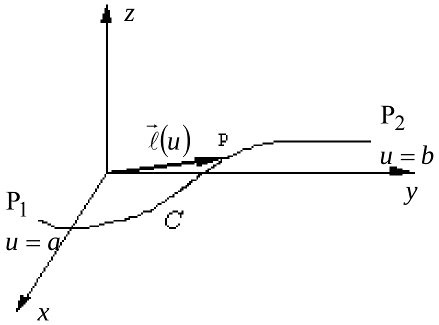
A5 - Integrali di campi scalari e vettoriali su linee, superfici e volumi

A5.1 - INTEGRALE DI LINEA

Sia C una curva orientata di $\mathbf{R}^3$, di estremi P_1 e P_2. Supponiamo che C sia descritta in forma parametrica dalla funzione vettoriale $\vec{\ell}$, dipendente dal parametro scalare u:



$$\vec{\ell}: \quad u \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \subseteq \mathbf{R} \to [C] \subseteq \mathbf{R}^3 \qquad P_1 = \vec{\ell}(\mathrm{a})$$

$$P_2 = \vec{\ell}(\mathrm{b})$$

Si ha pertanto:

$$\vec{\ell}(u) = \mathrm{x}(u)\hat{\mathbf{i}}_x + \mathrm{y}(u)\hat{\mathbf{i}}_y + \mathrm{z}(u)\hat{\mathbf{i}}_z$$

$\vec{\ell}(u)$ è il vettore, funzione del parametro u, che individua il generico punto della curva C. Sia ora f una funzione definita sull'insieme $[C]$ dei punti di C. E' noto dall'Analisi che la quantità:

$$_C\int_{P_1}^{P_2} f\,\mathrm{d}\ell$$

chiamata *integrale curvilineo*, è indipendente dalla parametrizzazione $\vec{\ell}$ scelta ed inoltre risulta sempre: $\mathrm{d}\ell = \left\|\vec{\ell}'(u)\right\| \mathrm{d}u$. Si perviene così facilmente alla formula risolutiva dell'integrale curvilineo:

$$_C\int_{P_1}^{P_2} f(\vec{\ell}(u))\,\mathrm{d}\ell = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(\vec{\ell}(u)) \left\|\vec{\ell}'(u)\right\| \mathrm{d}u$$

Si osservi che se $f(\vec{\ell}(u)) \equiv 1$, l'integrale $\int_C \mathrm{d}\ell = \int_C \left\|\vec{\ell}'(u)\right\| \mathrm{d}u$ fornisce la *lunghezza* della curva C.

La funzione f può essere sia una funzione scalare che una funzione vettoriale. Ad esempio, si consideri un campo scalare ϕ continuo e definito lungo la curva C. La grandezza:

$$I_C(\phi) = {}_C\int_{P_1}^{P_2} \phi(\vec{\ell}(u))\,\mathrm{d}\ell = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \phi(\vec{\ell}(u)) \left\|\vec{\ell}'(u)\right\| \mathrm{d}u$$

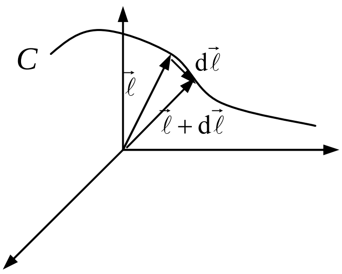
è detta <u>integrale di linea del campo scalare ϕ lungo la linea *C*.</u>

Sia ora **V** un campo vettoriale definito e continuo lungo C.

La grandezza:

$$I_C(\mathbf{V}) = \int_{C\,P_1}^{P_2} \mathbf{V}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_C \mathrm{V_x\,dx + V_y\,dy + V_z\,dz}$$

è detta <u>integrale del campo vettoriale **V** lungo la linea *C*</u>. Osserviamo che la quantità $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{dx}\,\hat{\mathbf{i}}_x + \mathrm{dy}\,\hat{\mathbf{i}}_y + \mathrm{dz}\,\hat{\mathbf{i}}_z$ è un vettore tangente a *C* e di lunghezza infinitesima $\mathrm{d}\ell$.



Pertanto l'integrale suddetto è la somma lungo *C* delle componenti tangenziali di **V** rispetto alla curva stessa. La grandezza integranda $\mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{V_x dx + V_y dy + V_z dz}$ è una *forma differenziale* di grado 1.

