname{Re} \{ (\mathbf{E}_R + j\mathbf{E}_I) (\cos \omega t + j \sin \omega t) \} = \\ &= \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_R \cos \omega t + j\mathbf{E}_R \sin \omega t + j\mathbf{E}_I \cos \omega t - \mathbf{E}_I \sin \omega t \}\end{aligned}$$

si ottiene immediatamente l'espressione del vettore sinusoidale in funzione dei vettori  $\mathbf{E}_R$  ed  $\mathbf{E}_I$ :

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{E}_R \cdot \cos \omega t - \mathbf{E}_I \cdot \sin \omega t \quad [\text{Eq. 6}]$$

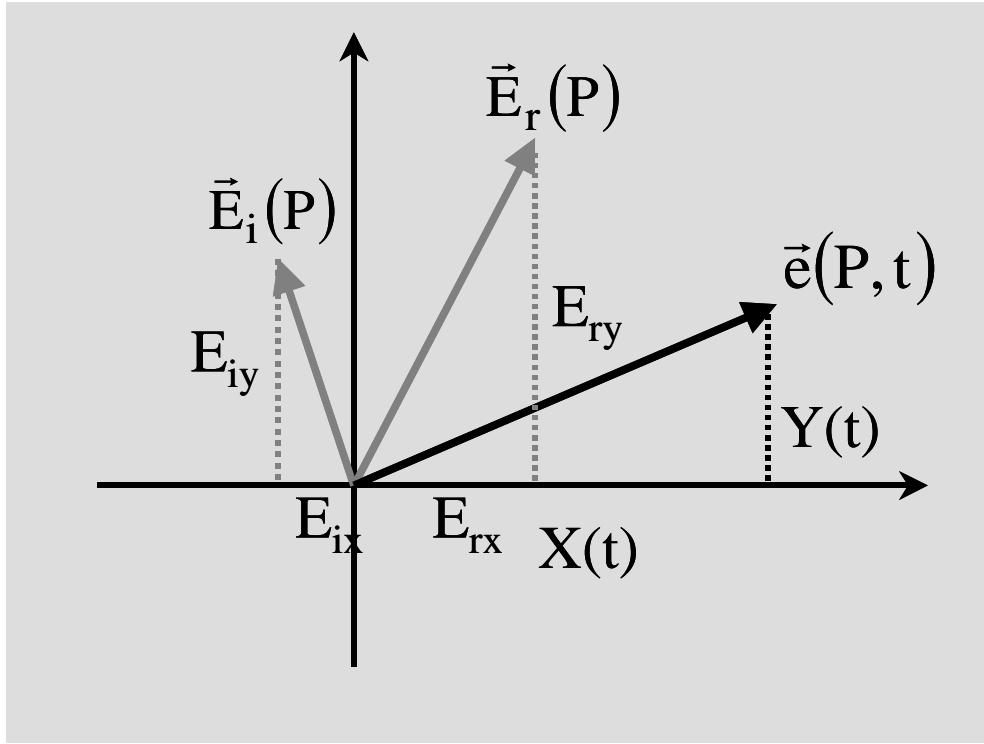
In particolare, l'equazione 6 evidenzia che il vettore sinusoidale  $\mathbf{e}(t)$  in ogni punto varia nel tempo, ma *appartiene sempre al piano geometrico individuato dai vettori  $\mathbf{E}_R$  ed  $\mathbf{E}_I$*  e dal punto di applicazione P del vettore  $\mathbf{e}(t)$ ; si può dimostrare facilmente che al variare del tempo, l'estremità del vettore  $\mathbf{e}(t)$  descrive in tale piano una traiettoria ellittica.

Si consideri infatti un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (x,y) nel piano individuato dai vettori  $\mathbf{E}_R$  ed  $\mathbf{E}_I$  (figura 1), e si considerino le componenti di tali vettori lungo gli assi del riferimento:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_R = E_{Rx} \hat{\mathbf{i}}_x + E_{Ry} \hat{\mathbf{i}}_y \\ \mathbf{E}_I = E_{Ix} \hat{\mathbf{i}}_x + E_{Iy} \hat{\mathbf{i}}_y \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni scritte sopra nell'equazione 6 si ottiene:

$$\mathbf{e}(t) = (E_{Rx} \cdot \cos \omega t - E_{Ix} \cdot \sin \omega t) \hat{\mathbf{i}}_x + (E_{Ry} \cdot \cos \omega t - E_{Iy} \cdot \sin \omega t) \hat{\mathbf{i}}_y$$



**Figura 1**

Le componenti del vettore  $\mathbf{e}(t)$  lungo gli assi x e y del riferimento considerato, in funzione del parametro  $t$ , sono quindi:

$$\begin{cases} x(t) = E_{Rx} \cos \omega t - E_{Ix} \sin \omega t \\ y(t) = E_{Ry} \cos \omega t - E_{Iy} \sin \omega t \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \sin \omega t = \frac{x E_{Ry} - y E_{Rx}}{(E_{Iy} E_{Rx} - E_{Ix} E_{Ry})} \\ \cos \omega t = \frac{x E_{Iy} - y E_{Ix}}{(E_{Iy} E_{Rx} - E_{Ix} E_{Ry})} \end{cases}$$

elevando al quadrato e sommando membro a membro, ricordando la relazione trigonometrica  $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$ , si ottiene:

