Linee prive di perdite

Si faranno ora alcune considerazioni riguardo alle linee di trasmissione prive di perdite, in cui cioè **R=G=0**. Per quanto riguarda i parametri secondari, cio' significa ovviamente

$$\alpha = 0 \qquad \beta = \omega \cdot \sqrt{LC} \qquad Z_c = R_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{Resistenza Caratteristica } [\Omega]$$

Si noti che una linea in pratica si può considerare senza perdite non tanto quando R e G (e quindi α) sono piccoli ma quando $\alpha \bullet d$ è piccolo, dove d è la lunghezza totale della linea. In tal caso si può trascurare la attenuazione dovuta al termine $e^{-\alpha z}$ anche nel passaggio da un estremo all'altro. Se la linea è molto lunga, come avviene nel caso in cui essa sia utilizzata per trasmissioni su lunga distanza, difficilmente si possono trascurare le perdite. Nel caso di collegamenti tra apparati, dove le distanze sono brevi, è possibile trascurarle in prima approssimazione.

Riassumendo, per ritenere valida l'approssimazione di assenza di perdite occorre verificare in pratica la condizione $\alpha \cdot d \ll 1$.

Per quanto riguarda l'impedenza di ingresso $Z_{IN}(z)$ e il coefficiente di riflessione $\rho(z)$ risulta invece:

$$Z_{IN}(z) = R_c \frac{Z_L \cos(\beta z) - jR_c \sin(\beta z)}{R_c \cos(\beta z) - jZ_L \sin(\beta z)} \quad (\text{essendo } \operatorname{sh}(jz) = j\sin(z) \text{ e } \operatorname{ch}(jz) = \cos(z)\ )$$

$$\rho(z) = \rho_L \cdot e^{2j\beta z} \qquad \Rightarrow \qquad |\rho(z)| = |\rho_L|$$

La soluzione delle equazioni dei telefonisti diventa

$$\begin{cases} V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z} \\ I(z) = \dfrac{V_0^+}{R_C} e^{-j\beta z} - \dfrac{V_0^-}{R_C} e^{j\beta z} \end{cases}$$

Consideriamo la sola espressione dell'onda di tensione (analoghe considerazioni varranno per l'onda di corrente); ponendo $V_0^* = V_0^+ - V_0^-$ si ottiene banalmente

$$V(z) = \left(V_0^* + V_0^-\right) \cdot e^{-j\beta z} + V_0^- \cdot e^{j\beta z} = V_0^* \cdot e^{-j\beta z} + 2 \cdot V_0^- \cdot \cos(\beta z)$$

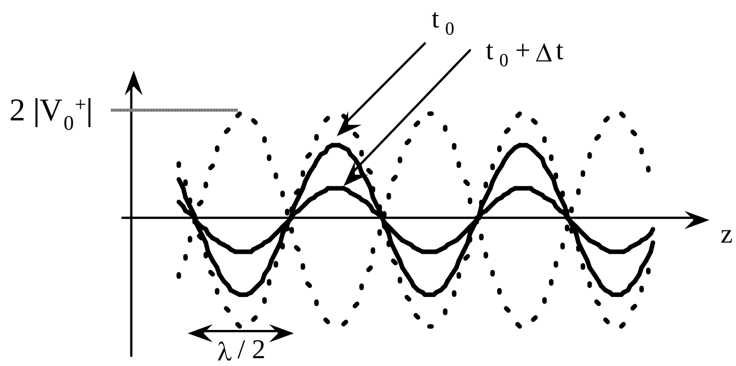
Il primo termine rappresenta come visto un'onda progressiva. Il secondo termine non rappresenta evidentemente ne' un'onda progressiva, ne' un'onda regressiva, e merita dunque maggiore attenzione; riscrivendolo nel <u>dominio dei tempi:</u>

$$V'(z) = 2 \cdot V_0^- \cdot \cos(\beta z) \;\Rightarrow\; v'(z,t) = \operatorname{Re}\left\{V'(z) \cdot e^{j\omega t}\right\} = 2 \cdot \left|V_0^-\right| \cdot \cos\left(\omega t + \arg V_0^-\right) \cdot \cos(\beta z)$$

si puo' immediatamente osservare che in corrispondenza di quei valori di z che annullano cos(βz), risulta v'(z,t)=0 *in qualunque istante t*. Essendo vincolati i valori di z che annullano l'ampiezza, ne segue automaticamente che l'onda non si propaga, ma in realta' oscilla, pulsa all'interno dei punti di zero:

Per indicare tale un onda di questo tipo, che non si propaga (quasi una contraddizione in termini) si parla di **onda puramente stazionaria**.

