Capitolo ...

LINEE DI TRASMISSIONE

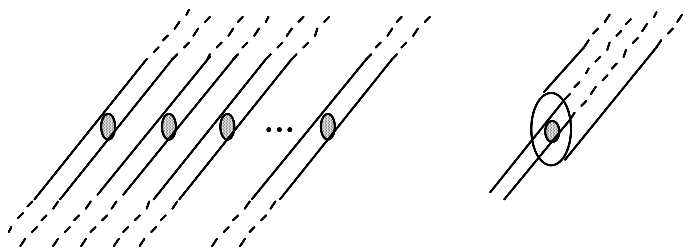
Linee di trasmissione come circuiti a costanti distribuite

Il campo elettromagnetico, come si è visto, può servire per trasmettere informazione.

Spesso, quando è necessario realizzare un collegamento punto-punto, si limita la dispersione della potenza elettromagnetica indirizzandola in una sola direzione mediante una *guida d'onda*.

Una guida d'onda, che in pratica può essere una fibra ottica, un coassiale, un doppino di fili, è una *struttura cilindrica*, in cui cioè le proprietà geometriche ed elettromagnetiche sono invarianti lungo una direzione privilegiata detta asse della struttura. le *linee di trasmissione* sono particolari guide d'onda in cui sono presenti almeno due conduttori (o un conduttore e una "terra").

Ad esempio:



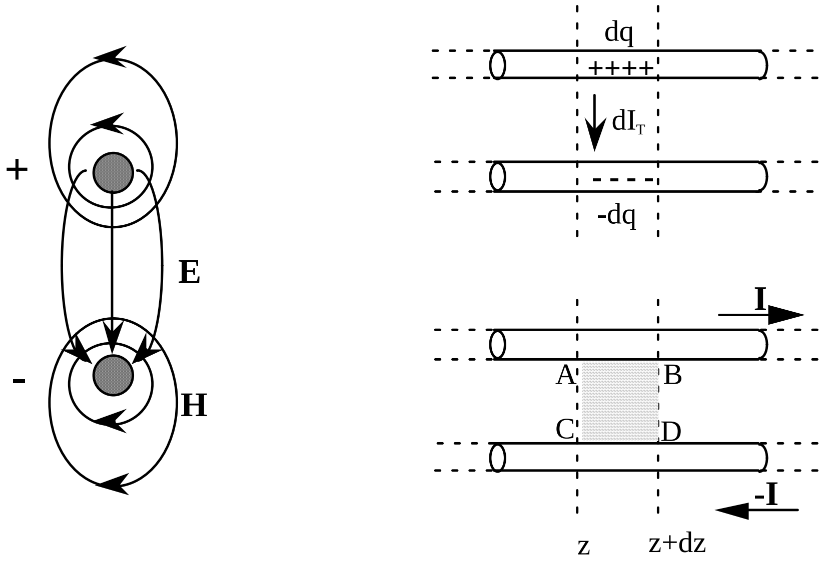
Linea ad m fili   Cavo coassiale

Noi consideriamo linee in cui sono presenti 2 conduttori di cui uno funge da terra. Esistono linee in cui nessuno dei due conduttori è a terra: in generale si tratta di configurazioni simmetriche in cui in ogni sezione trasversale i due conduttori hanno tensioni opposte in segno. In tal caso il piano di simmetria può essere sostituito con un piano conduttore ideale a potenziale di terra: la linea è allora equivalente a due linee non simmetriche disaccoppiate tra loro e alimentate in modo antisimmetrico.

Alle basse frequenze una linea non è altro che una coppia di fili, in cui tensione e corrente sono le stesse in ogni sezione, a meno della resistenza parassita dei conduttori.

Alle alte frequenze, se la linea è lunga rispetto alla lunghezza d'onda, non si può ignorare la propagazione del campo elettromagnetico: istante per istante in diverse sezioni si avranno diverse tensioni e diverse correnti.

Si considererà da ora in poi per semplicità una *linea bifilare*.



