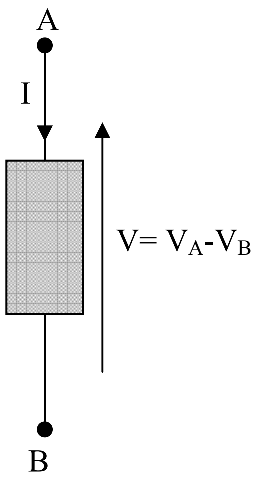
RICHIAMI di TEORIA dei CIRCUITI e LEGAMI con le EQUAZIONI di MAXWELL

Il concetto di *circuito elettrico* è senza dubbio ben noto da un punto di vista intuitivo; ciononostante non è ovvio darne una definizione chiara e rigorosa. Fra le molte possibili, si farà riferimento alla seguente:

Definizione di CIRCUITO: sistema elettromagnetico nel quale si possono distinguere più componenti diversi, caratterizzati ciascuno da un proprio comportamento individuale, collegati insieme a costituire un insieme più complesso, e quindi reciprocamente vincolati a rispettare determinate condizioni.

I componenti più semplici e largamente utilizzati per la realizzazione di circuiti complessi sono i *bipoli* (o *componenti bipolari*), caratterizzati da 2 soli *punti di contatto* (o *morsetti*) per il collegamento esterno con gli altri componenti.

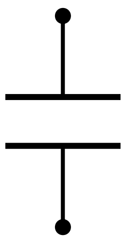


Come noto, il comportamento individuale di ogni singolo bipolo è descritto formalmente da una relazione fra tensione ai morsetti V e corrente I (*relazione costitutiva*):

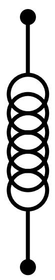
$$V = f(I)$$
$$I = g(V)$$

Esempi:

RESISTORE: $V = R\,I$



CONDENSATORE: $I = C\,dV/dt$



INDUTTORE: $V = L\,dI/dt$

Essendo un circuito elettrico un sistema elettromagnetico, per esso devono valere sempre e comunque le *equazioni di Maxwell*; è dunque certamente possibile, dato un circuito elettrico e relative sorgenti (*generatori*), calcolare le grandezze circuitali di interesse (correnti, differenze di potenziale, potenze assorbite ed erogate, ecc.) risolvendo le equazioni di Maxwell per il sistema di volta in volta assegnato.
E' noto tuttavia che le leggi usualmente utilizzate per "risolvere" un circuito (per calcolare cioè le grandezze circuitali di interesse) sono le (ben note) *leggi di Kirchoff, di Ohm*, ecc.
Deve allora essere possibile ricavare le leggi alla base della teoria dei circuiti a partire dalle equazioni di Maxwell. Vediamo *come* e *quando*.

- **Caso STAZIONARIO**: un circuito si dice in condizioni stazionarie quando le grandezze elettromagnetiche macroscopiche sono costanti nel tempo $\Rightarrow$ nelle equazioni di Maxwell si annullano evidentemente tutte le derivate temporali.

  In particolare dall'equazione di continuità

  $$\operatorname{div}\mathbf{J} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = \oint_S \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{i}}_n \, dS = \sum_k I_k$$

  applicando il teorema di Gauss e ricordando che per definizione il flusso di **J** attraverso una superficie rappresenta la corrente che attraversa la superficie stessa. Il risultato così facilmente ricavato dall'equazione di continuità (e dunque dalle equazioni di Maxwell) rappresenta evidentemente la *1ª legge di Kirchhoff* ("in ciascun nodo di un circuito elettrico è nulla la somma delle correnti che confluiscono al nodo stesso").

  Analogamente dall'equazione $\nabla\times\mathbf{E} = 0$ segue che, essendo il campo elettrico *conservativo,*

  $$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \qquad \Rightarrow \qquad 0 = \oint_\ell \mathbf{E}\cdot d\vec{\ell} = \sum_k V_k$$

  ottenendo così la *2ª legge di Kirchhoff* ("in ciascuna maglia di un circuito elettrico, la somma delle cadute di potenziale relative ai rami che la compongono e' uguale a zero").

  Come è evidente, in condizioni stazionarie leggi di Kirchhoff non sono altro che le equazioni di Maxwell riscritte in funzione delle grandezze tipicamente circuitali (tensioni e correnti).

