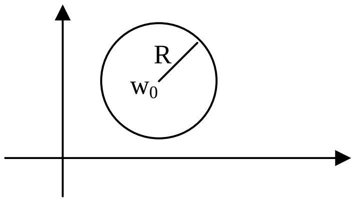
ADATTATORI di IMPEDENZA

1. Carta di Smith

PREMESSA: per motivi che saranno chiari in seguito si ricorda che nel piano complesso, l'equazione della generica circonferenza di centro w_0 ($\in$ C) e raggio R ($\in$ R) vale:



$(w - w_0) \cdot (w - w_0)^* = R^2$

$w \cdot w^* - w_0 \cdot w^* - w_0^* \cdot w + w_0 \cdot w_0^* = R^2$

$w \cdot w^* - w_0 \cdot w^* - w_0^* \cdot w = R^2 - w_0 \cdot w_0^*$

Considerata una linea di trasmissione, a partire dall' *impedenza di ingresso sulla sezione z ($Z_{IN}(z)$)* e' immediato definire l' *impedenza* ***normalizzata*** *sulla sezione z*:

$$z_n(z) = r(z) + jx(z) = \frac{Z_{IN}(z)}{Z_c} = \frac{1+\rho(z)}{1-\rho(z)} \qquad (1.1)$$

E' quindi evidente, da tale relazione, che ogni valore di impedenza normalizzata z_n corrisponde ad un valore di ρ e quindi ad un punto nel piano complesso { $\Re(\rho)$, $\Im(\rho)$ }.
In particolare si vuole studiare, in tale piano, il luogo geometrico dei punti corrispondenti ad impedenze normalizzate aventi r = costante. A tal fine, omettendo la dipendenza da z per alleggerire la notazione, e' utile riscrivere:

$$z_n = r + jx = \frac{1+\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1-\rho^*}{1-\rho^*} = \frac{1-\rho \cdot \rho^* + \rho - \rho^*}{|1-\rho|^2} = \frac{1-\rho \cdot \rho^*}{|1-\rho|^2} + \frac{\rho - \rho^*}{|1-\rho|^2} \qquad (1.2)$$

dove si e' sfruttata la relazione

$$1 + \rho \cdot \rho^* - \rho - \rho^* = 1 + |\rho|^2 - 2 \cdot \Re(\rho) = |1-\rho|^2$$

Il primo addendo della somma ottenuta nella (1.2) e' un numero reale, il secondo e' invece puramente immaginario; quindi

$$r = \frac{1-\rho \cdot \rho^*}{|1-\rho|^2} \qquad (1.3.a)$$

$$jx = \frac{\rho - \rho^*}{|1-\rho|^2} \qquad (1.3.b)$$

dalla (1.3.a) e' allora possibile riscrivere

$(1-\rho^*) \cdot (1-\rho) \cdot r = 1-\rho^* \rho$

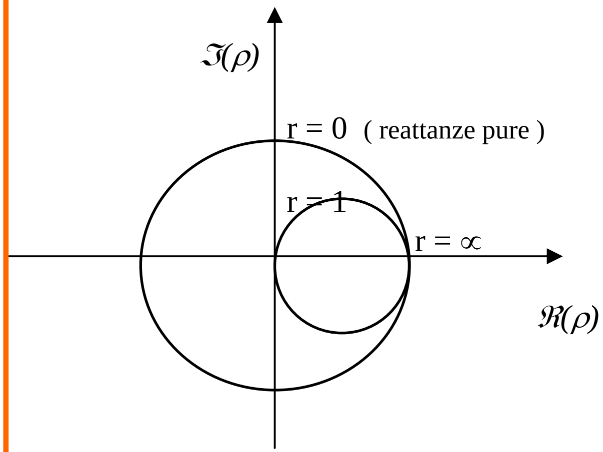
$(1-\rho-\rho^*+\rho^* \rho) \cdot r = 1-\rho^* \rho$

$(r+1)\cdot \rho\rho^{*} + r - 1 - \rho^{*}\cdot r - \rho\cdot r = 0$

$$\rho\cdot\rho^{*} - \frac{r}{r+1}\cdot\rho - \frac{r}{r+1}\cdot\rho^{*} + \frac{r-1}{r+1} = 0 \qquad (1.4)$$

Confrontando tale equazione con l'equazione della circonferenza nel piano complesso (vedi premessa) e' immediato verificare che la (1.4) rappresenta una circonferenza di centro $w_0 = r / (r+1)$ e raggio $R = 1 / (r+1)$. In sostanza,

nel piano complesso {$\Re(\rho)$, $\Im(\rho)$}le impedenze normalizzate z_n aventi r costante sono rappresentate da circonferenze di centro nel punto $\left(\frac{r}{r+1}, 0\right)$ *e raggio* $R = \frac{1}{r+1}$



Tutte le impedenza (normalizzate) passive (r > 0) sono contenute nella cfr r = 0.