Si supponga per il momento di alimentarla in corrente continua. Come indicato in figura si genera un campo stazionario. Sugli elementi di conduttore compresi tra z e z + dz si hanno due cariche uguali ed opposte dq e - dq date da

$$dq = V\,(C\,dz)$$

dove V è la tensione applicata e C è la capacità della linea per unità di lunghezza. Inoltre la superficie ABCD indicata in figura è attraversata da un flusso di induzione magnetica.

$$d\Phi = I\,(L\,dz)$$

dove I è la corrente ed L rappresenta la induttanza per unità di lunghezza. Se i conduttori sono ideali ($\sigma = \infty$) e il dielettrico perfetto ($\sigma = 0$) V ed I sono costanti su tutta la linea. Altrimenti V ed I dipendono da z: la tensione cala a causa della resistenza non nulla dei conduttori e la corrente varia perché in parte sfugge attraverso il dielettrico.

Se dI_T è la corrente trasversale che sfugge per ogni elemento di linea si potrà scrivere:

$$dI_T = V(G\,dz)$$

dove G è la conduttanza del dielettrico per unità di lunghezza. Per la tensione varrà

$$dV = V(z + dz) - V(z) = (Rdz)\, I$$

Dove R è la resistenza dei conduttori per unità di lunghezza.

Si supponga ora di alimentare la linea ad una frequenza f =ω/2π. A meno di effetti del secondo ordine i parametri C, L, G, R detti *parametri primari* della linea, rimarranno gli stessi anche in regime non stazionario.

Da quanto detto si deduce che è stato introdotto un modello circuitale a *parametri distribuiti* (anziché concentrati) della linea di trasmissione in cui cioè gli elementi (o parametri) circuitali C, L, G, R sono distribuiti lungo la linea anziché concentrati come nei circuiti in regime quasi stazionario.

Questo diverso approccio si è reso necessario a causa del fatto che alle alte frequenze e considerando tratti relativamente lunghi di linea non si possono ignorare i parametri parassiti distribuiti dei conduttori né la natura propagativa del campo che con essi interagisce.

A questo punto si può pensare sia in termini di campo che si propaga, sia in termini di tensioni e correnti, che si propagano anch'esse come apparirà chiaro più avanti.

Da quanto detto in precedenza il modello del singolo elemento infinitesimo di linea è rappresentato da un quadripolo siffatto:

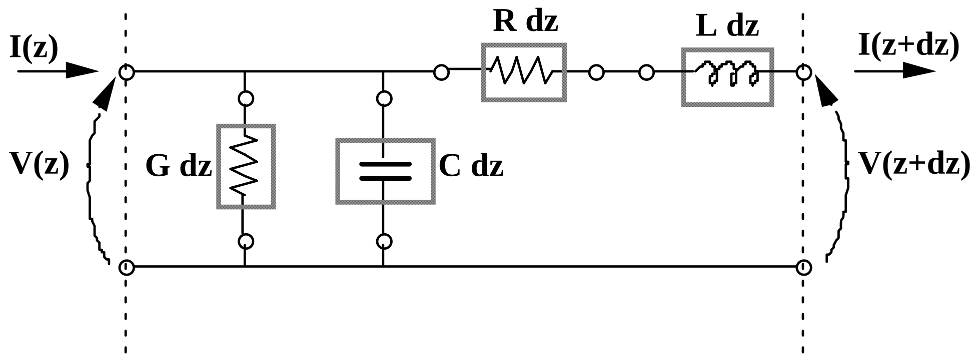


Figura 1

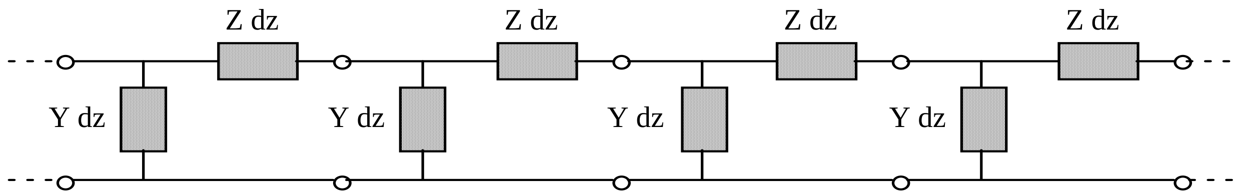
Si possono definire a questo punto la *impedenza per unità di lunghezza* della linea