  OSSERVAZIONE: in un circuito in condizioni stazionarie le cariche elettriche non sono necessariamente ferme; tuttavia se si muovono lo fanno in maniera tale che se carica esce dal volume dV nel tempo dt, altrettanta ne entra. Ciò significa, in concreto, che possono esserci sergenti (generatori), ma solo in "continua", ossia tempo invarianti.
  L'assenza di variazioni temporali comporta implica ovviamente che in condizioni stazionarie un *condensatore* equivale ad un *circuito aperto*, un *induttore* ad un *cortocircuito*.

- **Caso NON STAZIONARIO**: se non si possono annullare le derivate temporali nelle equazioni di Maxwell (e dunque in presenza di *sorgenti tempo-varianti*), allora

  a) $$\nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla\cdot\left(\mathbf{J} + \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) = 0$$

  b) $$\nabla\cdot\left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$

A partire da tali relazioni, è evidentemente possibile ripetere i procedimenti visti nel caso stazionario, ma i risultati in questo caso sarebbero ovviamente differenti. In conclusione, *in regime NON stazionario, NON valgono le leggi di Kirchhoff.*

- **Caso QUASI-STAZIONARIO**:
  Si tratta di un particolare caso NON stazionario (governato quindi a rigore dalle equazioni a) e b)) in cui valgono però le seguenti due condizioni:

1. In tutti i punti in cui $\mathbf{J} \neq 0 \Rightarrow \left|\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right| << |\mathbf{J}|$
2. In tutti i punti in cui $\mathbf{E} \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right| << |\mathbf{E}|$

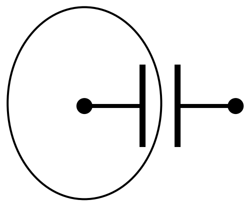
La condizione 1. permette ovviamente di trascurare il termine $\partial\mathbf{E}/\partial t$ rispetto a $\mathbf{J}$ nei punti in cui $\mathbf{J}\neq 0$. Poiché nelle regioni in cui $\mathbf{J}=0$ vale ovviamente div $\mathbf{J}$ = 0, dalla 1. segue che in un circuito in condizioni quasi stazionarie è sempre possibile scrivere div $\mathbf{J} \approx 0$.
Analogamente, dalla condizione 2. segue che in un circuito in condizioni quasi stazionarie è sempre possibile scrivere rot $\mathbf{E} \approx 0$.
Valgono cioè con buona approssimazione le relazioni che caratterizzano il regime rigorosamente stazionario; come in tal caso, allora, *anche in regime quasi-stazionario valgono (seppur non rigorosamente) le leggi di Kirchhoff.*

La possibilita di trascurare, di fatto, le derivate temporali significa implicitamente che *le variazioni temporali delle forze impresse (cioè dei generatori) si propagano istantaneamente in tutti i punti del circuito.*
Ciò significa, ad esempio, che se la corrente I entrante in una generica superficie chiusa S subisce una variazione ΔI, istantaneamente analoga variazione si osserva nella corrente uscente, in modo che la carica elettrica contenuta entro la sup. S resti costante nel tempo.
Detto altrimenti, ciò significa che il periodo di oscillazione delle sorgenti T, cioè il tempo in cui le grandezze elettriche variano sensibilmente, deve essere molto maggiore del tempo che impiega l'onda elettromagnetica a propagarsi fra 2 qualunque punti del circuito.
Detta quindi r_{max} la massima distanza fra 2 punti del circuito, ciò significa

$$\boxed{\text{Regime QUASI-STAZIONARIO} \quad \Leftrightarrow \quad T >> \frac{r_{max}}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad r_{max} << \lambda}$$

che rappresenta di certo una condizione più sintetica e facilmente verificabile delle 1. e 2.

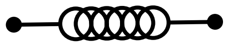
OSSERVAZIONE: si consideri una superficie S passante attraverso le armature di un condensatore
All'interno delle armature risulta $\mathbf{J}$ = 0 (e quindi div $\mathbf{J}$ = 0) nell'ipotesi di dielettrico perfetto e dunque fra le armature non c'e' ovviamente corrente di conduzione. All'interno delle armature tuttavia non vale la condizione 1. e dunque dalla a) segue div ($\varepsilon\, \partial\mathbf{E}/\partial t$)=0.