Il regime d'onda che si instaura all'interno della linea, dato dalla sovrapposizione dell'onda progressiva e dell'onda puramente stazionaria, viene detto di **onda parzialmente stazionaria**.



ESEMPI

- $V_0^- = 0 \Rightarrow$ *solo onda progressiva*, essendoci adattamento in uniformita';
- $V_0^+ = V_0^- \Rightarrow \rho_L = 1 \Rightarrow Z_L = \infty$ (*Linea Aperta)*: solo *onda stazionaria pura*;
- $V_0^+ = -V_0^- \Rightarrow \rho_L = -1 \Rightarrow Z_L = 0$ (*Linea Cortocircuitata)*: in questo caso
  $V(z) = -V_0^- \cdot e^{-j\beta z} + V_0^- \cdot e^{+j\beta z} = 2j \cdot V_0^- \cdot \sin(\beta z)$
  e quindi ancora solo *onda stazionaria pura.*

OSSERVAZIONE: in presenza di perdite il regime propagativo all'interno della linea si e' visto essere dato dalla sovrapposizione di un'onda progressiva e un'onda riflessa, mentre in assenza di perdite dalla sovrapposizione di un'onda progressiva e un'onda stazionaria pura. Puo' allora non apparire chiaro perche' in assenza di perdite non si debba avere onda riflessa, anche e soprattutto considerato che il caso senza perdite deve potersi ricavare da quello con perdite imponendo semplicemente α=0. Ebbene, anche in assenza di perdite si hanno evidentemente onda diretta e riflessa; solo in tal caso, pero', le due onde si sovrappongono, e dunque *interferiscono* in modo che l'onda risultante possa essere *equivalentemente* descritta anche in termini di onda progressiva e onda puramente stazionaria.

E' allora opportuno individuare un parametro facilmente calcolabile e/o misurabile che permetta sinteticamente di individuare il regime d'onda all'interno della linea. Si consideri allora

$$V(z) = V_0^+ \cdot e^{-j\beta z} \cdot \left(1 + \rho_L e^{2j\beta z}\right) = V_0^+ \cdot e^{-j\beta z} \cdot \left(1 + |\rho_L| \cdot \cos(2\beta z + \arg\rho_L) + j \cdot |\rho_L| \cdot \sin(2\beta z + \arg\rho_L)\right)$$

e se ne calcoli il modulo:

$$|V(z)| = |V_0^+| \cdot \sqrt{1 + |\rho_L|^2 + 2 \cdot |\rho_L| \cdot \cos(2\beta z + \arg \rho_L)}$$

Si osserva che anche l'ampiezza dell'oscillazione varia con z, in conseguenza del fatto che l'onda progressiva e quella regressiva sovrapponendosi interferiscono ora distruttivamente ora costruttivamente, determinando per l'onda risultante ampiezza diversa per diversi valori di z.

In particolare si possono individuare:

- Valori di z in che individuano sezioni ad *ampiezza massima* (si parla di *ventri*):

  $$\cos(2\beta z + \arg \rho_L) = 1 \quad \rightarrow \quad 2\beta z + \arg \rho_L = 0 + 2k\pi \quad \xrightarrow{\beta = 2\pi/\lambda} \quad z = k \cdot \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda \cdot \arg \rho_L}{4\pi}$$

  in corrispondenza dei quali vale quindi:

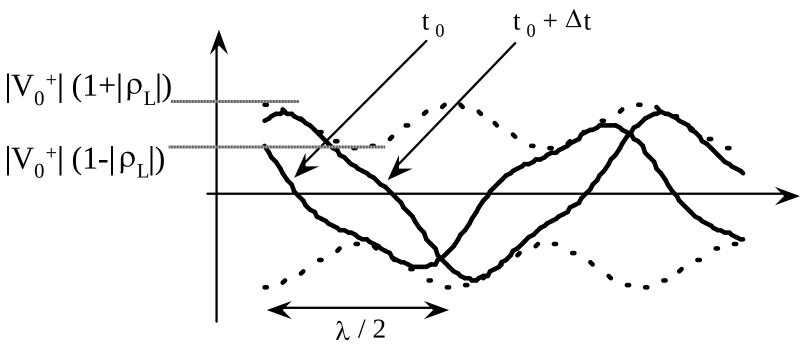
  $$|V(z)| = |V(z)|_{MAX} = |V_0^+| \cdot (1 + |\rho_L|)$$