$$Z = R + j\omega L$$

e *l'ammettenza per unità di lunghezza* della linea

$$Y = G + j\omega C$$

La linea si può pensare formata da una sequenza infinita di quadripoli del tipo di quello di figura 1:



Da figura 1, trascurando infinitesimi di ordine superiore, si deduce:

$$dV = V(z + dz) - V(z) = -(Z\,dz)\,I(z)$$

analogamente

$$dI = I(z + dz) - I(z) = -(Y\,dz)\,V(z)$$

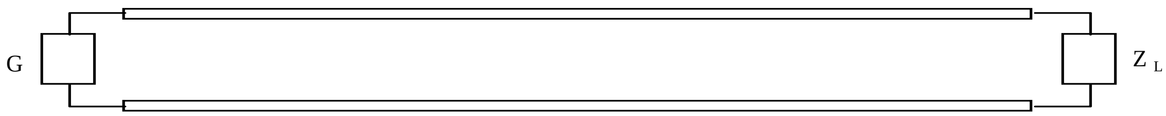
da cui dividendo per dz si possono ricavare le *equazioni dei telefonisti*

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dz} = -Z\,I \\ \dfrac{dI}{dz} = -Y\,V \end{cases} \tag{2.1}$$

in cui si è sottintesa la dipendenza di I e V da z.

Ai fini della presente trattazione le equazioni dei telefonisti sostituiscono quelle di Maxwell. Risolvendole si ricaverà la distribuzione di correnti e tensioni lungo la linea, dati una certa alimentazione e un certo carico.

Si risolveranno ora le equazioni dei telefonisti per determinare le soluzioni V(z) ed I(z). Si ricorda che, essendo in regime sinusoidale, si tratta di numeri complessi rappresentativi di funzioni sinusoidali del tempo. Occorre inoltre precisare che le soluzioni V(z) e I(z) dipenderanno dalle condizioni al contorno, che nel caso specifico sono rappresentate dalla alimentazione e dal carico su cui la linea viene chiusa:



Per risolvere le equazioni dei telefonisti occorre disaccoppiarle. A tal fine si derivi la prima rispetto a z:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -Z\,\frac{dI}{dz} \tag{2.2}$$

Ricavando dI/dz dalla seconda e sostituendolo nella (2.2) si ottiene:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = ZY\,V$$

cioè

$$\frac{d^2V}{dz^2} - ZY\,V = 0 \qquad (2.3)$$

Risolvendo la (2.3) si ricava un integrale generale del tipo

$$V(z) = V_0^+\, e^{-\sqrt{ZY}\,z} + V_0^-\, e^{\sqrt{ZY}\,z} \qquad (2.4)$$

Tutte le quantità che compaiono nella 2.4 sono complesse. Con $\sqrt{ZY}$ si intende la radice avente parte immaginarie positiva. V_0^+ e V_0^- sono due costanti complesse arbitrarie che vengono individuate imponendo le condizioni di alimentazione e di carico della linea; La soluzione in termini di correnti si ricava sostituendo la (2.4) nella prima delle (2.1):

$$I(z) = -\frac{1}{Z}\,\frac{dV(z)}{dz} = \sqrt{\frac{Y}{Z}}\, V_0^+\, e^{-\sqrt{ZY}\,z} - \sqrt{\frac{Y}{Z}}\, V_0^-\, e^{\sqrt{ZY}\,z} \qquad (2.5)$$

Ora si elaborano i risultati ottenuti. Si ponga

$$\Gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)\cdot(G + j\omega C)}\,; \quad \alpha,\beta \in \mathrm{R} \qquad (2.6)$$