Per ottenere invece il luogo geometrico dei punti del piano complesso corrispondenti ad impedenze normalizzate aventi x = costante, e' sufficiente procedere in maniera analoga a partire dalla (1.3.b)

$jx\cdot(1-\rho)\cdot(1-\rho^{*}) = \rho - \rho^{*}$

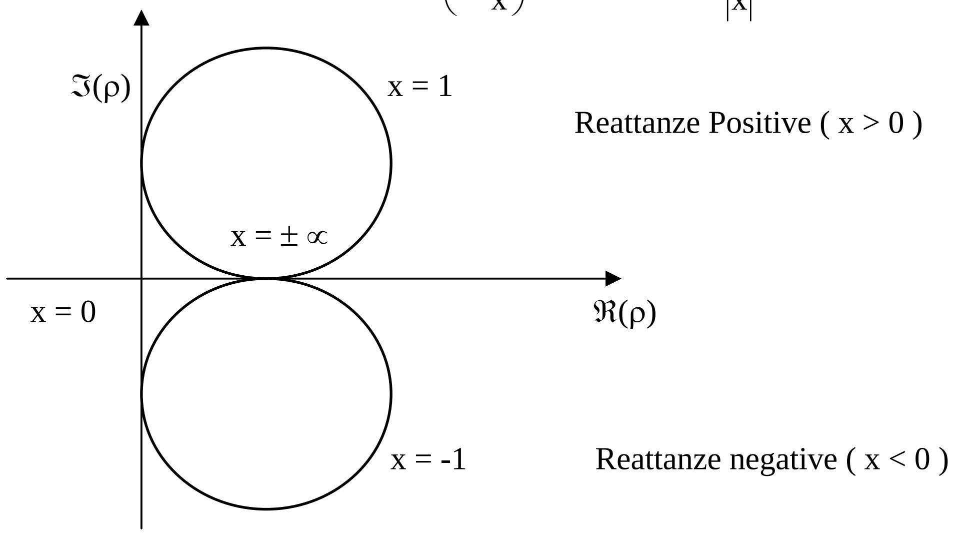
$jx\cdot(\rho\rho^{*} + 1 - \rho - \rho^{*}) = \rho - \rho^{*}$

$jx\cdot\rho\rho^{*} - jx\cdot\rho - jx\cdot\rho^{*} + jx = \rho - \rho^{*}$

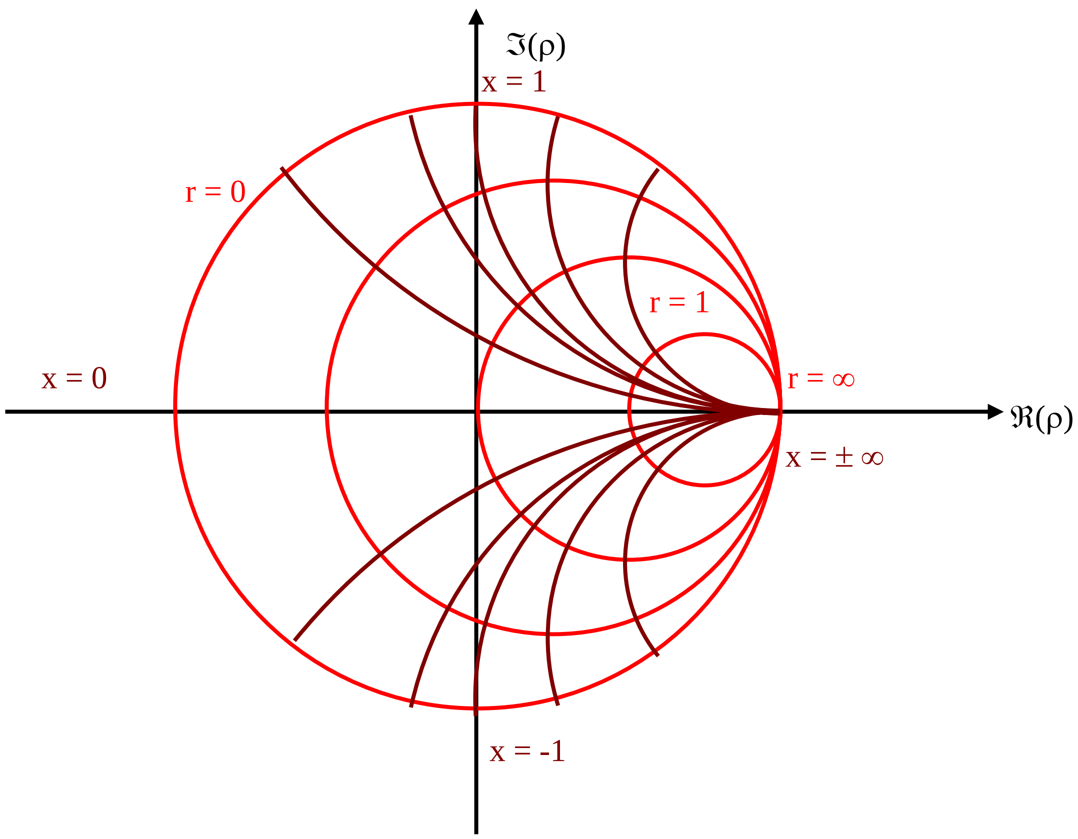
$jx\cdot\rho\rho^{*} - (1+jx)\cdot\rho + (1-jx)\cdot\rho^{*} + jx = 0$