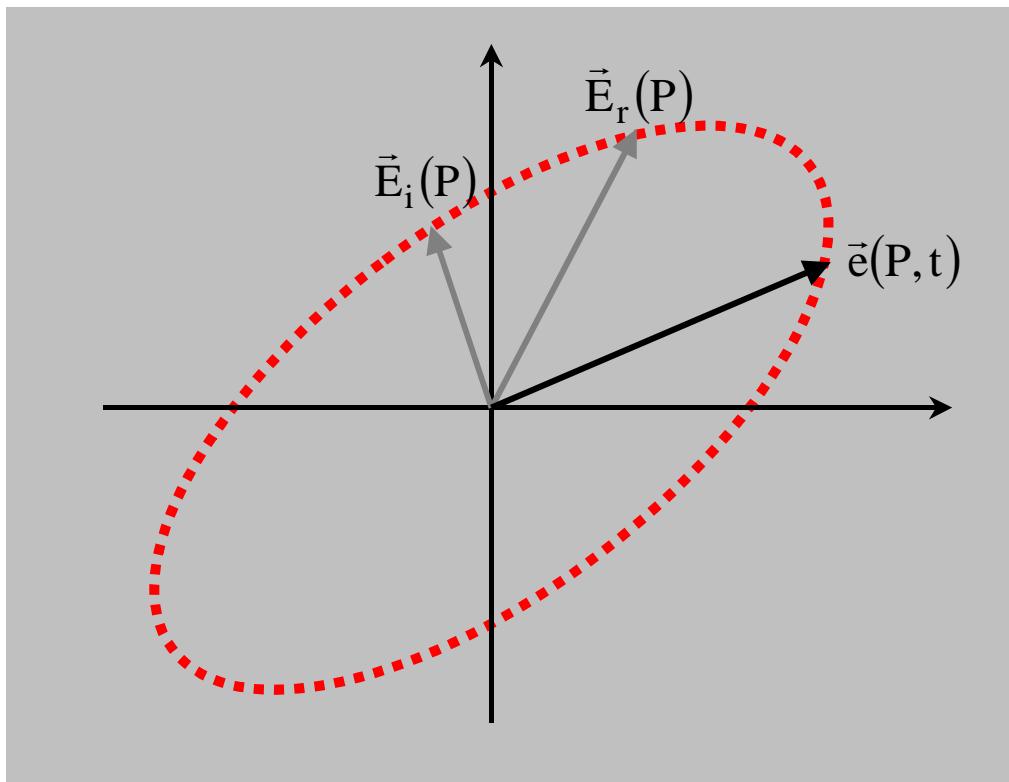
$$(xE_{Ry} - yE_{Rx})^2 + (xE_{Iy} - yE_{Ix})^2 = (E_{Iy}E_{Rx} - E_{Ix}E_{Ry})^2$$

e infine:

$$(E_{Ry} + E_{Iy})^2 x^2 + (E_{Rx} + E_{Ix})^2 y^2 - 2(E_{Rx}E_{Ry} + E_{Ix}E_{Iy})xy = (E_{Iy}E_{Rx} - E_{Ix}E_{Ry})^2$$

che rappresenta l'equazione cartesiana di una ellisse (non in forma canonica), come può essere facilmente verificato.

Un vettore sinusoidale la cui estremità descrive un'ellisse si dice *polarizzato ellitticamente* (o a *polarizzazione ellittica*). In casi particolari l'ellisse si riduce ad un cerchio (*polarizzazione circolare*) o ad un segmento (*polarizzazione lineare*). Osservando la figura 2, è intuitivo che la polarizzazione circolare si ha quando i vettori  $\mathbf{E}_R$  ed  $\mathbf{E}_I$  sono perpendicolari fra loro ed hanno uguale modulo; la polarizzazione lineare si ottiene invece quando i vettori  $\mathbf{E}_R$  ed  $\mathbf{E}_I$  hanno la stessa direzione, oppure quando uno di essi è nullo.