Elevando al quadrato ambo i membri e uguagliando parti reali e immaginarie si ottiene

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = RG - \omega^2 LC \\ 2\alpha\beta = \omega(CR + LG) \end{cases} \qquad (2.7)$$

Siccome si è supposto $\beta > 0$ dalla seconda delle (2.7) si ottiene $\alpha > 0$. Dalle (2.7) si possono ricavare le espressioni per α e β:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (\omega^2 LC - RG)}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (\omega^2 LC - RG)}$$

Oltre ad α e β si definisce la grandezza

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \tag{2.8}$$

che, nell'ipotesi di radice a parte positiva è detta *impedenza caratteristica* della linea. α, β e Z_c sono detti *parametri secondari* della linea e dipendono dai parametri primari C, L, G, R. Tenuto conto delle posizioni (2.6) e (2.8) le soluzioni delle equazioni dei telefonisti (2.4) e (2.5) diventano

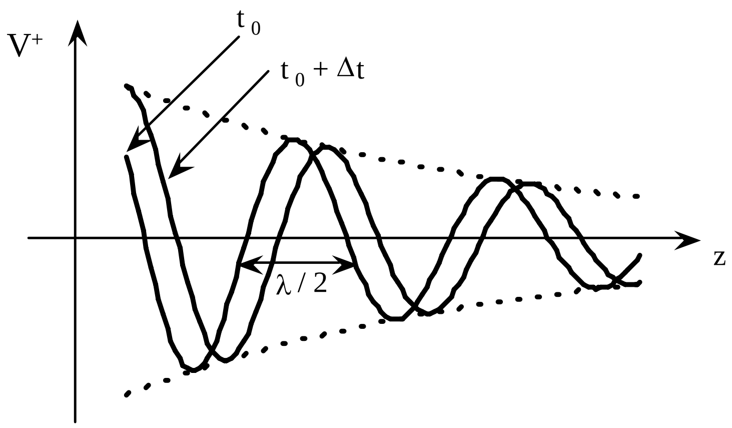
$$\begin{cases} V(z) = V_0^+ e^{-\Gamma z} + V_0^- e^{\Gamma z} = V^+(z) + V^-(z) \\ I(z) = \dfrac{V_0^+}{Z_c} e^{-\Gamma z} - \dfrac{V_0^-}{Z_c} e^{\Gamma z} = I^+(z) - I^-(z) \end{cases} \tag{2.9}$$

Le (2.9) esprimono gli andamenti di tensione e corrente nelle varie sezioni della linea di trasmissione in regime sinusoidale.

Si consideri ad esempio il primo termine della V(z), $V^+(z)$ e per interpretarlo si passi nel dominio del tempo; si supponga per semplicità $V^{+,0} \in R$:

$$V^+(z, t) = \mathrm{Re}\left\{V_0^+ e^{-\Gamma z} e^{j\omega t}\right\} = V_0^+ \mathrm{Re}\left\{e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}\right\} = V_0^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

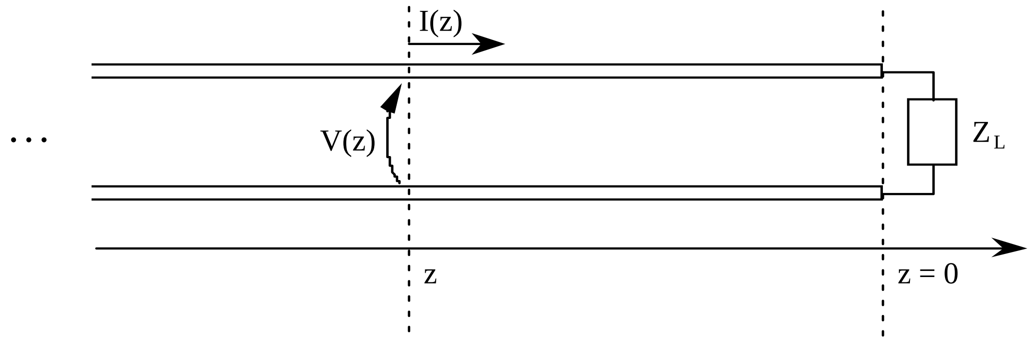
Analizzando questa espressione si deduce che si tratta di una sinusoide che si propaga nella direzione positiva dell'asse z attenuandosi esponenzialmente in ragione del termine $e^{-\alpha z}$. La velocità di propagazione è $v = \omega/\beta$, detta *velocità di fase*. La lunghezza d'onda è $\lambda = 2\pi/\beta$. Per questa ragione α viene detta *costante di attenuazione* mentre β è la *costante di fase*.



