A6 – Operatori differenziali

Operatori differenziali in coordinate cartesiane:

- **Gradiente** (opera su uno scalare; ha come risultato un vettore)

$$grad(\Phi) = \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{\mathbf{i}}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{\mathbf{i}}_z$$

- **Divergenza** (opera su un vettore; ha come risultato uno scalare)

$$div(\mathbf{A}) = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- **Rotazionale o rotore** (opera su un vettore; ha come risultato un vettore)

$$rot(\mathbf{A}) = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}}_x & \hat{\mathbf{i}}_y & \hat{\mathbf{i}}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{i}}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{i}}_z$$

- **Laplaciano scalare** (opera su uno scalare; ha come risultato uno scalare)

$$\nabla^2\Phi = \Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

  Il laplaciano scalare gode della seguente proprietà:

$$\nabla^2\Phi = \nabla \cdot (\nabla\Phi)$$

- **Laplaciano vettoriale** (opera su un vettore; ha come risultato un vettore)

$$\nabla^2\mathbf{A} = \Delta\,\mathbf{A} = \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial z^2}$$

Si osservi che, **<u>solo nel caso del riferimento cartesiano</u>**, i laplaciani vettoriali e scalari sono legati fra loro dalla seguente proprietà:

$$\nabla^2\mathbf{A} = \left(\nabla^2 A_x\right)\hat{\mathbf{i}}_x + \left(\nabla^2 A_y\right)\hat{\mathbf{i}}_y + \left(\nabla^2 A_z\right)\hat{\mathbf{i}}_z$$

quindi il laplaciano di un vettore è ancora un vettore che ha come componenti <u>cartesiane</u> i laplaciani scalari delle componenti <u>cartesiane</u> del vettore su cui opera.

Operatori differenziali in coordinate curvilinee:

Si consideri un generico sistema di coordinate curvilinee (u_1,u_2,u_3), e siano $\left(\hat{\mathbf{u}}_1,\hat{\mathbf{u}}_2,\hat{\mathbf{u}}_3\right)$ i rispettivi versori fondamentali e (h_1,h_2,h_3) i coefficienti metrici.
Si definiscono gli operatori differenziali nel modo seguente:

- **Gradiente**

$$\nabla\Phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\hat{\mathbf{u}}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\hat{\mathbf{u}}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\hat{\mathbf{u}}_3$$

- **Divergenza**

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right]$$

- **Rotazionale**

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{\mathbf{u}}_1 & h_2\hat{\mathbf{u}}_2 & h_3\hat{\mathbf{u}}_3 \\ \partial/\partial u_1 & \partial/\partial u_2 & \partial/\partial u_3 \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1/h_2h_3 & \hat{\mathbf{u}}_2/h_3h_1 & \hat{\mathbf{u}}_3/h_1h_2 \\ \partial/\partial u_1 & \partial/\partial u_2 & \partial/\partial u_3 \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{\hat{\mathbf{u}}_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2A_2)\right] + \frac{\hat{\mathbf{u}}_2}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1A_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(h_3A_3)\right] +$$
$$+\frac{\hat{\mathbf{u}}_2}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1A_1)\right]$$

- **Laplaciano**

$$\nabla^2[\;] = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_1^2}\frac{\partial}{\partial u_1}[\;]\right)\right] + \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_2^2}\frac{\partial}{\partial u_2}[\;]\right)\right] + \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_3^2}\frac{\partial}{\partial u_3}[\;]\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}[\;]\right)\right] + \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}[\;]\right)\right] + \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}[\;]\right)\right]$$

L'operatore $\nabla^2[\;]$ si può applicare sia a un campo scalare ϕ che a un campo vettoriale **A** espresso in coordinate curvilinee, e si ottengono così il laplaciano scalare e il laplaciano vettoriale in coordinate curvilinee. Nel caso vettoriale, occorre però tenere presente che <u>in generale i versori non sono delle costanti, e quindi vanno anch'essi derivati.</u>