**Figura 2**

Nei casi di polarizzazione ellittica e circolare, poi, il verso di rotazione può essere *destrorso* (*antiorario*) o *sinistrorso* (*orario*) – rispetto al verso dell'asse z, individuato dal versore  $\hat{\mathbf{i}}_z$  normale al piano di polarizzazione e che soddisfa la relazione:  $\hat{\mathbf{i}}_x \times \hat{\mathbf{i}}_y = \hat{\mathbf{i}}_z$ . I versori  $(\hat{\mathbf{i}}_x, \hat{\mathbf{i}}_y, \hat{\mathbf{i}}_z)$  costituiscono quindi una terna ortogonale destrorsa. Tipicamente, nel caso in cui si stia studiando la

polarizzazione di un'onda TEM (piana o sferica), si orienta il versore  $\hat{\mathbf{i}}_z$  in modo che esso sia concorde con la direzione di propagazione dell'onda, poi si scelgono i versori  $(\hat{\mathbf{i}}_x, \hat{\mathbf{i}}_y)$  sul piano di polarizzazione dei vettori  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  (che deve essere ortogonale a  $\hat{\mathbf{i}}_z$  per definizione di onda TEM), in modo che i 3 versori costituiscano una terna destrorsa.

Occorre pertanto individuare un procedimento formale possibilmente semplice per individuare la polarizzazione di un vettore sinusoidale (cioè la forma della traiettoria descritta dal vettore sinusoidale  $\mathbf{e}(t)$  e il verso di rotazione rispetto ad un osservatore solidale con l'asse  $z$ ).

L'equazione 6 rappresenta un modo di scomporre un vettore sinusoidale nella somma (vettoriale) di due vettori a polarizzazione lineare in quadratura di fase tra loro; è evidente infatti che i vettori

$$\begin{cases} \mathbf{e}_R(t) = \mathbf{E}_R \cdot \cos \omega t \\ \mathbf{e}_I(t) = \mathbf{E}_I \cdot \sin \omega t = \mathbf{E}_I \cdot \cos(\omega t - \pi/2) \end{cases}$$

sono vettori a loro volta sinusoidali a polarizzazione lineare.

Esistono però infinite altre possibilità per effettuare tale scomposizione. Considerata infatti una fase iniziale  $\delta$  qualsiasi, si può sempre scrivere

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_R + j\mathbf{E}_I = (\mathbf{E}_R \cdot e^{-j\delta} + j\mathbf{E}_I \cdot e^{-j\delta}) \cdot e^{j\delta} = (\mathbf{E}_1 + j\mathbf{E}_2) \cdot e^{j\delta}$$

dove  $\mathbf{E}_1$  ed  $\mathbf{E}_2$  sono due nuovi vettori reali dati da

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_R \cdot \cos \delta + \mathbf{E}_I \cdot \sin \delta \\ \mathbf{E}_2 = -\mathbf{E}_R \cdot \sin \delta + \mathbf{E}_I \cdot \cos \delta \end{cases}$$

I vettori  $\mathbf{E}_1$  ed  $\mathbf{E}_2$  sono in generale del tutto differenti dai vettori  $\mathbf{E}_R$  ed  $\mathbf{E}_I$  (direzione, modulo, verso). L'espressione del vettore sinusoidale  $\mathbf{e}$  è la seguente:

$$\mathbf{e}(t) = \Re \{ \mathbf{E} \cdot e^{j\omega t} \} = \Re \{ (\mathbf{E}_1 + j\mathbf{E}_2) \cdot e^{j\delta} \cdot e^{j\omega t} \} = \mathbf{E}_1 \cos(\omega t + \delta) - \mathbf{E}_2 \sin(\omega t + \delta)$$

ed è ancora, evidentemente, la somma di due vettori sinusoidali a polarizzazione rettilinea.

In particolare, è possibile individuare il valore della fase iniziale  $\delta_0$  che consente di ottenere vettori  $\mathbf{E}_1$  ed  $\mathbf{E}_2$  fra loro ortogonali:

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = 0$$

$$(\mathbf{E}_R \cdot \cos \delta_0 + \mathbf{E}_I \cdot \sin \delta_0) \cdot (-\mathbf{E}_R \cdot \sin \delta_0 + \mathbf{E}_I \cdot \cos \delta_0) = 0$$

$$\left( |\mathbf{E}_I|^2 - |\mathbf{E}_R|^2 \right) \underbrace{\sin \delta_0 \cos \delta_0}_{\frac{\sin 2\delta}{2}} + \mathbf{E}_R \cdot \mathbf{E}_I \underbrace{\left( \cos^2 \delta_0 - \sin^2 \delta_0 \right)}_{\cos 2\delta} = 0$$