Il flusso del vettore $\varepsilon\, \partial\mathbf{E}/\partial t$ attraverso la porzione di superficie contenuta fra le armature non e' dunque nullo. Cosa rappresenta? Non una corrente in senso stretto, ma *equivale effettivamente ad una corrente*. In regime quasi stazionario infatti, le grandezze sono comunque tempo varianti, e le variazioni temporali di tensioni e correnti comportano ovviamente, nel caso specifico del condensatore, variazioni temporali della carica accumulata sulle armature. Ma poiché *una variazione di carica ΔQ su una delle armature induce una variazione $-\Delta Q$ sull'altra, e' evidente che ciò equivale ad una corrente che attraversa il condensatore.*

Tale corrente “equivalente” viene descritta dal vettore $\varepsilon\, \partial\mathbf{E}/\partial t$, non a caso usualmente indicato con $\mathbf{J}_s$ e chiamato *densità di corrente di spostamento*. In conclusione, in regime quasi-stazionario un condensatore non equivale ad un circuito aperto (diversamente da quanto visto nel caso strettamente stazionario).

Analogamente si consideri un induttore. Al suo interno risulta $\mathbf{E}$=0 (e dunque rot $\mathbf{E}$ = 0) nell’ipotesi di conduttore elettrico perfetto, il che potrebbe far pensare che la caduta di potenziale ai suoi capi valga zero.
In realta’ occorre considerare che all’interno di un induttore non vale la condizione 2. E dunque:



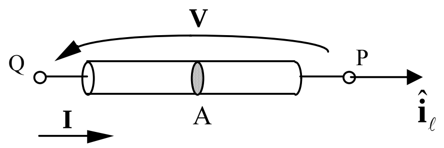
$$\nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi \;\xrightarrow[\mathbf{E}=0]{}\; \nabla\Phi = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Con sorgenti tempovarianti (e dunque anche in regime quasi-stazionario) occorre considerare che *variazioni di potenziale elettrico* non sono sempre necessariamente dovute alla presenza di un campo elettrico, ma *possono essere determinate anche da campi magnetici tempovarianti* (e quindi potenziale vettore magnetico tempovariante). In conclusione, in regime quasi-stazionario un induttore non equivale ad un cortocircuito (diversamente da quanto visto nel caso strettamente stazionario).

Chiarite le caratteristiche dei diversi regimi temporali, torniamo in conclusione ai bipoli considerati inizialmente, sviluppando nel seguito alcune considerazioni sulle relazioni costitutive e sui parametri caratteristici.

Resistenza

Si supponga di avere un resistore ideale, formato da un tratto di materiale a conducibilità finita ed area trasversale A così piccola da potere supporre $\mathbf{J}_C$ costante su una sezione.



Ricordando che per definizione di potenziale

$$V = \Phi(Q) - \Phi(P) = \int_Q^P \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_Q^P \frac{\mathbf{J}_c}{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell \, d\ell$$

e poiché evidentemente

$$\mathbf{J}_c = \frac{I}{A} \hat{\mathbf{i}}_\ell ; \qquad I: \text{corrente totale}$$

allora

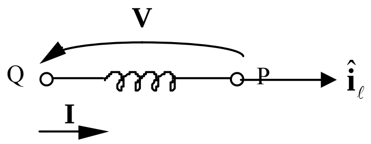
$$V = \int_Q^P \frac{I}{A \cdot \sigma} d\ell = I \cdot \int_Q^P \frac{1}{A \cdot \sigma} d\ell = I \cdot R \qquad \textit{1}^a \textit{ legge di Ohm}$$

dove $R \equiv \int_Q^P \frac{1}{A \cdot \sigma} d\ell$ *resistenza* $[\Omega]$

Se σ costante lungo il resistore si ottiene la cosiddetta *2ª legge di Ohm*

$$R = \frac{\ell}{\sigma \cdot A} \qquad \ell \text{ lunghezza del resistore, A area della sezione del resistore, } \sigma \text{ conducibilita'} [\Omega^{-1} \cdot m^{-1}]$$

Induttanza
Si consideri un induttore ideale realizzato tramite un pezzo di filo ideale ed avente geometria qualsiasi.



Come già visto risulta ora:

$$\nabla\Phi = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

e dunque

$$V = \Phi(Q) - \Phi(P) = \int_P^Q \nabla\Phi \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell \, d\ell = \int_Q^P \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell \, d\ell = \frac{\partial}{\partial t}\int_Q^P \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell \, d\ell = \frac{d}{dt}(LI) = L\frac{dI}{dt}$$

a patto di porre

$$L \equiv \frac{\int_Q^P \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell \, d\ell}{I}$$

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che l'induttanza, per la sua definizione, risulta indipendente dal tempo perché l'integrale al numeratore risulta, istante per istante, proporzionale alla corrente che sta al denominatore.