Come casi tipici di sistemi di coordinate curvilinee, si possono considerare ad esempio il riferimento cilindrico e quello sferico. In tal caso, le espressioni degli operatori differenziali scritte sopra si particolarizzano nel modo seguente:

a) Coordinate cilindriche

Si ricordi che in un riferimento cilindrico si ha $u_1 = \rho$, $u_2 = \phi$, $u_3 = z$ e quindi risulta:
$h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = 1$

- **Gradiente**

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\hat{\mathbf{i}}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{i}}_\phi + \frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{z}}\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z}$$

- **Divergenza**

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\mathrm{A}_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{A}_\phi}{\partial\varphi} + \frac{\partial \mathrm{A}_\mathrm{z}}{\partial \mathrm{z}}$$

- **Rotazionale**

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\hat{\mathbf{i}}_\rho & \hat{\mathbf{i}}_\phi & \frac{1}{\rho}\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \\ \mathrm{A}_\rho & \rho\mathrm{A}_\phi & \mathrm{A}_\mathrm{z} \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \mathrm{A}_\mathrm{z}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial\,\mathrm{z}}\left(\rho\,\mathrm{A}_\phi\right)\right]\hat{\mathbf{i}}_\rho + \left[\frac{\partial \mathrm{A}_\rho}{\partial\,\mathrm{z}} - \frac{\partial \mathrm{A}_\mathrm{z}}{\partial\rho}\right]\hat{\mathbf{i}}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho\,\mathrm{A}_\phi)}{\partial\rho} - \frac{\partial \mathrm{A}_\rho}{\partial\varphi}\right]\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z} =$$

$$= \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{A}_\mathrm{z}}{\partial\varphi} - \frac{\partial \mathrm{A}_\phi}{\partial\,\mathrm{z}}\right]\hat{\mathbf{i}}_\rho + \left[\frac{\partial \mathrm{A}_\rho}{\partial\,\mathrm{z}} - \frac{\partial \mathrm{A}_\mathrm{z}}{\partial\rho}\right]\hat{\mathbf{i}}_\phi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\,\mathrm{A}_\phi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{A}_\rho}{\partial\varphi}\right]\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z}$$

- **Laplaciano**

$$\nabla^2[\;] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}[\;]\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}[\;] + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{z}^2}[\;] = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}[\;] + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\;] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}[\;] + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{z}^2}[\;]$$

L'operatore $\nabla^2[\;]$ si può applicare sia a un campo scalare ϕ che a un campo vettoriale **A** espresso in coordinate cilindriche, e si ottengono così il laplaciano scalare e il laplaciano vettoriale in coordinate cilindriche. Per il laplaciano di un vettore, con alcune manipolazioni si può ottenere la seguente espressione alternativa:

$$\nabla^2\mathbf{A} = \left[\nabla^2\mathrm{A}_\rho - \frac{\mathrm{A}_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial\,\mathrm{A}_\phi}{\partial\varphi}\right]\hat{\mathbf{i}}_\rho + \left[\nabla^2\mathrm{A}_\phi - \frac{\mathrm{A}_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial\,\mathrm{A}_\rho}{\partial\varphi}\right]\hat{\mathbf{i}}_\phi + \left(\nabla^2\,\mathrm{A}_\mathrm{z}\right)\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z}$$

Si osservi che, come già detto in precedenza, le componenti del laplaciano vettoriale non sono i laplaciani scalari delle componenti del vettore **A**, come avviene invece in coordinate cartesiane.
<u>b) Coordinate sferiche</u>

Si ricordi che in un riferimento cilindrico si ha $u_1 = r$, $u_2 = \theta$, $u_3 = \phi$ e quindi risulta:
$h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r \sin\theta$

- **Gradiente**

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{\mathbf{i}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\hat{\mathbf{i}}_\theta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{i}}_\phi$$

- **Divergenza**

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\, A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\varphi}$$