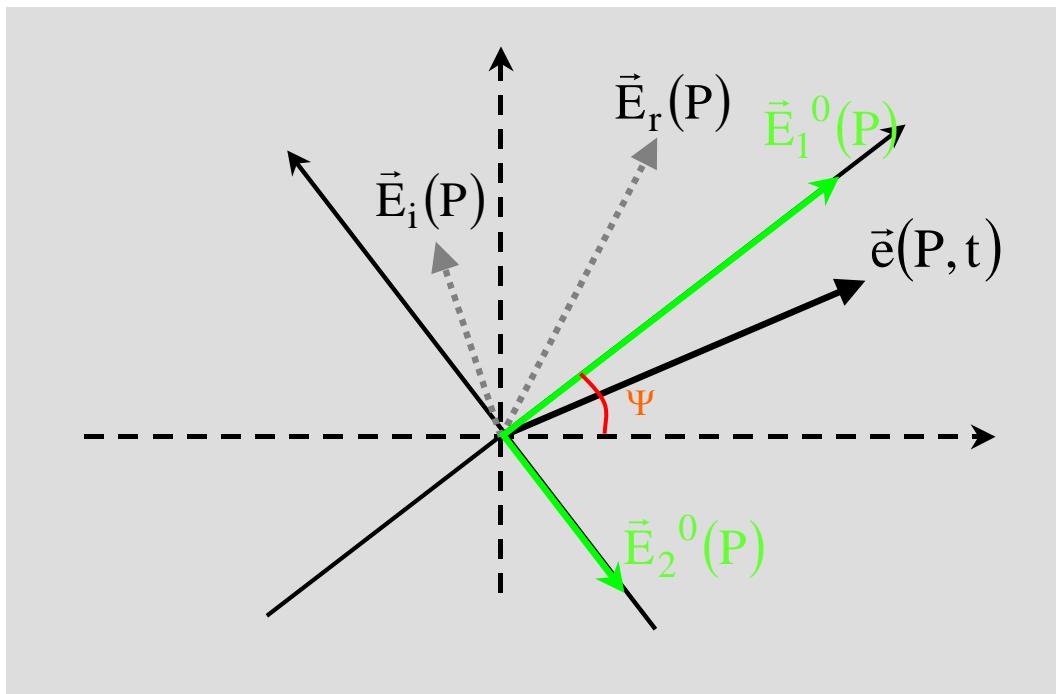
$$\frac{1}{2} \operatorname{tg}(2\delta_0) \left( |\mathbf{E}_R|^2 - |\mathbf{E}_I|^2 \right) = \mathbf{E}_R \cdot \mathbf{E}_I$$

$$\boxed{\delta_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{2 \mathbf{E}_R \cdot \mathbf{E}_I}{|\mathbf{E}_R|^2 - |\mathbf{E}_I|^2} \right)}$$

Siano  $\mathbf{E}_1^0$  ed  $\mathbf{E}_2^0$  i vettori reali ortogonali che si ottengono da  $\mathbf{E}_R$  ed  $\mathbf{E}_I$  per mezzo del valore  $\delta_0$ , cioè

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1^0 = \mathbf{E}_R \cdot \cos \delta_0 + \mathbf{E}_I \cdot \sin \delta_0 \\ \mathbf{E}_2^0 = -\mathbf{E}_R \cdot \sin \delta_0 + \mathbf{E}_I \cdot \cos \delta_0 \end{cases}$$

Evidentemente, conviene scegliere gli assi del sistema di riferimento nel piano di appartenenza del vettore  $\mathbf{e}(t)$  in modo che abbiano direzioni coincidenti con quelle dei vettori  $\mathbf{E}_1^0$  ed  $\mathbf{E}_2^0$ , rispettivamente (Fig. 3).



**Figura 3**

Indicati con  $(\hat{\mathbf{i}}_x^0, \hat{\mathbf{i}}_y^0)$  i versori di tale sistema di riferimento (orientati in modo tale da formare ancora una terna ortogonale destrorsa con  $\hat{\mathbf{i}}_z$ , cioè in modo che sia  $\hat{\mathbf{i}}_x^0 \times \hat{\mathbf{i}}_y^0 = \hat{\mathbf{i}}_z$ ), risulta:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1^0 = A \hat{\mathbf{i}}_x^0 & \text{se } \|\mathbf{E}_1^0\| > \|\mathbf{E}_2^0\| \\ \mathbf{E}_2^0 = B \hat{\mathbf{i}}_y^0 & \end{cases} \quad \text{oppure:} \quad \begin{cases} \mathbf{E}_1^0 = B \hat{\mathbf{i}}_y^0 & \text{se } \|\mathbf{E}_1^0\| < \|\mathbf{E}_2^0\| \\ \mathbf{E}_2^0 = A \hat{\mathbf{i}}_x^0 & \end{cases}$$

con  $A, B \in \Re, A > 0$  e  $A > |B|$ . Infatti, si può sempre orientare il verso dell'asse  $x$  concordemente con quello del vettore avente modulo maggiore fra  $\mathbf{E}_1^0$  ed  $\mathbf{E}_2^0$ , e quindi risulta sempre  $A > 0$  e  $A > |B|$ . Tuttavia, non è detto che, in generale, i vettori  $\mathbf{E}_1^0$  ed  $\mathbf{E}_2^0$  costituiscano una terna destrorsa con  $\hat{\mathbf{i}}_z$ , quindi il vettore avente modulo minore fra  $\mathbf{E}_1^0$  ed  $\mathbf{E}_2^0$  può avere verso concorde o discorde, a seconda dei casi, con il versore  $\hat{\mathbf{i}}_y^0$ : ciò si traduce nel fatto che la grandezza scalare  $B$  può avere segno positivo oppure negativo.