$$\rho\cdot\rho^{*} - \frac{1+jx}{jx}\cdot\rho - \frac{jx-1}{jx}\cdot\rho^{*} + 1 = 0 \qquad (1.5)$$

che rappresenta l'equazione di una circonferenza di centro $w_0 = (jx - 1) / jx = 1 + j / x$ e raggio $R = 1 / |x|$. Quindi, *nel piano complesso {$\Re(\rho)$, $\Im(\rho)$}le impedenze normalizzate z_n aventi x costante sono rappresentate da circonferenze di centro nel punto* $\left(1, \frac{1}{x}\right)$ *e raggio* $R = \frac{1}{|x|}$

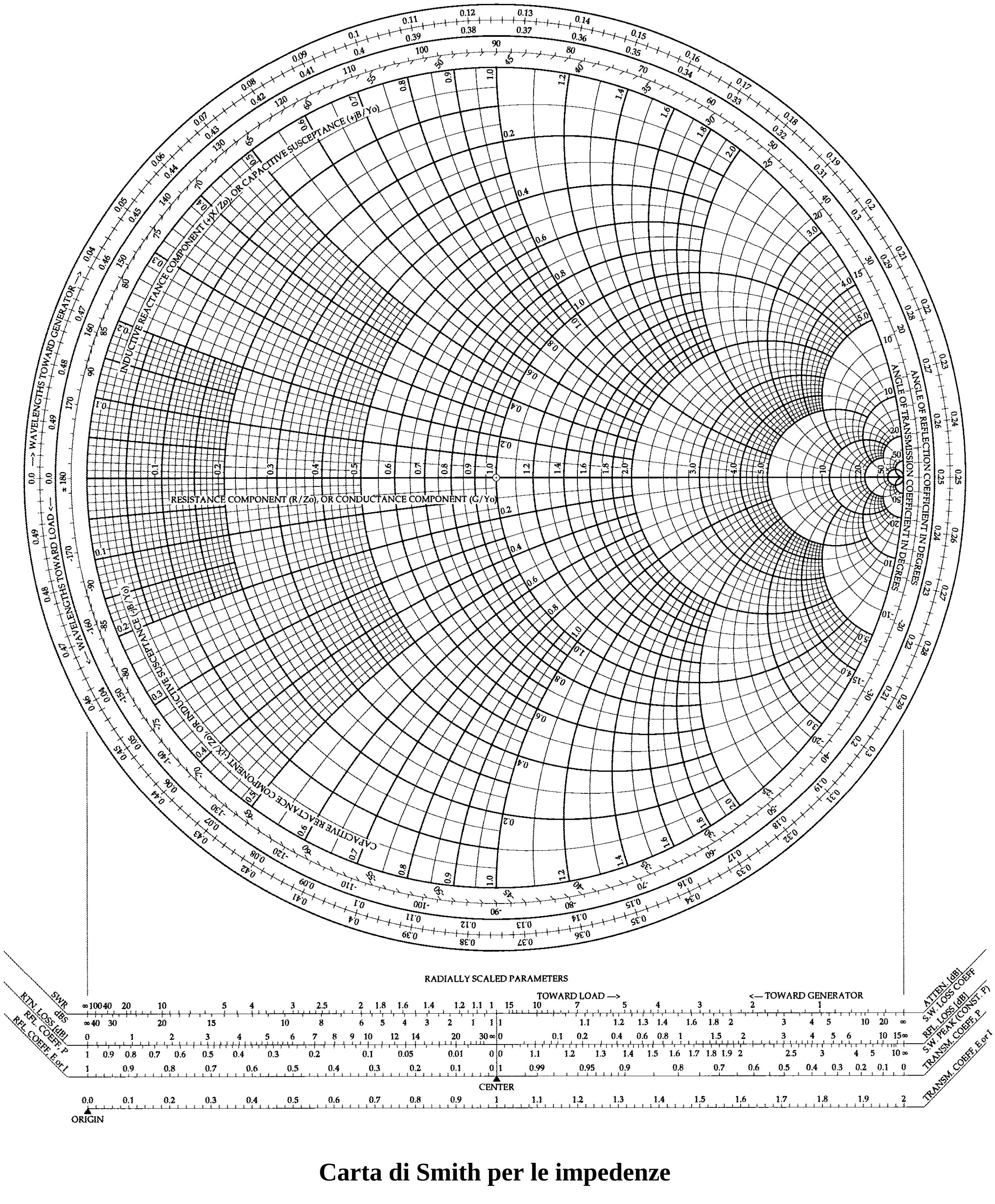


Riportando in un unico grafico le circonferenze a r costante e quelle a x costante, per vari valori di r e x, si ottiene la cosiddetta **carta di Smith per le impedenze**, usualmente limitata alla parte interna della circonferenza r = 0.



The Complete Smith Chart

Black Magic Design



Carta di Smith per le impedenze

OSSERVAZIONI:

- Il punto $\rho = 1$ e' individuato dall'intersezione fra la circonferenza $r = \propto$ e quella $x = \propto$; viene pertanto indicato come *punto di circuito aperto*.
  Analogamente il punto $\rho = -1$ e' individuato dall'intersezione fra la circonferenza $r = 0$ e quella $x = 0$; viene pertanto indicato come *punto di corto circuito*.

- Ricordando che in assenza di perdite

