B.3 L'approssimazione quasi stazionaria

Si parla di campi quasi stazionari per indicare campi che non sono strettamente stazionari, ma per i quali le variazioni nel tempo non giocano un ruolo primario. Si tratta di un'approssimazione, perciò è necessario capire quando e per quali sistemi sia lecito procedere in questo modo e come studiare i sistemi che lavorano in condizioni quasi stazionarie.

Consideriamo le equazioni fondamentali:

- equazioni di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathrm{t}} + \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_i$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- equazione di continuità

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- relazioni costitutive

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$$

E' ovvio che i campi strettamente stazionari sono governati dalle equazioni che si ottengono eliminando le derivate temporali nelle relazioni sopra citate. Per i campi quasi stazionari si procede invece eliminando solamente alcune delle derivate temporali, resta da specificare quali.

Tutte le volte che il sistema che si considera può essere separato in due parti di tipo diverso, tali che in una delle due parti si possa annullare (trascurare) la derivata temporale dell'induzione magnetica **B,** e nell'altra si possa invece annullare (trascurare) la derivata temporale dell'induzione elettrica **D**, il sistema può essere considerato quasi stazionario. L'***elettrodinamica quasi stazionaria*** è caratterizzata dalla possibilità di individuare, a priori, le regioni ove è importante tener conto della derivata di una grandezza e le regioni ove non si commette errore grave a trascurarla.

Nelle regioni del sistema in cui non sono significative le variazioni temporali di **B** il campo elettrico risulta governato dalle relazioni:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho(\mathrm{P}, \mathrm{t})$$
$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$
$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

Il tempo compare ancora (ρ(P,t)), ma gioca un ruolo di semplice parametro; in ciascun istante risolvendo le equazioni si otterranno un potenziale e un campo elettrico proprio come nel caso stazionario; in un diverso istante, partendo da una distribuzione di carica diversa si otterranno ancora potenziale e campo elettrico di tipo stazionario, ma diversi da quelli relativi all'istante precedente. In altre parole il campo elettrico è dato da una successione temporale di campi diversi ciascuno però di tipo stazionario, non c'è influenza reciproca tra ciò che accade in istanti diversi.

Analogamente,nelle regioni del sistema in cui è lecito trascurare la variazione temporale dell'induzione elettrica **D**, il campo magnetico è governato dalle relazioni:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

In questo caso, dualmente a quanto detto per il campo elettrico **E**, il campo magnetico **H** è costituito da una successione temporale di campi diversi, ciascuno di tipo stazionario e mutuamente non influenzati tra loro.

Resta da vedere in quali circostanze è possibile trascurare le variazioni temporali; è quindi necessario stabilire rispetto a cosa esse siano trascurabili.
La derivata temporale di **D** compare nella seconda equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

perciò la relazione di trascurabilità diventa

$$\left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| << |\mathbf{J}|$$

e in tal caso

$$\nabla \times \mathbf{H} \cong \mathbf{J}$$

Per il vettore induzione magnetica **B** il discorso è diverso perché nella prima equazione di Maxwell figurano solo due termini:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

E' allora utile sfruttare la relazione ricavata per i potenziali nel caso non stazionario. In particolare essendo

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

con **A** potenziale vettore magnetico, è già stato ricavato che il vettore campo elettrico può essere scritto come:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

pertanto il campo elettrico non dipende dal campo magnetico quando risulta valida la relazione

$$\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right| << |\nabla\Phi|$$

e ciò vuol dire che vale $\mathbf{E} \cong -\nabla\Phi$, da cui $\nabla \times \mathbf{E} \cong 0$.

Va fatta un'ulteriore precisazione: la possibilità di trascurare le derivate temporali delle grandezze vettoriali in esame non dipende solo dai moduli ma anche dalla rapidità della loro variazione e, quindi, dal ***regime temporale*** in atto nel sistema. In particolare, le considerazioni che in seguito verranno tratte per i sistemi che verificano le relazioni di trascurabilità sopra citate, saranno tanto più accettabili quanto più è lecito classificare come fenomeni lentamente variabili le trasformazioni in atto nell'intero sistema. Si osservi infine che il regime temporale del sistema non dipende dai vettori elettromagnetici stessi ma dalle *cause* che originano il campo.

Trascurare le variazioni temporali equivale a poter trascurare il ritardo di propagazione, cioè *le variazioni temporali delle forze impresse si propagano istantaneamente in tutti i punti del sistema*.

E' ovvio che, per trascurare il tempo di ritardo, il sistema che si sta considerando deve essere geometricamente limitato (diversamente non sarebbe possibile individuare un valore massimo per il tempo di ritardo).

Data una coppia di punti P e P_0 appartenenti al sistema che si sta considerando, si ponga

$$r_{max} = \max(|P - P_0|)$$

$$t_{max} = \frac{r_{max}}{c}$$

dove c indica la velocità della luce nel vuoto.