Si può scrivere anche:

$$I_C(\mathbf{V}) = \int_C \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_\ell \mathrm{d}\ell$$

dove $\hat{\mathbf{i}}_\ell$ è il versore tangente a *C* nel generico punto P, avente verso concorde con l'orientazione della curva. Se *C* è una curva *chiusa* semplice (cioè non interseca se stessa in alcun punto) allora l'integrale lungo tale curva:

$$I_C(\mathbf{V}) = \oint_C \mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_C \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_\ell \mathrm{d}\ell$$

è detto *circuitazione* di **V** lungo *C*.

Osserviamo che l'integrale di linea di un campo vettoriale è un caso particolare di integrale curvilineo, nel quale la funzione *f* è così definita:

$$f(\vec{\ell}(u)) = \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_\ell$$

Il contributo della parametrizzazione $\vec{\ell}$ è contenuto nel versore tangente. Si può infatti dimostrare che risulta: $\hat{\mathbf{i}}_\ell = \vec{\ell}'(u) \big/ \left\|\vec{\ell}'(u)\right\|$

Si ha quindi:

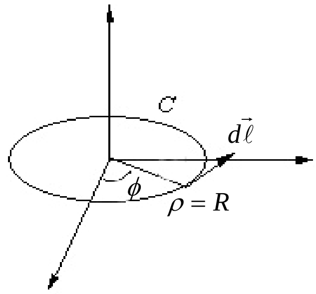
$$\int_{C\,P_1}^{P_2} \mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{C\,P_1}^{P_2} \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_\ell \mathrm{d}\ell = \int_a^b \mathbf{V}\cdot\frac{\vec{\ell}'(u)}{\left\|\vec{\ell}'(u)\right\|}\left\|\vec{\ell}'(u)\right\| \mathrm{d}u = \int_a^b \mathbf{V}\cdot\vec{\ell}'(u)\,\mathrm{d}u$$

che rappresenta la formula risolutiva per l'integrale di linea del campo vettoriale.

$$\boxed{\int_{C\,P_1}^{P_2} \mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \int_a^b \mathbf{V}\cdot\vec{\ell}'(u)\,\mathrm{d}u}$$

Esempio

Circuitazione di un vettore **V**(x,y,z) lungo un cerchio di raggio R centrato nell'origine e giacente sul piano xy (vedi figura).



Le equazioni di *C* in coordinate cilindriche sono:

$$\begin{cases} \rho = \mathrm{R} \\ \mathrm{z} = 0 \end{cases}$$

In forma cartesiana: $x^2 + y^2 = R^2$

L'equazione della curva in forma parametrica è:

$$\begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{R}\cos\Phi \\ \mathrm{y} = \mathrm{R}\sin\Phi \\ \mathrm{z} = 0 \end{cases}$$

In forma vettoriale:

$$\vec{\ell}(\Phi) = \mathrm{R}\cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{x} + \mathrm{R}\sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{y} + 0\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z}$$

Si ha quindi:

$$\oint_C \mathbf{V}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \mathbf{V}\cdot\vec{\ell}'(\Phi)\,\mathrm{d}\Phi = \int_0^{2\pi} \mathbf{V}\cdot\left[-\mathrm{R}\sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{x} + \mathrm{R}\cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{y} + 0\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z}\right]\mathrm{d}\Phi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\mathrm{V}_\mathrm{x}\,\mathrm{R}\sin\Phi\,\mathrm{d}\Phi + \mathrm{V}_\mathrm{y}\,\mathrm{R}\cos\Phi\,\mathrm{d}\Phi\right]$$

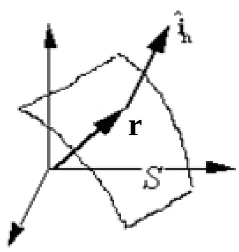
Siccome x,y,z sono funzioni di ϕ, basta esprimere **V** in funzione di ϕ e si può svolgere facilmente l'integrale.