- **Rotazionale**

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\hat{\mathbf{i}}_r}{r^2\sin\vartheta} & \dfrac{\hat{\mathbf{i}}_\theta}{r\sin\vartheta} & \dfrac{\hat{\mathbf{i}}_\varphi}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\vartheta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & r\,A_\theta & r\sin\vartheta\, A_\phi \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(r\sin\vartheta\, A_\phi\right) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r\,A_\theta\right)\right]\hat{\mathbf{i}}_r +$$

$$+\frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\vartheta\, A_\phi\right)\right]\hat{\mathbf{i}}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\mathbf{i}}_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\, A_\phi\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{\mathbf{i}}_r +$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\,A_\phi\right)\right]\hat{\mathbf{i}}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\mathbf{i}}_\phi$$

- **Laplaciano**

$$\nabla^2[\ ] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}[\ ]\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}[\ ]\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}[\ ] =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2}[\ ] + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}[\ ] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}[\ ] + \frac{1}{r^2\tan\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}[\ ] + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}[\ ]$$

L'operatore $\nabla^2[\ ]$ si può applicare sia a un campo scalare ϕ che a un campo vettoriale **A** espresso in coordinate sferiche, e si ottengono così il laplaciano scalare e il laplaciano vettoriale in coordinate sferiche.

Per il laplaciano di un vettore, con alcune manipolazioni si può ottenere la seguente espressione alternativa:

$$\nabla^2\mathbf{A} = \left[\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2A_\theta}{r^2\tan\vartheta} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\vartheta} - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\varphi}\right]\hat{\mathbf{i}}_r +$$
$$+\left[\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\sin\vartheta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta} - \frac{2}{r^2\sin\vartheta\tan\vartheta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\varphi}\right]\hat{\mathbf{i}}_\theta +$$
$$+\left[\nabla^2 A_\phi + \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{A_\phi}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{2}{r^2\sin\vartheta\tan\vartheta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{\mathbf{i}}_\phi$$

Si osservi che, come già detto in precedenza, le componenti del laplaciano vettoriale non sono i laplaciani scalari delle componenti del vettore **A**, come avviene invece in coordinate cartesiane.

Principali relazioni differenziali:

1) $\nabla(\Phi+\psi)=\nabla\Phi+\nabla\psi$

2) $\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla\cdot\mathbf{B}$

3) $\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\nabla\times\mathbf{A}+\nabla\times\mathbf{B}$

4) $\nabla^2(\Phi+\psi)=\nabla^2\Phi+\nabla^2\psi$

5) $\nabla^2(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\nabla^2\mathbf{A}+\nabla^2\mathbf{B}$

6) $\nabla\cdot(\nabla\Phi)=\nabla^2\Phi$

7) $\nabla(\Phi\ \psi)=\Phi\nabla\psi+\psi\nabla\Phi$

8) $\nabla\cdot(\Phi\mathbf{A})=\Phi\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla\Phi\cdot\mathbf{A}$

9) $\nabla\times(\Phi\mathbf{A})=\Phi\nabla\times\mathbf{A}+\nabla\Phi\times\mathbf{A}$

10) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}$

11) $\nabla\times\nabla\Phi=0$

12) $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A}=0$

13) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}$

14) $\nabla\cdot(\Phi\nabla\psi)=\nabla\Phi\cdot\nabla\psi+\Phi\nabla^2\psi$

15) $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$

16) $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}-(\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$

17) $\nabla^2(\Phi\psi)=\Phi\nabla^2\psi+\nabla\Phi\cdot\nabla\psi+\psi\,\nabla^2\Phi$

18) $\nabla^2(\Phi\mathbf{A})=\Phi\nabla^2\mathbf{A}+\mathbf{A}\nabla^2\Phi+2(\nabla\Phi\cdot\nabla)\mathbf{A}$

19) $\nabla\nabla\cdot(\Phi\mathbf{A})=(\nabla\Phi)\nabla\cdot\mathbf{A}+\Phi\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla\Phi\times\nabla\times\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\nabla\Phi+(\nabla\Phi\cdot\nabla)\mathbf{A}$

20) $\nabla\times\nabla\times(\Phi\mathbf{A})=\nabla\Phi\times\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\nabla^2\Phi+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\nabla\Phi+\Phi\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}+\nabla\Phi\ \nabla\cdot\mathbf{A}-(\nabla\Phi\cdot\nabla)\ \mathbf{A}$

Le relazioni 11, 12 e 13 sono particolarmente importanti.