  $$\rho(z) = \rho_L \cdot e^{2j\beta z}$$

  e' immediato osservare che se dalla sezione z_1 ci si sposta *verso il carico* fino alla sezione $z_2 = z_1 + \Delta z$, allora

  $$\rho(z_2) = \rho_L \cdot e^{2j\beta z_2} = \rho_L \cdot e^{2j\beta(z_1+\Delta z)} = \rho_L \cdot e^{2j\beta z_1} \cdot e^{2j\beta\Delta z} = \rho(z_1) \cdot e^{2j\beta\Delta z}$$

  essendo $\Delta z > 0$, *la moltiplicazione per il termine* $e^{2j\beta\Delta z}$ *equivale nel piano complesso ad una rotazione in senso* <u>*antiorario*</u> *di un angolo* $\theta = 2\beta\cdot\Delta = 4\pi\cdot\Delta z / \lambda$.
  Analogamente e' immediato verificare che ad uno *spostamento di* Δz *lungo la linea verso la sorgente corrisponde nel piano complesso ad una rotazione in senso* <u>*orario*</u> *di un angolo* $\theta = 2\beta\cdot\Delta = 4\pi\cdot|\Delta z| / \lambda$. Riassumendo,

Spostamento di Δz verso il carico	$\Leftrightarrow$	rotazione **antioraria** di $\theta = \frac{4\pi}{\lambda}\cdot\Delta z$
Spostamento di Δz verso la sorgente	$\Leftrightarrow$	rotazione **oraria** di $\theta = \frac{4\pi}{\lambda}\cdot\|\Delta z\|$

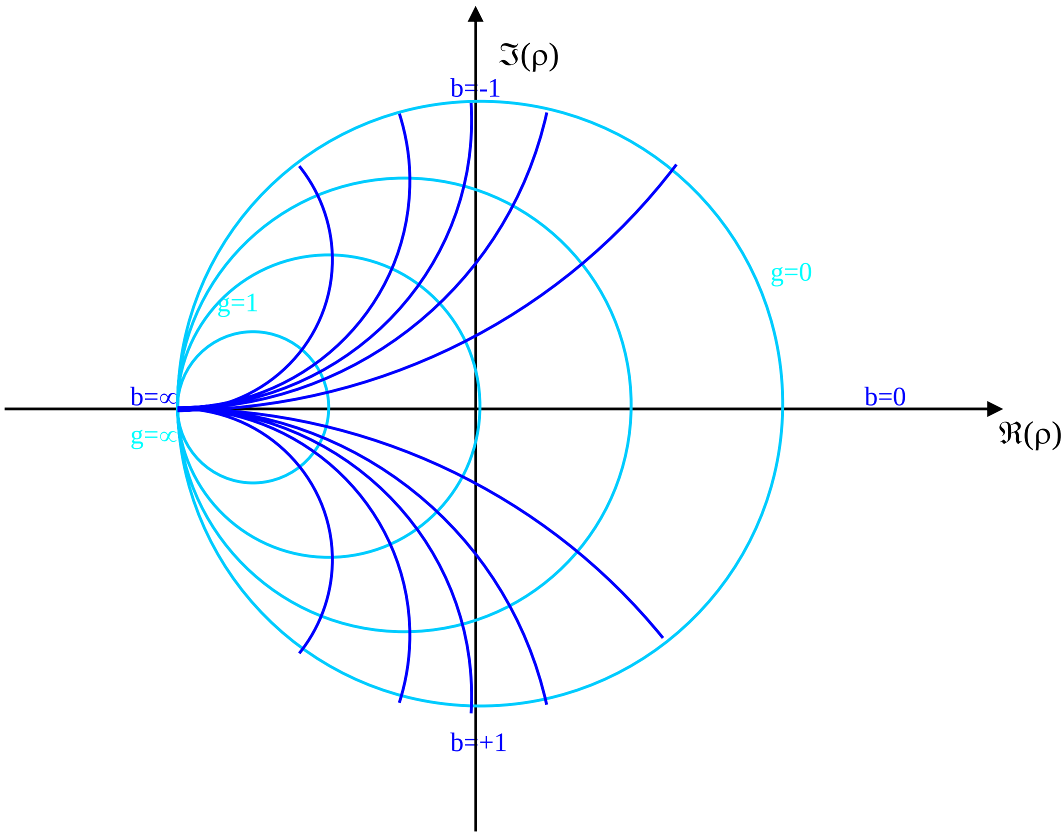
- Senza alcuna difficolta' e' possibile definire