Allo stesso risultato si poteva pervenire anche scrivendo l'integrale nella forma $\int_C \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_\ell \mathrm{d}\ell$, e ricordando che la circonferenza sul piano xy è la seconda linea coordinata del sistema di coordinate cilindriche. Pertanto, per risolvere l'integrale è sufficiente osservare che in questo caso risulta $\hat{\mathbf{i}}_\ell = \hat{\mathbf{i}}_\phi = -\sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{x} + \cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{y} + 0\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z}$, e inoltre che l'elemento di linea $d\ell$ coincide con il secondo arco elementare $ds_2 = h_2 d\Phi$, perciò $\mathrm{d}\ell = \mathrm{R}\,\mathrm{d}\Phi$.

A5.2 - INTEGRALE SUPERFICIALE E FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE

Sia *S* una superficie orientata di $\mathbf{R}^3$ descritta in forma parametrica dalla funzione vettoriale **r**, dipendente dai parametri scalari *u*,*v*:

$$\boxed{\mathbf{r}:\quad (u,v)\in D = \{[\mathrm{a},\mathrm{b}]\times[\mathrm{c},\mathrm{d}]\}\subseteq \mathbf{R}^2 \;\rightarrow\; [S]\subseteq \mathbf{R}^3}$$



Usando la notazione vettoriale: $\mathbf{r}\,(u,v) = \mathrm{x}(u,v)\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{x}} + \mathrm{y}(u,v)\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{y}} + \mathrm{z}(u,v)\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{z}}$

r è il vettore, funzione dei parametri *u* e *v*, che individua il generico punto della superficie *S*.
Sia ora *f* una funzione scalare o vettoriale definita sull'insieme [*S*] dei punti di *S*. E' noto dall'Analisi che la quantità:

$$\int_S f\ \mathrm{d}S$$

chiamata integrale superficiale, è indipendente dalla parametrizzazione **r** scelta ed inoltre risulta sempre:

$$\mathrm{d}S = \left\|\mathbf{r}_{\mathrm{u}} \times \mathbf{r}_v\right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,\ \text{dove}: \begin{cases} \mathbf{r}_{\mathrm{u}} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \\ \mathbf{r}_v = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \end{cases}$$

Si perviene così facilmente alla formula risolutiva dell'integrale di superficie:

$$\int_S f\ \mathrm{d}S = \int_D f\,(\mathbf{r}(u,v))\left\|\mathbf{r}_{\mathrm{u}} \times \mathbf{r}_v\right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\int_{\mathrm{c}}^{\mathrm{d}} f\,(\mathbf{r}(u,v))\left\|\mathbf{r}_{\mathrm{u}} \times \mathbf{r}_v\right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Si osservi che se $f\,(\mathbf{r}(u,v)) \equiv 1$, l'integrale $\int_S \mathrm{d}S = \int_S \left\|\mathbf{r}_{\mathrm{u}} \times \mathbf{r}_v\right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$ fornisce l'*area* della superficie *S*.

La funzione *f* può essere sia una funzione scalare che una funzione vettoriale. Ad esempio, si consideri un campo scalare ϕ continuo e definito lungo la superficie *S*. La grandezza:

$$I_S(\phi) = \int_S \phi\ \mathrm{d}S\ = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\int_{\mathrm{c}}^{\mathrm{d}} \phi(\mathbf{r}(u,v))\left\|\mathbf{r}_{\mathrm{u}} \times \mathbf{r}_v\right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

è detta <u>integrale superficiale del campo scalare ϕ lungo la superficie *S*.</u>

Sia ora **V**(x,y,z) un campo vettoriale definito e continuo lungo *S*. Sia inoltre $\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{n}}$ il versore normale alla superficie *S* nel generico punto P. Per quanto riguarda il verso di $\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{n}}$, per convenzione viene considerato diretto verso l'esterno nel caso di una superficie chiusa. Se *S* è una superficie aperta, $\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{n}}$ è diretto dalla faccia positiva a quella negativa, avendo stabilito a priori quale sia la faccia positiva della superficie. Se *S* ha per contorno una linea chiusa orientata γ, si assume per $\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{n}}$ il verso in cui avanza una vite che ruota nel verso positivo fissato su γ. La quantità:

$$F_S(\mathbf{V}) = \iint_S \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S$$

è detta *flusso* del campo vettoriale **V** attraverso la superficie *S*.

Analogamente individueremo con

$$F_S(\mathbf{V}) = \oiint_S \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n} \mathrm{d}S$$

il flusso di **V** attraverso una superficie chiusa.