- Valori di z in che individuano sezioni ad *ampiezza minima* (si parla di *nodi*):

  $$\cos(2\beta z + \arg \rho_L) = -1 \quad \rightarrow \quad 2\beta z + \arg \rho_L = \pi + 2k\pi \quad \xrightarrow{\beta = 2\pi/\lambda} \quad z = \frac{\lambda}{4} + k \cdot \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda \cdot \arg \rho_L}{4\pi}$$

  in corrispondenza dei quali vale quindi:

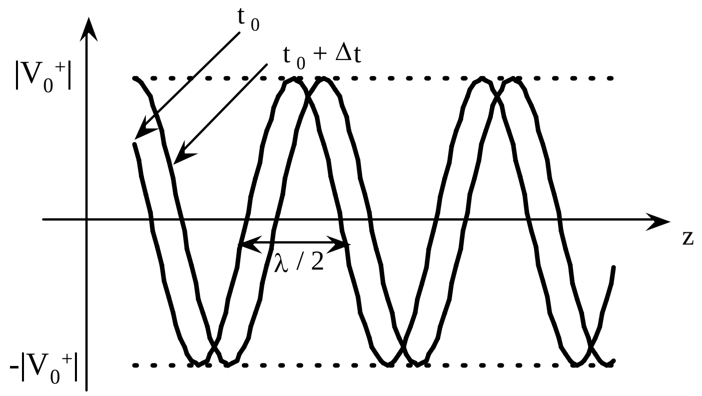
  $$|V(z)| = |V(z)|_{MIN} = |V_0^+| \cdot (1 - |\rho_L|)$$



Nodi e ventri, pertanto, si alternano distanziati di λ/4 (e dunque nodi successivi – e ventri successivi- distano fra loro λ/2) .

E' possibile inoltre osservare che:

1) Se $|\rho_L| = \mathbf{0}$ allora automaticamente $|\mathbf{V}|_{\mathbf{MAX}} = |\mathbf{V}|_{\mathbf{MIN}} = |\mathbf{V_0^+}|$; l'ampiezza dell'oscillazione e' costante e indipendente da z; e' chiaro che cio' significa implicitamente che non v'e' alcuna interferenza e dunque non c'e' onda riflessa ⇒ *REGIME d'ONDA PURAMENTE PROGRESSIVA*. (Risultato per altro confermato dal fatto che $|\rho_L| = 0$ significa necessariamente $V_0^- = 0$ e quindi *adattamento in uniformita'*).



2) Se $|\rho_L| = \mathbf{1}$ allora $|\mathbf{V}|_{\mathbf{MIN}} = \mathbf{0}$ e dunque in corrispondenza dei nodi l'ampiezza e' nulla in qualunque istante di tempo $\Rightarrow$ *REGIME D'ONDA PURAMENTE STAZIONARIA.*

Si osservi che la condizione $|\rho_L| = 1$ corrisponde, in concreto, ad uno dei seguenti casi:

- $Z_L = \infty \Rightarrow \rho_L = 1$ - Linea Aperta -;
- $Z_L = 0 \Rightarrow \rho_L = -1$ - Linea Cortocircuitata -;
- $Z_L = j\,X_L \Rightarrow \rho_L = \dfrac{jX_L - R_c}{jX_L + R_c}$ - Linea chiusa su Carico *Puramente Reattivo -*

E' dunque evidente che il valore del modulo di ρ_L permette immediatamente di individuare il regime d'onda instaurato all'interno di una linea di trasmissione.

In realta' per descrivere in maniera sintetica il regime di onda che si stabilisce nella linea si usa fare riferimento ad un altro parametro, il cosiddetto ***rapporto d'onda stazionaria* (ROS)**

$$S \triangleq \frac{|V|_{max}}{|V|_{min}} \tag{2.24}$$

detto spesso **VSWR (Voltage Standing Wave Ratio).** Si ha

$$S = \frac{|V_0^+|\,(1 + |\rho_L|)}{|V_0^+|\,(1 - |\rho_L|)} = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \tag{2.25}$$

ed invertendo la (2.25) si ha

$$|\rho| = \frac{S - 1}{S + 1} \tag{2.26}$$

Il ROS è una quantità importante perchè è suscettibile di una misura diretta in base alla sua definizione, ad esempio mediante l'uso di una linea fessurata e di una sonda misura-campo

Riassumendo:

$$
\begin{array}{c}
S = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\rho_L| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Regime d'Onda Puramente Progressiva} \\
S = \infty \quad \Leftrightarrow \quad |\rho_L| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Regime d'Onda Puramente Stazionaria} \\
1 < S < \infty \quad \Leftrightarrow \quad 0 < |\rho_L| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Regime d'Onda Parzialmente Stazionaria}
\end{array}
$$