  $$\text{Ammettenza normalizzata sulla sezione } z: \quad y_n(z) = g(z) + jb(z) = \frac{1}{z_n(z)}$$

  ed osservare che

  $$y_n = \frac{1}{1+\rho \big/ 1-\rho} = \frac{1-\rho}{1+\rho} \qquad \Rightarrow \qquad y_n(\rho) = z_n(-\rho) \qquad (1.6)$$

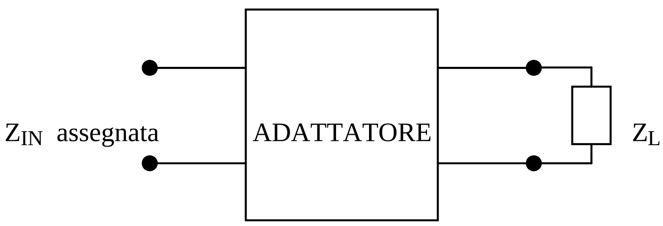
  Tale risultato permette di affermare che la **carta di Smith per le ammettenze** si ottiene per *simmetria rispetto all'origine* da quella per le impedenze.



2. Adattatori di impedenza

Una linea di trasmissione serve, come è stato ampiamente argomentato, per portare un segnale, e quindi potenza, dalla sorgente di campo all'inizio della linea al carico (rappresentato dall'*impedenza di carico* Z_L), mediante la propagazione di onde elettromagnetiche lungo l'asse della struttura.
Il fenomeno della riflessione al carico è pertanto usualmente indesiderato, poiché la potenza riflessa, non essendo assorbita dal carico, è stata evidentemente "spesa" inutilmente dalla sorgente; in quest'ottica risulta quindi di fondamentale importanza la *condizione di adattamento in uniformità* che assicura che il carico assorba tutta la potenza ricevuta (senza cioè alcuno "spreco").
E' stato tuttavia dimostrato che *condizione necessaria e sufficiente perché la linea sia adattata (in uniformità) è che l'impedenza di carico coincida con l'impedenza caratteristica della linea, cioè* $Z_L = Z_C$. Tale importante condizione non risulta però automaticamente verificata poiché ogni possibile carico è caratterizzato da una diversa impedenza Z_L e non è ovviamente pensabile di realizzare una linea di trasmissione "ad hoc" (cioè con l'adeguato valore di Z_C) per ogni possibile valore di Z_L.

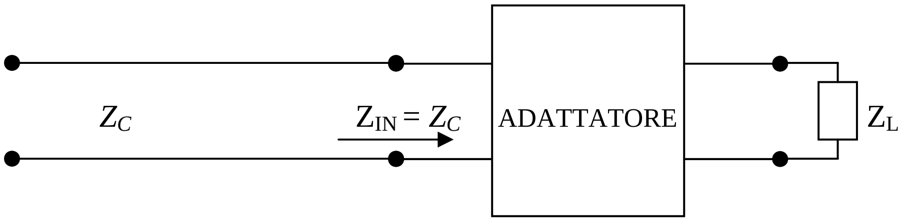
Quando $Z_L \neq Z_C$ è comunque possibile ottenere la condizione di adattamento utilizzando un opportuno **adattatore di impedenza**. Con tale termine si indica **un quadripolo passivo (tipicamente senza perdite) tale che, collegati i morsetti di uscita con un carico di impedenza Z_L, l'impedenza sui morsetti di ingresso assuma un prefissato valore.**



Si tratta cioè di un
Trasformatore di impedenza

Dato allora un carico Z_L collegato alla sorgente per mezzo di una linea di trasmissione di impedenza caratteristica Z_C ($\neq Z_L$), *per ottenere adattamento in uniformità occorre interporre fra linea e carico un opportuno adattatore di impedenza tale che dai suoi morsetti di ingresso si veda una impedenza uguale a* Z_C.