Pertanto il vettore complesso  $\mathbf{E}$  si può esprimere nella forma:

$$\boxed{\mathbf{E} = (A \hat{\mathbf{i}}_x^0 + jB \hat{\mathbf{i}}_y^0) e^{j\delta_0} \quad \text{con } A > 0, \quad A > |B|}$$

Nel dominio dei tempi si ha invece:

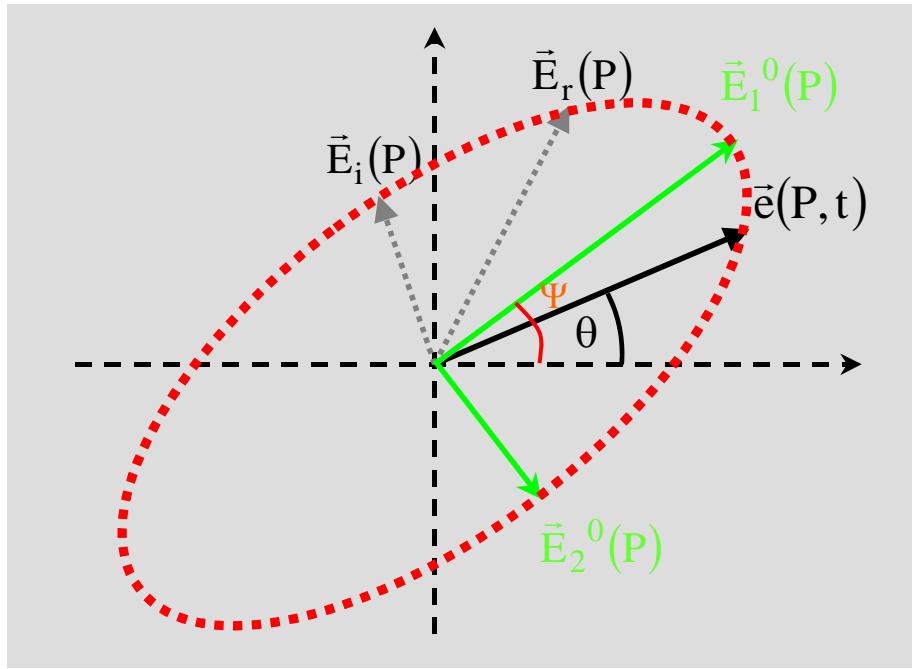
$$\mathbf{e}(t) = \underbrace{A \cos(\omega t + \delta_0) \cdot \hat{\mathbf{i}}_x^0}_{x_0} - \underbrace{B \sin(\omega t + \delta_0) \cdot \hat{\mathbf{i}}_y^0}_{y_0}$$

Esprimendo seno e coseno in funzione delle componenti  $x_0$  e  $y_0$ , quadrando e sommando si ottiene immediatamente:

$$\boxed{\left( \frac{x_0}{A} \right)^2 + \left( \frac{y_0}{B} \right)^2 = 1}$$

che rappresenta la ben nota equazione di una ellisse avente gli assi coincidenti con gli assi del sistema di riferimento (cioè in forma canonica). Ne consegue che i vettori  $\mathbf{E}_1^0$  ed  $\mathbf{E}_2^0$  (e quindi i versori  $\hat{\mathbf{i}}_x^0, \hat{\mathbf{i}}_y^0$ ) sono orientati lungo gli assi dell'ellisse descritta dall'estremità del vettore sinusoidale. In particolare, il versore  $\hat{\mathbf{i}}_x^0$  è diretto, per definizione, lungo il semiasse maggiore dell'ellisse,  $\hat{\mathbf{i}}_y^0$  lungo il semiasse minore. Il riferimento individuato dai versori  $\hat{\mathbf{i}}_x^0, \hat{\mathbf{i}}_y^0$  è detto **riferimento principale** dell'ellisse di polarizzazione. L'orientazione del riferimento principale rispetto al sistema di riferimento iniziale, cioè l'angolo  $\Psi$  che l'asse  $x_0$  forma con l'asse  $x$  sul piano di polarizzazione (figura 3), può essere facilmente determinato, ad esempio, mediante la relazione:

$$\Psi = \arccos(\hat{\mathbf{i}}_x^0 \cdot \hat{\mathbf{i}}_x)$$



**Figura 4**

Si osservi che la *fase iniziale*  $\delta_0$  è *indeterminata nel caso della polarizzazione circolare*, e di conseguenza anche il sistema di riferimento principale è indeterminato, in quanto ogni sistema di riferimento ortogonale sul piano di polarizzazione è un riferimento principale, per definizione di polarizzazione circolare (in particolare, i vettori  $\mathbf{E}_R$  ed  $\mathbf{E}_I$  individuano già, a loro volta, un riferimento principale).