Si osservi che il flusso di un campo vettoriale è un caso particolare di integrale superficiale, nel quale la funzione f è così definita:

$$f(\mathbf{r}(u,v)) = \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n}$$

Il contributo della parametrizzazione **r** è contenuto nel versore normale $\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n}$.

Si può infatti dimostrare che:

$$\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n} = \frac{\mathbf{r}_\mathrm{u} \times \mathbf{r}_v}{\left\| \mathbf{r}_\mathrm{u} \times \mathbf{r}_v \right\|}$$

Si ha quindi:

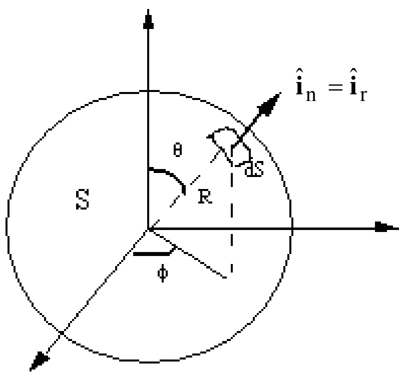
$$\iint_S \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n} \mathrm{d}S = \int_\mathrm{a}^\mathrm{b} \int_\mathrm{c}^\mathrm{d} \mathbf{V} \cdot \frac{\mathbf{r}_\mathrm{u} \times \mathbf{r}_v}{\left\| \mathbf{r}_\mathrm{u} \times \mathbf{r}_v \right\|} \left\| \mathbf{r}_\mathrm{u} \times \mathbf{r}_v \right\| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \int_\mathrm{a}^\mathrm{b} \int_\mathrm{c}^\mathrm{d} \mathbf{V} \cdot [\mathbf{r}_\mathrm{u} \times \mathbf{r}_v] \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

che rappresenta la formula risolutiva per l'integrale di flusso del campo vettoriale.

$$\boxed{\iint_S \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n} \, \mathrm{d}S = \int_\mathrm{a}^\mathrm{b} \int_\mathrm{c}^\mathrm{d} \mathbf{V} \cdot [\mathbf{r}_\mathrm{u} \times \mathbf{r}_v] \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v}$$

Esempio

Flusso del vettore **V**(x,y,z) attraverso una superficie sferica centrata nell'origine di raggio R (figura).



L'equazione in coordinate sferiche è r = R.

In forma cartesiana: $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 = \mathrm{R}^2$

L’equazione della superficie in forma parametrica è:

$$\begin{cases} x = R \sin\theta \cos\Phi \\ y = R \sin\theta \sin\Phi \\ z = R \cos\theta \end{cases}$$

e cioè: $\mathbf{r}(\theta,\Phi) = R \sin\theta \cos\Phi \, \hat{\mathbf{i}}_x + R \sin\theta \sin\Phi \, \hat{\mathbf{i}}_y + R \cos\theta \, \hat{\mathbf{i}}_z$

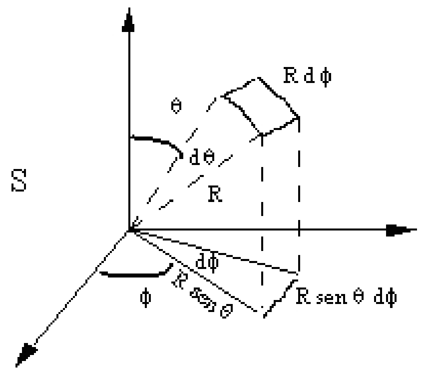
L’integrale si può risolvere facilmente osservando che la superficie sferica coincide con la prima superficie coordinata del sistema di coordinate sferiche. Perciò in questo caso risulta:

$$\hat{\mathbf{i}}_n = \frac{\mathbf{r}(\theta,\Phi)}{\|\mathbf{r}(\theta,\Phi)\|} = \frac{\mathbf{r}}{R} = \hat{\mathbf{i}}_r$$

Ricordando inoltre che:

$$\hat{\mathbf{i}}_r = \sin\theta \cos\Phi \, \hat{\mathbf{i}}_x + \sin\theta \sin\Phi \, \hat{\mathbf{i}}_y + \cos\theta \, \hat{\mathbf{i}}_z$$

e tenendo conto che l’elemento infinitesimo di superficie sferica è (figura):



$$dS = dS_1 = h_2 h_3 d\theta \, d\Phi = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\Phi$$