Si osservi che, qualora risulti $\frac{dI}{dt} \equiv 0$, si ha $V \equiv 0$. Ciò conferma il fatto che, come già detto in precedenza, nel caso strettamente stazionario l'induttore equivale ad un cortocircuito.

Si consideri ora una linea che, rimanendo all'esterno dell'induttore, colleghi i morsetti P e Q formando con l'induttore stesso un percorso chiuso. Poiché esternamente all'induttore non c'e' campo magnetico, e' possibile estendere l'integrale di linea a tutto il percorso chiuso cosi' formato, e dunque

$$L \equiv \frac{\oint_\ell \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell \, d\ell}{I} = \frac{\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS}{I} = \frac{\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS}{I} = \frac{\Psi}{I}$$

dove Ψ rappresenta *il flusso di induzione magnetica concatenato con l'induttore*. L'induttanza è quindi il rapporto fra il flusso di induzione magnetica e corrente.

Capacità
Si ha, ovviamente:

$$V = \int_P^Q \nabla\Phi \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell d\ell = -\int_Q^P \nabla\Phi \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell d\ell = -(\Phi(P) - \Phi(Q)) = \Phi(Q) - \Phi(P)$$

Per poter studiare la regione capacitiva da un punto di vista circuitale, è necessario però ricavare un legame fra la tensione ai capi del componente e la corrente elettrica che fluisce ai morsetti, come si è fatto per gli altri componenti circuitali.
Al generico istante *t*, si avrà una carica Q su un'armatura e -Q sull'altra. Si può mostrare facilmente che Q è sempre proporzionale alla differenza di potenziale fra le armature. Sia 1/C la costante di proporzionalità. Si pone allora:

$$V = \Phi(Q) - \Phi(P) \underline{\underline{\Delta}} \frac{Q}{C} = \frac{\int I(t)\,dt}{C} \quad ; \quad C \ \textit{capacità}$$

che coincide esattamente con la usuale definizione di capacità. La capacità C è una costante che dipende unicamente dalle caratteristiche geometriche della regione che è sede dell'accumulo di carica elettrica.

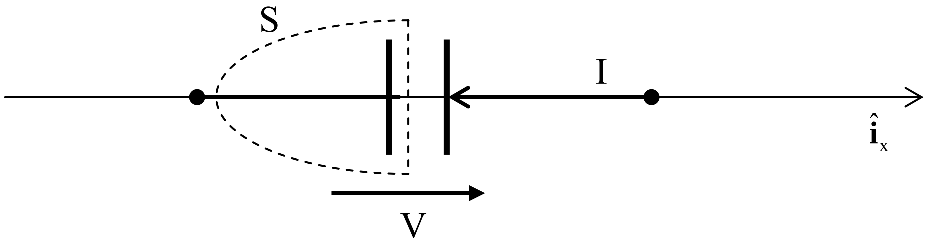
Derivando ambo i membri della formula appena scritta, si ottiene un'espressione alternativa per il legame fra tensione e corrente:

$$I = C\,\frac{dV}{dt}$$

Si osservi che, qualora risulti $\frac{dV}{dt} \equiv 0$, si ha $I \equiv 0$. Ciò conferma il fatto che, come già detto in precedenza, nel caso strettamente stazionario il condensatore equivale ad un circuito aperto.

A titolo di esempio, ricaviamo ora l'espressione della capacità C in un caso tipico.

Si consideri un condensatore ideale formato da due armature piane e parallele, alla distanza d e aventi superficie A:



Si consideri allora la superficie chiusa S rappresentata in figura. Dalla a)

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = \oint_S \left(\mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS = \oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS + \oint_S \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS$$

il primo integrale rappresenta ovviamente la corrente di conduzione I che attraversa il bipolo; il secondo integrale, che rappresenta la corrente di spostamento, può essere calcolato osservando che all'interno del condensatore $\mathbf{E}= -V/d\ \mathbf{i}_x$ e che sulla porzione di superficie in cui la corrente di spostamento non e' nulla vale, per costruzione, $\mathbf{i}_n=\mathbf{i}_x$; pertanto

$$\oint_S \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_S \frac{V\varepsilon}{d} dS = -\frac{A\varepsilon}{d}\frac{\partial V}{\partial t}$$

e quindi:

$$I = \frac{A\varepsilon}{d}\frac{\partial V}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{A\varepsilon}{d}$$