Si noti che risulta anche:

$$\begin{cases} \|\mathbf{E}_1^0\| = A & \text{se } \|\mathbf{E}_1^0\| > \|\mathbf{E}_2^0\| \\ \|\mathbf{E}_2^0\| = |B| & \text{oppure} \end{cases} \quad \begin{cases} \|\mathbf{E}_1^0\| = |B| & \text{se } \|\mathbf{E}_1^0\| < \|\mathbf{E}_2^0\| \\ \|\mathbf{E}_2^0\| = A & \end{cases}$$

Quindi i moduli dei vettori  $\mathbf{E}_1^0$  ed  $\mathbf{E}_2^0$  coincidono con le lunghezze degli assi maggiore e minore dell'ellisse descritto dal vettore sinusoidale  $\mathbf{e}(t)$  al variare del tempo. Inoltre, i moduli dei vettori  $\mathbf{E}_1^0$  ed  $\mathbf{E}_2^0$  sono legati al modulo del vettore complesso  $\mathbf{E}$  mediante la relazione:

$$\|\mathbf{E}\| = \sqrt{(\mathbf{E}_1^0 + j\mathbf{E}_2^0) e^{j\delta_0} \cdot (\mathbf{E}_1^0 - j\mathbf{E}_2^0) e^{-j\delta_0}} = \sqrt{\mathbf{E}_1^0 \cdot \mathbf{E}_1^0 + \mathbf{E}_2^0 \cdot \mathbf{E}_2^0} = \sqrt{\|\mathbf{E}_1^0\|^2 + \|\mathbf{E}_2^0\|^2} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

che si traduce, da un punto di vista geometrico, nel fatto che il modulo del vettore  $\mathbf{E}$  coincide con la distanza fra un estremo dell'asse minore e uno dell'asse maggiore.

Si può inoltre osservare che

$$\mathbf{E}_1^0 \times \mathbf{E}_2^0 \cdot \hat{\mathbf{i}}_z = AB$$

Essendo inoltre:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1^0 \times \mathbf{E}_2^0 &= (\mathbf{E}_R \cdot \cos \delta_0 + \mathbf{E}_I \cdot \sin \delta_0) \times (-\mathbf{E}_R \cdot \sin \delta_0 + \mathbf{E}_I \cdot \cos \delta_0) = \\ &= \mathbf{E}_R \times \mathbf{E}_I \cdot \cos^2 \delta_0 - \mathbf{E}_I \times \mathbf{E}_R \cdot \sin^2 \delta_0 = \mathbf{E}_R \times \mathbf{E}_I\end{aligned}$$

risulta anche:

$$\mathbf{E}_R \times \mathbf{E}_I \cdot \hat{\mathbf{i}}_z = AB \quad [\text{Eq. 7}]$$

Sia ora  $\theta(t)$  l'angolo (misurato in senso antiorario) che il vettore  $\mathbf{e}(t)$  forma con l'asse x del riferimento scelto, nel generico istante temporale  $t$  (figura 4). Per ottenere il verso di rotazione di  $\mathbf{e}(t)$  occorre studiare il segno della derivata  $d\theta/dt$ : se esso è positivo,  $\theta$  cresce, e quindi la rotazione è antioraria, se invece è negativo  $\theta$  cala e la rotazione è oraria. Posto

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{Y}{X} = -\frac{B}{A} \cdot \operatorname{tg}(\omega t + \delta_0) \Rightarrow \theta = \operatorname{Arctg} \left( -\frac{B}{A} \cdot \operatorname{tg}(\omega t + \delta_0) \right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\frac{B^2}{A^2} \cdot \operatorname{tg}^2(\omega t + \delta_0) + 1} \cdot \left( -\frac{B}{A} \right) \frac{\omega}{\cos^2(\omega t + \delta_0)} = -\frac{B}{A} \frac{\omega}{\frac{B^2}{A^2} \cdot \sin^2(\omega t + \delta_0) + \cos^2(\omega t + \delta_0)}$$

si ricava immediatamente che

- Se  $B>0$  : polarizzazione oraria (o sinistrorsa)
- Se  $B<0$  : polarizzazione antioraria (o destrorsa)
- Se  $B=0$  : polarizzazione lineare

Sfruttando il risultato dell'equazione 7 e quanto detto in precedenza, si ottiene la seguente tabella per una rapida valutazione della polarizzazione di un vettore sinusoidale:

	<b>DESTRORSA (antioraria)</b>	<b>SINISTRORSA (oraria)</b>
<b>POL. LINEARE</b>	$\mathbf{E}_R \times \mathbf{E}_I \cdot \hat{\mathbf{i}}_z = 0$	
<b>POL. ELLITTICA</b>	$\mathbf{E}_R \perp \mathbf{E}_I$ oppure $ \mathbf{E}_R  \neq  \mathbf{E}_I $ $\mathbf{E}_R \times \mathbf{E}_I \cdot \hat{\mathbf{i}}_z < 0$	$\mathbf{E}_R \perp \mathbf{E}_I$ oppure $ \mathbf{E}_R  \neq  \mathbf{E}_I $ $\mathbf{E}_R \times \mathbf{E}_I \cdot \hat{\mathbf{i}}_z > 0$
<b>POL. CIRCOLARE</b>	$\mathbf{E}_R \perp \mathbf{E}_I$ e $ \mathbf{E}_R  =  \mathbf{E}_I $ $\mathbf{E}_R \times \mathbf{E}_I \cdot \hat{\mathbf{i}}_z < 0$	$\mathbf{E}_R \perp \mathbf{E}_I$ e $ \mathbf{E}_R  =  \mathbf{E}_I $ $\mathbf{E}_R \times \mathbf{E}_I \cdot \hat{\mathbf{i}}_z > 0$