<u>OSSERVAZIONE:</u>. In assenza di perdite V(z) e I(z) possono evidentemente essere scritti anche nella seguente forma:

$$
\begin{cases}
V(z) = V_0^+ \, e^{-j\beta z} \, [1 + \rho(z)] \\
I(z) = \dfrac{V_0^+}{R_C} \, e^{-j\beta z} \, [1 - \rho(z)]
\end{cases}
\tag{2.21}
$$

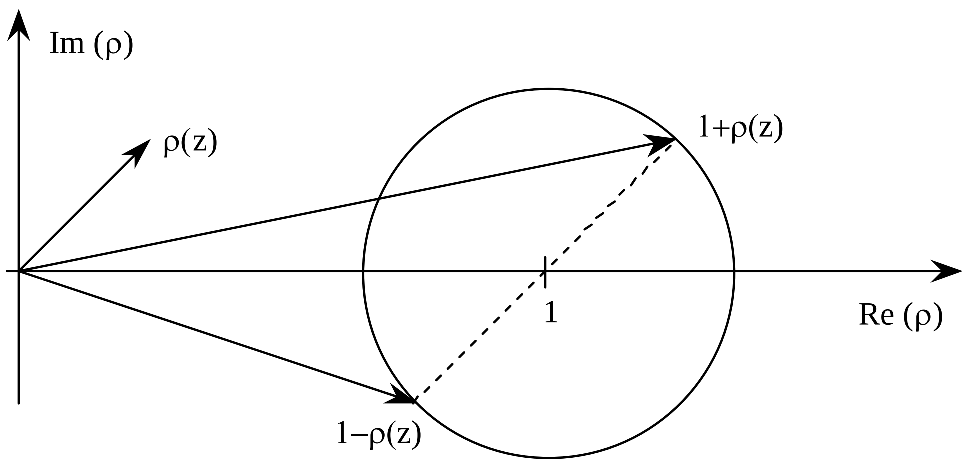
dove

$$
\rho(z) = \rho_L \, e^{2j\beta z} \; ; \qquad |\rho(z)| = |\rho_L|
\tag{2.22}
$$

da cui si può ricavare

$$
\begin{cases}
|V(z)| = |V_0^+| \, |1 + \rho(z)| \\
|I(z)| = \dfrac{|V_0^+|}{R_C} \, |1 - \rho(z)|
\end{cases}
\tag{2.23}
$$

Ricordando che associando ad un numero complesso il proprio vettore rappresentativo nel piano cartesiano { Re z, Im z} la somma fra numeri complessi si riduce alla ben nota somma vettoriale, e' possibile disegnare sul piano complesso i vettori rappresentativi dei numeri complessi(1+ρ(z)) e (1-ρ(z)) per una determinata ascissa z; il loro modulo è proporzionale alla ampiezza rispettivamente di tensione e corrente in quella sezione:



Siccome la linea è priva di perdite $|\rho\ (z)|$ è costante; $1+\rho(z)$ e $1-\rho(z)$ al variare di z descriveranno il cerchio disegnato in figura e si troveranno sempre in posizione diametralmente opposta: perciò dove la tensione ha la massima ampiezza la corrente ha quella minima e viceversa. Il caso di onda stazionaria, in cui $|\rho_L| = |\rho(z)| = 1$ corrisponde ad avere una circonferenza di raggio pari a 1, che passa perciò per l'origine degli assi.
In tal caso esisteranno z per cui tensione o corrente sono nulle: dove è nulla la corrente è massima la tensione e viceversa. In sostanza *a nodi di tensione corrispondono ventri di corrente*, mentre *a ventri di tensione corrispondono nodi di corrente*.

Inoltre dalle (2.21) , ricordando che $\rho(z) = \rho_{\mathrm{L}} e^{j2\beta z}$, si puo' osservare che la potenza complessiva alla generica ascissa vale

$$P_C(z) = \frac{1}{2} V(z) \cdot I^*(z) = \frac{|V_0^+|^2}{2\,R_C} \left(1 - |\rho_L|^2\right) +$$

$$+ j \frac{|V_0^+|^2}{R_C} |\rho_L| \operatorname{sen}\left(2\beta z + \angle\rho_L\right) = P + jQ$$

La potenza attiva vale quindi

$$P = \frac{|V_0^+|^2}{2\,R_C} \left(1 - |\rho_L|^2\right)$$

è indipendente da z, in accordo con l'ipotesi di assenza di perdite lungo la linea. Se $|\rho_L| = 1$, P si annulla, cioè in regime di onda puramente stazionaria non si ha trasferimento di potenza attiva.