NO ADATTAMENTO



ADATTAMENTO

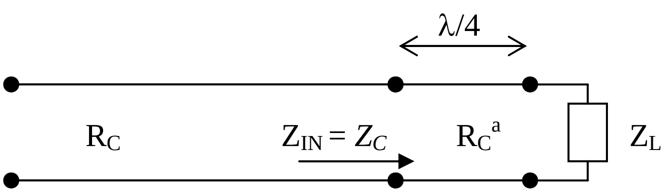
2.1 Adattatore a quarto d'onda (a λ/4)

Abbiamo già visto che un tronco di linea *privo di perdite* di lunghezza λ/4 chiuso su di un carico generico Z_L si comporta da invertitore di impedenza, cioè presenta una impedenza ai morsetti di ingresso

$$Z_{IN} = Z_{IN}\left(-\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{R_C^2}{Z_L}$$

Tornando al problema dell'adattamento, è allora immediato osservare che *se il carico è <u>puramente resistivo</u>* ($Z_L = R_L$) e *se la linea di trasmissione è priva di perdite* ($Z_C = R_C$), è possibile ottenere adattamento in uniformità interponendo fra linea e carico un elemento di linea di lunghezza λ/4 e privo di perdite realizzato in maniera tale che la sua resistenza caratteristica R_C^a soddisfi alla seguente relazione:

$$R_C = Z_{IN}\left(-\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{\left(R_C^a\right)^2}{R_L} = \frac{\left[\sqrt{L_a/C_a}\right]^2}{R_L} = \frac{L_a/C_a}{R_L} \qquad (2.1)$$

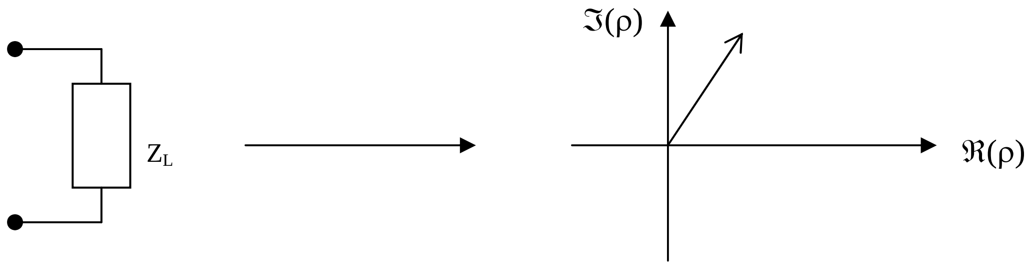


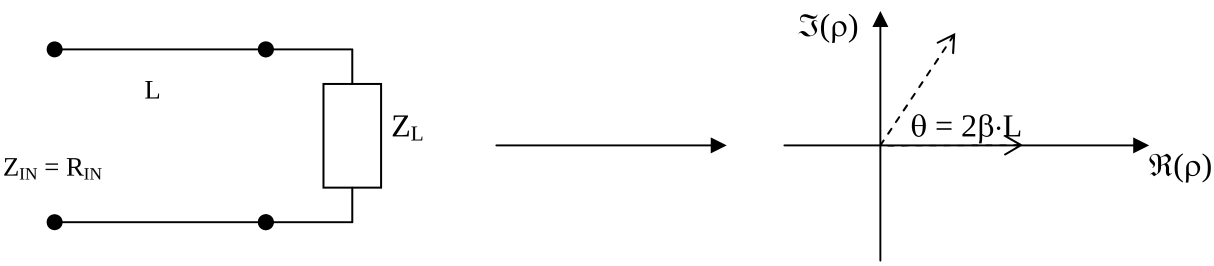
Tale elemento di linea di lunghezza λ/4 interposto fra linea e carico è perciò detto **adattatore a λ/4.**

Si osservi tuttavia che se il carico non è puramente resistivo oppure la linea di trasmissione ha perdite non nulle, allora la condizione di adattamento non è più perseguibile utilizzando solo un semplice adattatore a quarto d'onda. In tal caso, infatti, dalla (2.1) si ottiene che $(R_C^a)^2$ dovrebbe uguagliare un numero complesso, il che è impossibile essendo l'adattatore per ipotesi privo di perdite.
Nel caso in cui il carico non fosse puramente resistivo e la linea di trasmissione non fosse priva di perdite, allora l'adattamento sarebbe possibile solo per quei particolari valori complessi di Z_C e Z_L per cui $Z_C \cdot Z_L \in \mathbb{R}$.
Si può concludere pertanto che *l'adattatore a λ/4 è un adattatore completo solo per carichi resistivi e linee prive di perdite*.