(L’elemento infinitesimo di superficie dS si può ottenere anche usando la formula $\|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\Phi\| \, d\theta \, d\Phi$, naturalmente)

si ha infine:

$$\oiint_S \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (V_x \sin\theta\cos\Phi + V_y \sin\theta\sin\Phi + V_z \cos\theta) \, R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\Phi$$

Osserviamo che il flusso di **V** attraverso S si poteva ricavare anche mediante la formula risolutiva generale del flusso di un campo vettoriale, anziché sfruttando la conoscenza delle grandezze note $\hat{\mathbf{i}}_r$ e dS (verificarlo per esercizio).

Un metodo alternativo che si può utilizzare quando è richiesto di effettuare un integrale su di una superficie sferica consiste nell’utilizzo della definizione di angolo solido. A tal proposito, si ricordi che l’angolo solido $\Delta\Omega$ sotteso ad un elemento di superficie ΔS vale:

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S}{r^2} \quad [\text{sterad}]$$

L'elemento di superficie sferica può scriversi pertanto nel seguente modo:

$$dS = r^2 d\Omega$$

dove l'angolo sotteso all'elemento infinitesimo di superficie sferica vale:

$$d\Omega = \sin\theta \; d\theta \; d\Phi$$

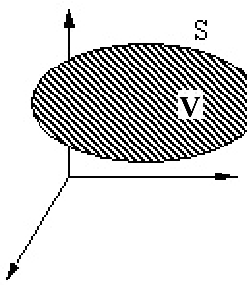
Pertanto, il flusso attraverso S può riscriversi come:

$$\oiint_S \underbrace{\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n}}_{\wp} \; dS = \oiint_{4\pi} \left[\wp \, r^2\right] \, d\Omega = \oiint_{4\pi} \mathrm{I} \, d\Omega$$

cioè come un integrale nella variabile Ω. L'applicazione di questo metodo è particolarmente vantaggiosa quando la quantità $\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n}$ risulta inversamente proporzionale a r^2 (questo è il caso, ad esempio, della potenza irradiata da un'antenna a grande distanza): infatti, in questo caso, il problema si riconduce all'integrazione di una funzione scalare I che non dipende da r.

A5.3 - INTEGRALE DI VOLUME

Si consideri una superficie chiusa *S* che racchiude una regione V dello spazio $\mathbf{R}^3$. Si possono allora avere i seguenti integrali di volume:



$$\iiint_V \mathrm{a} \; \mathrm{d}V \quad \text{Integrale di uno scalare}$$

$$\iiint_V \mathbf{u} \; \mathrm{d}V \quad \text{Integrale di un vettore}$$

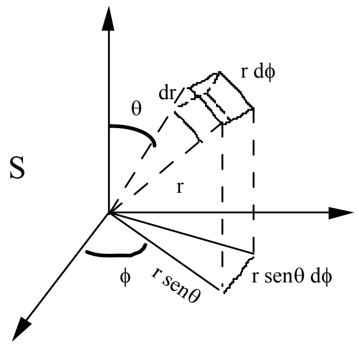
Naturalmente, se **u** è espresso, ad esempio, in forma cartesiana:

$$\mathbf{u} = \mathrm{u}_\mathrm{x}\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{x} + \mathrm{u}_\mathrm{y}\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{y} + \mathrm{u}_\mathrm{z}\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z} \quad \text{risulta :}$$

$$\iiint_V \mathbf{u} \; \mathrm{d}V = \iiint_V \mathrm{u}_\mathrm{x} \mathrm{d}V \; \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{x} + \iiint_V \mathrm{u}_\mathrm{y} \mathrm{d}V \; \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{y} + \iiint_V \mathrm{u}_\mathrm{z} \mathrm{d}V \; \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z}$$

e ci si riconduce quindi all'integrale di 3 funzioni scalari .

Gli integrali di volume, come quelli curvilinei o di superficie, possono essere effettuati, a scelta, in uno dei sistemi di riferimento disponibili. Nel caso di coordinate cartesiane, dV diventa, banalmente, dx dy dz. In un sistema di riferimento sferico invece, occorrerà esprimere il volume elementare nel modo seguente (vedi figura):



$$dV = h_1 h_2 h_3 \, dr \, d\theta \, d\Phi = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\Phi$$