Le leggi di Kirchhoff

Circuiti in regime stazionario

Nel caso stazionario si annullano nelle equazioni di Maxwell tutte le derivate temporali.

Prima legge di Kirchhoff

L'equazione di continuità si può scrivere:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

e integrando ambo i membri sul volume Ω, delimitato dalla superficie chiusa S, mediante il teorema di Gauss si ottiene:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \mathrm{d}S = \sum_i I_i = 0$$

La relazione trovata esprime la **prima legge di Kirchhoff** ossia *"la somma algebrica delle correnti che escono da un nodo è nulla"*.

Si osservi che dall'equazione di conservazione della carica, si evince che in condizioni stazionarie, essendo nullo il flusso di **J** attraverso la superficie S, non può esserci accumulo di carica nel volume Ω.

Seconda legge di Kirchhoff

La prima equazione di Maxwell assume la forma:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Il campo elettrico è conservativo e quindi può essere espresso come:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

e calcolando l'integrale di circuitazione di ambo i membri, per quanto noto sul potenziale scalare elettrico Φ, si ottiene:

$$\oint_\ell \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell \mathrm{d}\ell = \sum_i V_i = 0$$

La relazione trovata esprime la **seconda legge di Kirchhoff** ossia *"la somma algebrica delle cadute di tensione lungo una maglia è nulla"*.

Si osservi che in regime stazionario la caduta di potenziale V può essere attribuita esclusivamente alla presenza di un campo elettrico **E** non nullo. Si osservi inoltre che, in condizioni stazionarie, dalla prima equazione di Maxwell si evince che la variazione temporale del flusso del vettore induzione magnetica **B** è nulla e da questo si deduce che non può aver luogo alcun fenomeno di immagazzinamento o dissipazione di energia.

In generale quindi all'interno di un circuito in condizioni stazionarie, le cariche elettriche non sono necessariamente ferme, ma se si muovono, lo fanno in maniera tale che la quantità di carica uscente dal sistema nell'intervallo *d*t è esattamente pari alla quantità di carica che esce dal sistema nello stesso intervallo temporale. Questo significa, alla luce di quanto detto in precedenza, che nel sistema possono essere presenti solo sorgenti tempo invarianti. L'assenza di variazioni temporali comporta poi che un condensatore equivalga a un circuito aperto e un induttore a un corto circuito.

Circuiti in regime non stazionario

Nel caso stazionario non è di norma lecito trascurare le derivate temporali delle grandezze elettromagnetiche pertanto risultano verificate le seguenti relazioni:

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

dalle quali si deduce che ***nel caso non stazionario non valgono le leggi di Kirchhoff***.

Circuiti in regime quasi stazionario

Nel caso quasi stazionario è possibile individuare regioni distinte del circuito in cui sono trascurabili le derivate temporali delle grandezze elettriche e altre in cui sono trascurabili le derivate temporali delle grandezze magnetiche.
Nelle regioni in cui il vettore densità di corrente **J** è non nullo, come noto, si parla di regime quasi stazionario se vale:

$$\text{(c)} \qquad \left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| << |\mathbf{J}| \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \cdot \mathbf{J} \cong 0$$

Se la precedente relazione è verificata, si può integrare l'equazione di continuità procedendo in maniera analoga a quanto fatto nel caso stazionario e si ricava ancora la legge di Kirchhoff per le correnti:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS = \sum_i I_i = 0$$

Si osservi che nel caso quasi stazionario si deve fare attenzione a scegliere la superficie di integrazione S in modo tale che essa non intersechi sezioni del circuito in cui **J** = 0. In tal caso, infatti, la su scritta relazione di trascurabilità (c) perderebbe ovviamente di significato. Dal punto di vista pratico è sufficiente scegliere una superficie S che non racchiuda una sola armatura di un condensatore. Infatti se si considera una superficie S passante attraverso le armature di un condensatore, all'interno delle armature risulta **J** = 0 (e quindi div **J** = 0) nell'ipotesi di dielettrico perfetto e dunque fra le armature non c'è ovviamente corrente di conduzione. All'interno delle armature tuttavia non vale la condizione (c) e dunque div ($\varepsilon\partial\mathbf{E}/\partial t$) = 0.