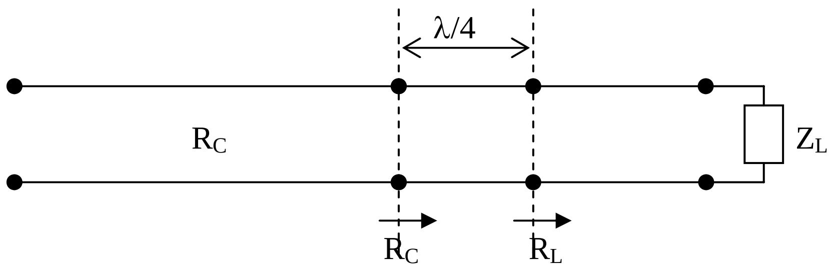
<u>OSSERVAZIONE</u>: se il carico non è puramente resistivo, è tuttavia possibile ottenere adattamento in uniformità utilizzando un adattatore a λ/4 , a patto di adottare alcuni accorgimenti:

- A volte è possibile aggiungere *in serie* al carico una pura reattanza $Z = -jX_L$, in modo da ottenere complessivamente un bipolo puramente resistivo, e poter procedere quindi all'adattamento mediante l'adattatore a λ/4;
- Ricordando che ad uno spostamento verso la sorgente (allontanandosi, quindi, dal carico) corrisponde sulla carta di Smith una opportuna rotazione oraria, si può certamente pensare di anteporre al carico un tratto di linea avente lunghezza tale da corrispondere, sulla carta di Smith, ad una rotazione che porti il vettore ρ sull'asse reale.



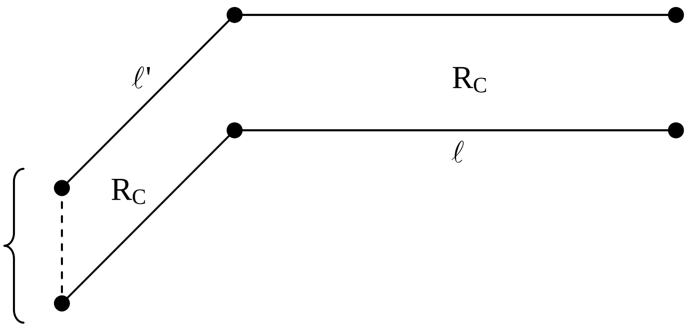


Poiché a valore reale di ρ corrisponde valore reale dell'impedenza normalizzata, ne segue che l'impedenza ai morsetti di ingresso dell'elemento di linea introdotto a monte del carico risulta essere reale, e quindi puramente resistiva. E' allora possibile procedere all'adattamento mediante adattatore a quarto d'onda.

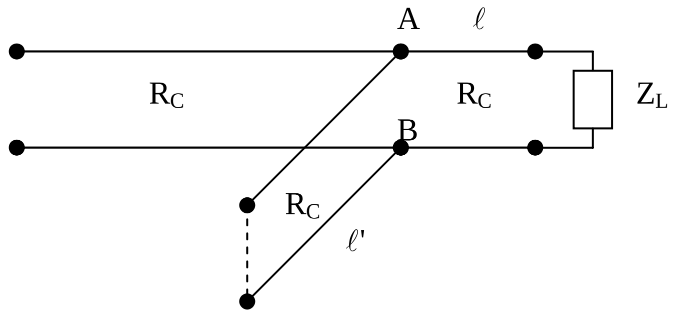


2.2 Adattatore a *stub*

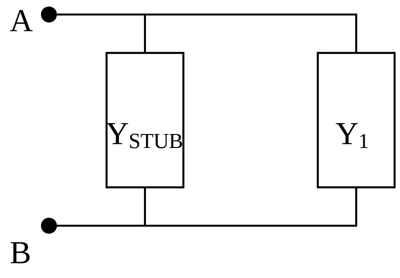
E' costituito da un elemento di linea di lunghezza ℓ, privo di perdite e di impedenza caratteristica R_C al quale e' connesso in parallelo, sulla sezione di ingresso, uno stub (cioe' un tronco di linea) di lunghezza ℓ' privo di perdite ed uguale impedenza caratteristica R_C. Lo stub puo' essere indifferentemente *aperto* o *cortocircuitato*.