### 3. Vettore di Polarizzazione

Dato un vettore sinusoidale  $\vec{e}$  ed indicato con  $\vec{E}$  il fasore complesso associato, si definisce *vettore di polarizzazione* il vettore

$$\vec{p} = \frac{\vec{E}}{|\vec{E}|} \cdot e^{j\chi} \quad [\text{Eq. 8}]$$

Come è evidente si tratta di un vettore complesso di modulo unitario (versore complesso) che ha la stessa polarizzazione del vettore  $\vec{E}$ . Il valore della fase  $\chi$  è arbitrario e viene di volta in volta fissato secondo convenienza. Riscrivendo l'eq. 8 come

$$\vec{E} = |\vec{E}| \cdot \vec{p} \cdot e^{-j\chi}$$

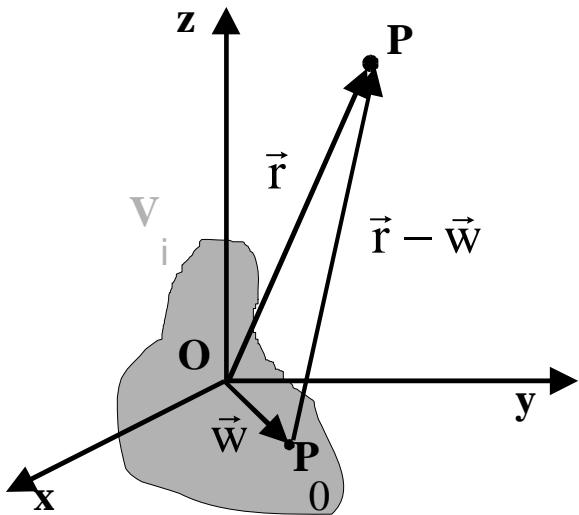
è possibile “separare” l'informazione sull'ampiezza del vettore (legata alla potenza del segnale) da quella sulla sua polarizzazione.

In un qualunque radiocollegamento, la comunicazione avviene per mezzo di onde elettromagnetiche che si propagano dal trasmettitore al ricevitore. I campi elettrico e magnetico dell'onda, che contengono e trasportano l'informazione, possono essere in prima approssimazione considerati vettori sinusoidali e quindi essere descritti per mezzo dei corrispondenti vettori complessi. Nei sistemi a propagazione libera il trasmettitore irradia il segnale direttamente nell'“atmosfera”, per mezzo di una antenna. L'onda elettromagnetica, propagandosi in aria ed interagendo con gli elementi dello scenario di propagazione, giunge al ricevitore, dove viene “raccolta” per mezzo di una seconda antenna. Esistono diverse tipologie di antenne, differenti per forma, dimensioni e, soprattutto, proprietà elettromagnetiche.

*Le caratteristiche e il posizionamento dell'antenna ricevente devono adattarsi alle caratteristiche del campo ricevuto (ampiezza e polarizzazione), le quali a loro volta dipendono dalle proprietà e dal posizionamento dell'antenna trasmittente.*

Come noto, le caratteristiche principali di una sorgente di campo (e quindi, in particolare, di una antenna) sono formalmente descritte dal momento equivalente  $\vec{M}_O$  della sorgente. E' dunque lecito attendersi che ci sia un legame fra ampiezza e polarizzazione del campo irradiato in un punto e momento equivalente della sorgente (antenna).

Limitandosi alla regione di campo lontano e a sorgenti elettriche, come noto risulta



$$\vec{M}_O(\theta, \phi) \approx \int_{V_i} \vec{J}_i(P_0) \cdot e^{j\beta(\vec{w} \cdot \hat{i}_r)} dV_0$$

Dove  $V_i$  è il volume occupato dalla sorgente e  $\hat{i}_r$  è il versore radiale di un sistema di riferimento sferico di origine O.

Il pedice "O" ricorda che il momento equivalente dipende dall'origine del sistema di riferimento.