Il flusso del vettore $\varepsilon\partial\mathbf{E}/\partial t$ attraverso la porzione di superficie contenuta fra le armature non è dunque nullo. Esso non è una corrente in senso stretto, ma *equivale effettivamente ad una corrente*. In regime quasi stazionario infatti, le grandezze sono comunque tempo varianti, e le variazioni temporali di tensioni e correnti comportano ovviamente, nel caso specifico del condensatore, variazioni temporali della carica accumulata sulle armature. Ma poiché *una variazione di carica ΔQ su una delle armature induce una variazione $-\Delta Q$ sull'altra, è evidente che ciò equivale ad una corrente che attraversa il condensatore*.

Tale corrente "equivalente" viene descritta dal vettore $\varepsilon\partial\mathbf{E}/\partial t$, non a caso usualmente indicato con $\mathbf{J}_s$ e chiamato *densità di corrente di spostamento.* In conclusione, <u>in regime quasi-stazionario un condensatore non equivale ad un circuito aperto</u> (diversamente da quanto accade nel caso strettamente stazionario).

Se è verificata la relazione (c) automaticamente risulta vera anche la relazione:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} \cong 0$$

Il significato di questa scrittura giustifica ulteriormente l'importanza del regime temporale in atto nel circuito e chiarisce l'interpretazione che si può dare del regime quasi stazionario come successione di stati stazionari: se si ha a che fare con sorgenti tempo varianti *lentamente variabili*, gli effetti delle variazioni si propagano istantaneamente in tutti i punti del circuito ed è quindi lecito parlare di successione di stati stazionari.

Nelle regioni in cui il vettore $\mathbf{E}$ è non nullo, si parla di regime quasi stazionario se vale:

(d) $$\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right| << |\nabla\Phi| \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{E} \cong -\nabla\Phi \neq 0$$

Poiché il campo elettrico è ancora esprimibile mediante il potenziale scalare elettrico, si può ancora procedere come nel caso stazionario e calcolare l'integrale di circuitazione che conferma la validità della legge di Kirchhoff per le tensioni anche nel caso quasi stazionario:

$$\oint_{\ell} \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{\ell}\,d\ell = \sum_{i} V_i = 0$$

Quando si calcola l'integrale di circuitazione, occorre accertarsi che la linea ℓ non contenga regioni in cui $\mathbf{E} = 0$, altrimenti la relazione di trascurabilità (d) perderebbe ovviamente di significato. Dal punto di vista pratico è sufficiente scegliere una linea ℓ che non contenga induttori.

Per quel che riguarda gli induttori è necessario precisare che, pur essendo nullo il campo elettrico $\mathbf{E}$ al loro interno, la caduta di tensione misurabile ai loro capi non è nulla. Si ricordi infatti che negli induttori non vale la approssimazione (d) e quindi la tensione ai capi (P,Q) dell'induttore deve essere espressa nella forma più generale

$$V_{PQ} = \int_{Q}^{P} \left(\nabla\Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\ell} \, d\ell = \frac{\partial}{\partial t} \int_{Q}^{P} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\ell} \, d\ell$$

essendo giustificata l'ultima uguaglianza dal fatto che la variazione del potenziale scalare elettrico Φ è nulla ($\mathbf{E} = 0$).

Dalla relazione su scritta si deduce che la variazione del potenziale ai capi degli induttori è dovuta alla presenza di campi magnetici tempo varianti. Si osservi quindi che in regime quasi stazionario la presenza di un campo elettrico **E** non nullo non è l'unica origine della caduta di potenziale nel circuito. Variazioni di potenziale elettrico possono essere determinate da campi magnetici variabili nel tempo. In conclusione, quindi, <u>in regime quasi-stazionario un induttore non equivale ad un cortocircuito</u> (diversamente da quanto accade nel caso strettamente stazionario).