Una linea adattata per mezzo di un adattatore a stub si schematizza quindi come segue:



Da un punto di vista circuitale, dai morsetti di uscita della linea (sezione A-B) si vede il parallelo di due ammettenze, una relativa allo stub (Y_{STUB}), l'altra relativa all'elemento di linea chiuso sul carico (Y_1); risulta cioe':

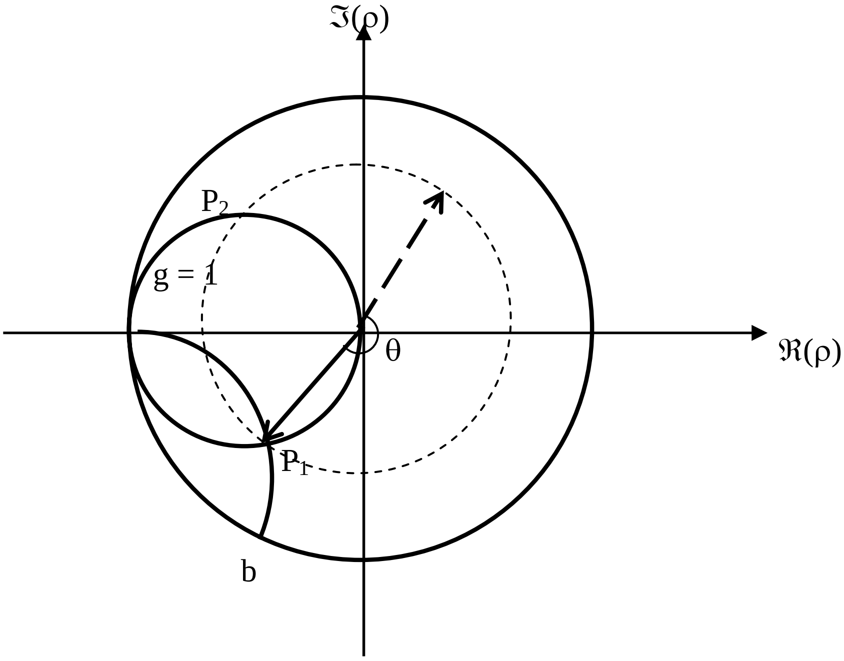


$$Y_{AB}(\ell', \ell, Y_L) = Y_{STUB}(\ell') + Y_1(\ell, Y_L)$$

Per ottenere adattamento occorre quindi dimensionare l'adattatore (scegliere cioe' i valori di ℓ e di ℓ') in modo da ottenere $Y_{AB} = Y_C$.

Per far questo e' indispensabile fare riferimento alla carta di Smith per le ammettenze.

Assegnato il carico normalizzato $y_n(0) = Y_L/Y_C$ e' possibile individuare il corrispondente punto sulla carta di Smith per le ammettenze. *Il valore da assegnare a ℓ e' quello corrispondente alla rotazione (ovviamente oraria) che porta il vettore associato all'ammettenza normalizzata sulla circonferenza g* = 1.



Misurato cioe' l'angolo θ, il valore di ℓ viene cioe' determinato dalla relazione:

$$|\theta| = 2 \cdot \beta \cdot \ell = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot \ell \qquad \Rightarrow \qquad \ell = \frac{\lambda \cdot |\theta|}{4\pi} \tag{2.2}$$

In virtu' di tale scelta l'ammettenza normalizzata y_1 ha certamente conduttanza uguale a 1 (proprio perche' il vettore associato giace sulla circonferenza g=1), cioe'

$y_1 = 1 + j \cdot b$

dove il valore di b deve essere ricavato sulla carta di Smith dalla circonferenza a suscettanza costante passante per P_1 (b > 0). *Tale suscettanza deve essere allora annullata dallo stub, perche' sia y_{AB} = 1, che rappresenta la condizione di adattamento in termini di ammettenza normalizzata.* Poiche' lo stub per definizione e' aperto o cortocircuitato, l'ammettenza ai morsetti di ingresso e' una pura suscettanza, cioe:

$$y_{STUB}(\ell') = y_n(-\ell') = j \cdot tg(\beta \cdot \ell') \qquad \text{se aperto}$$
$$y_{STUB}(\ell') = y_n(-\ell') = -j \cdot \cot g(\beta \cdot \ell') \qquad \text{se cortocircuitato}$$

Risulta pertanto

$$y_{AB} = y_1 + y_{STUB} = 1 + jb + jb_{STUB}$$

che ritorna valore 1 solo se b_{STUB} = -b. La condizione per determinare il valore di ℓ' e' quindi

$\mathrm{tg}(\beta \cdot \ell') = -b$ (se STUB aperto)

$\mathrm{cotg}(\beta \cdot \ell') = b$ (se STUB cortocircuitato)

OSSERVAZIONE: Si e' detto che il valore di ℓ viene determinato ruotando il vettore associato all'ammettenza di carico normalizzata fino a portarlo sulla circonferenza g = 1. E' evidente che esistono sempre due distinte possibilita' per ottenere tale risultato, indicate con P_1 e P_2 sulla figura precedente. Tali situazioni sono entrambe corrette e alternative. Cambiando l'angolo di rotazione, cambia ovviamente il valore di ℓ; poiche' varia anche il valore di b (da positivo a negativo, o viceversa), cambia di conseguenza anche il valore di ℓ'.