Noto il momento equivalente, i campi elettrico e magnetico sono dati dalle seguenti espressioni:

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) \approx -j\eta \frac{\exp(-j\beta r)}{2\lambda r} [\hat{i}_r \times \vec{M}(\theta, \phi) \times \hat{i}_r] \quad [\text{Eq. 9}]$$

$$\vec{H}(r, \theta, \phi) \approx -j \frac{\exp(-j\beta r)}{2\lambda r} [\hat{i}_r \times \vec{M}(\theta, \phi)] \quad [\text{Eq. 10}]$$

*Il campo irradiato a grande distanza è pertanto sempre una onda sferica.*

Il momento equivalente è un vettore complesso che, in generale, ha componenti non nulle nelle tre direzioni del riferimento sferico  $\hat{i}_r, \hat{i}_\theta, \hat{i}_\phi$ . Poiché

$$\begin{aligned} (\hat{i}_r \times \vec{M}_O \times \hat{i}_r) &= (\hat{i}_r \times (M_r \hat{i}_r + M_\theta \hat{i}_\theta + M_\phi \hat{i}_\phi) \times \hat{i}_r) = (M_\theta \hat{i}_\phi - M_\phi \hat{i}_\theta) \times \hat{i}_r \\ &= M_\theta \hat{i}_\theta + M_\phi \hat{i}_\phi \end{aligned}$$

$$(\hat{i}_r \times \vec{M}_O) = \hat{i}_r \times (M_r \hat{i}_r + M_\theta \hat{i}_\theta + M_\phi \hat{i}_\phi) = -M_\phi \hat{i}_\theta + M_\theta \hat{i}_\phi$$

la 9 e la 10 possono essere così riscritte

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) \approx -j\eta \frac{\exp(-j\beta r)}{2\lambda r} [M_\theta(\theta, \phi) \hat{i}_\theta + M_\phi(\theta, \phi) \hat{i}_\phi] \quad [\text{Eq. 9 - bis}]$$

$$\vec{H}(r, \theta, \phi) \approx -j \frac{\exp(-j\beta r)}{2\lambda r} [-M_\phi(\theta, \phi) \hat{i}_\theta + M_\theta(\theta, \phi) \hat{i}_\phi] \quad [\text{Eq. 10 - bis}]$$

Dalle 9-bis e 10-bis risulta evidente che *il vettore  $\vec{E}$  e il vettore  $\vec{H}$  appartengono entrambi al piano perpendicolare in ogni punto alla radiale passante per quel punto.* Poiché inoltre è immediatamente verificabile che

$$\vec{H}(r, \theta, \phi) = \frac{\hat{i}_r \times \vec{E}(r, \theta, \phi)}{\eta} \quad [\text{Eq.11}]$$

ne segue che *i vettori  $\vec{E}$   $\vec{H}$  sono in ogni punto mutuamente ortogonali.*

Dalla equazione 9-bis è immediato ricavare il legame fra ampiezza e polarizzazione del campo irradiato e momento equivalente della sorgente. Infatti

$$|\vec{E}| = \sqrt{\vec{E} \cdot \vec{E}^*} \approx \frac{\eta}{2\lambda r} \cdot \sqrt{|\mathbf{M}_\theta|^2 + |\mathbf{M}_\phi|^2} \quad [\text{Eq.12}]$$

$$\vec{p} = \frac{\vec{E}}{|\vec{E}|} \cdot e^{j\chi} \approx -j \frac{\mathbf{M}_\theta \cdot \hat{i}_\theta + \mathbf{M}_\phi \cdot \hat{i}_\phi}{\sqrt{|\mathbf{M}_\theta|^2 + |\mathbf{M}_\phi|^2}} \cdot e^{j(\chi - \beta r)} \quad [\text{Eq.13}]$$

Poiché nella definizione di  $\vec{p}$  la fase  $\chi$  è arbitraria, è lecito porre  $\chi = \beta r$ . Indicando inoltre con  $\vec{M}_\perp$  il componente del momento equivalente perpendicolare, in ogni punto, alla radiale passante per quel punto (cioè  $\vec{M}_O = \vec{M}_\perp + \vec{M}_r$ ), la 12 e la 13 possono essere riscritte in forma compatta come segue:

$$|\vec{E}(r, \theta, \phi)| \approx \sqrt{\vec{E}(r, \theta, \phi) \cdot \vec{E}^*(r, \theta, \phi)} \approx \frac{\eta}{2\lambda r} \cdot |\vec{M}_\perp(\theta, \phi)| \quad [\text{Eq.12 - bis}]$$

$$\vec{p}(\theta, \phi) \approx \frac{\vec{E}(r, \theta, \phi)}{|\vec{E}(r, \theta, \phi)|} \cdot e^{j\chi} \approx -j \frac{\vec{M}_\perp(\theta, \phi)}{|\vec{M}_\perp(\theta, \phi)|} \quad [\text{Eq.13 - bis}]$$

La 10-bis in particolare mostra come anche il vettore di polarizzazione dipenda a grande distanza solo dalla direzione  $(\theta, \phi)$  e non dalla distanza  $r$  dalla sorgente. *La polarizzazione è cioè identica in tutti i punti di una stessa semiretta radiale.*

L'espressione del campo irradiato a grande distanza diviene infine

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) \approx \vec{p}(\theta, \phi) \cdot |\vec{E}(r, \theta, \phi)| \cdot e^{-j\beta r} \quad [\text{Eq.14}]$$