La costante di attenuazione α è dovuta alle perdite, cioè alle non idealità di dielettrico e conduttori: infatti se nella espressione di α si pone R = G = 0 si ottiene α = 0.

Elaborando in modo analogo il termine $V^-(z)$ si può ricavare che si tratta di un'onda sinusoidale che si propaga attenuandosi nel verso negativo dell'asse z.

Si può quindi affermare che la generica soluzione in termini di tensione è costituita dalla combinazione (o sovrapposizione) secondo opportuni coefficienti di un'*onda progressiva* e di un'*onda regressiva*. Il caso della corrente è del tutto analogo; si noti che lo sfasamento fra tensione e corrente dipende da Z_c, come avviene per il caso a costanti concentrate. Si noti inoltre che in regime d'onda puramente progressiva, cioè in cui $V_0^-= 0$, si ritrova la legge di Ohm $V = Z_c\, I$. In pratica la linea verrà interrotta in una certa sezione, detta *sezione di carico* in cui verrà connessa ad un monoporta che costituisce appunto il carico. Per comodità l'origine del sistema di riferimento verrà posto al carico, per cui tutte le sezioni della linea corrisponderanno a z negative:



Impedenza e coefficiente di riflessione

Ci si ponga nella generica sezione di ascissa z. Si definisce *coefficiente di riflessione* ρ(z) alla ascissa z il rapporto:

$$\rho(z) = \frac{V^-(z)}{V^+(z)} = \frac{V_0^- \, e^{\Gamma z}}{V_0^+ \, e^{-\Gamma z}} \tag{2.10}$$

Si definisce inoltre *impedenza* $Z_i(z)$ in una generica sezione il rapporto

$$Z_i(z) = \frac{V(z)}{I(z)} \tag{2.11}$$

che rappresenta l'impedenza del monoporta che si vede a destra della sezione considerata.
Al carico (z=0) si ha

$$\rho_L = \rho(0) = \frac{V_0^-}{V_0^+} \quad \Rightarrow \quad \rho(z) = \rho_L\, e^{2\Gamma z} \tag{2.12}$$

inoltre $Z_i(0)$ corrisponderà alla impedenza Z_L del carico, cioè si avrà:

$$Z_L = Z_i(0) = Z_C \frac{V_0^+ + V_0^-}{V_0^+ - V_0^-} \tag{2.13}$$

Confrontando la (2.12) e la (2.13) si ricava la relazione tra ρ_L e Z_L

$$Z_L = Z_C \frac{1 + \rho_L}{1 - \rho_L} \quad \text{oppure} \quad \rho_L = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} \tag{2.14}$$

In una generica sezione si ha

$$Z_i(z) = Z_C \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)} \quad \text{e} \quad \rho(z) = \frac{Z_i(z) - Z_C}{Z_i(z) + Z_C} \tag{2.15}$$

Da quanto scritto si può perciò ricavare $Z_i(z)$ in funzione di Z_L e di Z_C:

$$Z_i(z) = Z_C \frac{Z_L \cosh(\Gamma z) - Z_C \operatorname{senh}(\Gamma z)}{Z_C \cosh(\Gamma z) - Z_L \operatorname{senh}(\Gamma z)} \tag{2.16}$$

La (2.16) è molto utile perché permette di esprimere $Z_i(z)$ cioè il rapporto tra tensione e corrente nella generica sezione mediante i parametri caratteristici della linea (Z_C e Γ) e del carico (Z_L).