Se le relazioni di trascurabilità, che di seguito verranno esplicitate, sono verificate per distanze pari a r_{max}, a maggior ragione lo saranno per ogni altro valore della distanza r.

Trascurare il tempo di ritardo significa, come detto, supporre che le *cause* che originano il campo non varino nell'intervallo temporale in esame, cioè:

$$\text{(a)} \quad \rho(P, t - t_{max}) \approx \rho(P, t) \qquad \Rightarrow \quad |\rho(P, t - t_{max}) - \rho(P, t)| << |\rho(P, t)|$$

$$\text{(b)} \quad \mathbf{J}(P, t - t_{max}) \approx \mathbf{J}(P, t) \qquad \Rightarrow \quad |\mathbf{J}(P, t - t_{max}) - \mathbf{J}(P, t)| << |\mathbf{J}(P, t)|$$

Considerando ad esempio la distribuzione delle cariche ρ(P,t), mediante sviluppo in serie è possibile riscrivere la relazione (a) nella forma:

$$\text{(a')} \quad \left| \frac{\partial \rho(P, t)}{\partial t} \frac{r_{max}}{c} \right| << |\rho(P, t)|$$

Se si considera come caso di maggior interesse quello di un *regime sinusoidale di pulsazione ω* si può scrivere

$$\rho(P, t) = \rho(P) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial \rho(P, t)}{\partial t} = -\omega \rho(P) \sin(\omega t + \varphi)$$

e la (a') risulta verificata ogni qual volta risulta

$$\left| \frac{\omega r_{max}}{c} \right| << 1$$

Lo stesso procedimento si può seguire per la grandezza vettoriale **J** arrivando alle stesse conclusioni.

E' stata così individuata una **condizione sufficiente per l'approssimazione di quasi stazionarietà** che spesso viene espressa anche nella forma

$$\boxed{r_{max} << \lambda}$$

dalla quale emerge che, affinché sia verificata l'ipotesi di quasi stazionarietà, le dimensioni del sistema elettromagnetico in esame devono essere trascurabili rispetto alla lunghezza d'onda del campo che si propaga.

Come conseguenza dell'ipotesi di quasi stazionarietà si ha che per ogni coppia di punti del sistema P e P_0, risultano vere le relazioni:

1. $$\frac{2\pi}{\lambda}\left|P - P_0\right| << 2\pi$$

   Lo sfasamento che il campo sinusoidale subisce propagandosi da un punto all'altro del sistema è trascurabile.

2. $$\frac{\left|P - P_0\right|}{c} << T \qquad T=1/f \text{ periodo del campo sinusoidale}$$

   Il tempo di propagazione del campo tra due punti qualsiasi del sistema è trascurabile rispetto al periodo, cioè la propagazione nell'ambito del sistema si può ritenere a tutti gli effetti istantanea.

3. $$f << \frac{c}{\left|P - P_0\right|}$$

   La frequenza di propagazione è molto bassa rispetto all'inverso del tempo di propagazione tra due punti del circuito.

I sistemi in regime quasi stazionario che verranno studiati in questo corso sono i ***circuiti a costanti concentrate*** vale a dire circuiti costituiti da opportuni componenti, ciascuno dei quali può ritenersi responsabile quasi per intero di una proprietà che, a stretto rigore, appartiene al circuito nel suo complesso. Per chiarire questo concetto si fissi dapprima l'attenzione sulla distribuzione dell'induzione magnetica, la quale assume valori considerevoli solo nelle regioni del circuito occupate da *bobine*, nelle quali è ragionevole ipotizzare $(\partial \mathbf{B}/\partial t) \neq 0$. La bobina viene ad essere così il ***componente*** cui sono da attribuire le capacità di generare flusso di induzione magnetica, proprie del circuito elettrico nel suo complesso.
Considerazioni analoghe possono ripetersi a proposito dell'induzione elettrica. Anche in questo caso è possibile riconoscere a priori le regioni all'interno delle quali l'induzione elettrica e la sua derivata temporale acquistano valori nettamente prevalenti rispetto a quelli assunti nelle restanti regioni. Si tratta ovviamente delle regioni occupate da *condensatori*, nelle quali è ragionevole ipotizzare $(\partial \mathbf{D}/\partial t) \neq 0$. Il condensatore risulta allora il componente nel quale si *concentra* tutta la tendenza che il circuito possiede a sostenere fenomeni di tipo capacitivo.
Di seguito si mostrerà che, per i circuiti a costanti concentrate operanti in regime quasi stazionario, ad ogni nodo si può associare una tensione e ad ogni filo una corrente. Si vedrà inoltre che dalle equazioni di Maxwell è possibile ricavare i parametri degli elementi circuitali.