Condizione di adattamento in uniformità

Come mostra la (2.10) il coefficiente di riflessione rappresenta il rapporto tra l'onda regressiva (o riflessa) e l'onda progressiva (o diretta). E' un caso notevole quello in cui non è presente l'onda riflessa: si parla di *regime d'onda puramente progressiva* e d è importante per il fatto che spesso è necessario utilizzare il propagarsi del campo (e di V ed I) per trasmettere informazione in una sola direzione con la massima efficienza. In questo caso V_0^- deve risultare nulla, cioè $\rho(z)$ deve risultare nullo $\forall z$, cioè ancora, dalla seconda delle (2.12) e dalla seconda delle (2.14), quando è verificata la *condizione di adattamento in uniformità*:

$$Z_L = Z_C \tag{2.17}$$

La condizione di adattamento corrisponde cioè ad una proprietà della linea e del carico: quando essi sono tali che $Z_L = Z_C$ la condizione di adattamento è verificata ed il carico non "riflette" una onda all'indietro, bensì la assorbe completamente.

Dalla prima delle (2.15) si ricava anche che in adattamento

$$Z_i(z) = Z_C = Z_L$$

Cioè in ogni sezione si "vede" sempre la stessa impedenza che coincide con la impedenza di carico e con la impedenza caratteristica della linea.

Come si è visto avendo posto un vincolo sul carico, che deve avere una impedenza pari a Z_C, cioè avendo fissato la *condizione di carico* della linea, si è determinata una delle costanti dell'integrale generale: in particolare si è ricavato V_0^-. Per determinare anche V_0^+ e quindi il regime elettrico della linea sarà necessario imporre la *condizione di alimentazione*: lo si vedrà più avanti. In condizioni di adattamento le soluzioni (2.9) diventano

$$V(z) = V_0^+ \, e^{-\Gamma z} = V^+(z)$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_C} \, e^{-\Gamma z} = I^+(z)$$

Da cui si ricava

$$V(z) = Z_C \cdot I(z)$$

Si può quindi affermare che quando una linea di trasmissione è adattata, cioè è in regime di onda puramente progressiva, V ed I sono proporzionali secondo un coefficiente complesso che non dipende dalla sezione e coincide con l'impedenza caratteristica della linea. Questo risultato si poteva ricavare anche direttamente dalla (2.11) ricordando che in adattamento $Z_i(z) \equiv Z_C$.

Potenza

La potenza complessa in generica sezione della linea è

$$P_C(z) = \frac{1}{2} V(z) \, I^*(z) = P + jQ$$

dove I* indica il complesso coniugato di I; inoltre

$$P = \mathrm{Re}\{P_C\}$$

è la *potenza attiva* che attraversa la generica sezione nel verso positivo all'asse z. Analogamente

$$Q = \mathrm{Im}\{P_C\}$$

è la *potenza reattiva*.
Esprimendo la impedenza $Z_i(z)$ nel seguente modo:

$$Z_i(z) = R_i(z) + j\,X_i(z)$$

si ha

$$P = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\, Z_i\, I\, I^*\right\} = \frac{1}{2}\, R_i\, |I|^2$$

$$Q = \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2}\, Z_i\, I\, I^*\right\} = \frac{1}{2}\, X_i\, |I|^2$$

Si può dimostrare che la condizione per avere il trasferimento della massima potenza al carico è la condizione di *adattamento in potenza*

$$Z_L = Z_C^*$$

Nel caso di linea priva di perdite (R = G = 0) la condizione di adattamento in potenza coincide con quella di adattamento in uniformità

$$R_L = R_C^* = R_C$$

In applicazioni di telecomunicazioni è molto più importante l'adattamento in uniformità perchè non si vuole trasferire potenza bensì informazione.