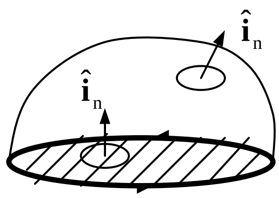
A7 – I principali teoremi del calcolo integro-differenziale

A7.1 - Teorema di Stokes o della circuitazione

Il teorema di Stokes afferma quanto segue: "La circuitazione di un campo vettoriale **A** lungo una arbitraria linea chiusa γ, appartenente al dominio Ω di definizione del campo, è pari al flusso del rotazionale del campo medesimo attraverso una **qualunque** superficie *S* avente per contorno la linea *γ*". In formule:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S_\gamma} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS$$

Si osservi che la superficie che si appoggia a γ (vedi figura) può essere qualunque, pertanto per agevolare il calcolo conviene effettuare sempre la scelta di S_γ "più comoda". Il verso della normale $\hat{\mathbf{i}}_n$ deve essere concorde con il verso di percorrenza di γ, secondo la "regola della vite".



Questo teorema ha validità abbastanza generale, purché il campo vettoriale **A** e il suo dominio di definizione Ω soddisfino opportune condizioni di regolarità. In pratica, il teorema di Stokes è valido in tutto il dominio Ω con le seguenti limitazioni: è necessario che **A** sia un campo vettoriale di classe C^1 (differenziabile almeno una volta e con derivate parziali prime continue) e che Ω sia un insieme stellato rispetto ad ogni suo punto, o più in generale, *a connessione lineare semplice* (cioè ogni curva chiusa in Ω è contraibile in un punto ancora appartenente allo spazio Ω).

<u>Esempio</u>

Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{A} = \frac{-y}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{i}}_x + \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{i}}_y$ (campo di Biot e Savart) , definito in $\mathbf{R}^2 - \{0, 0\}$.

Si verifichi che risulta $\nabla \times \mathbf{A} = 0$, ma che la circuitazione attraverso una linea chiusa che racchiude l'origine non è nulla.

Ciò non deve stupire, poiché il dominio di definizione di **A** non è semplicemente connesso (infatti una linea che racchiude l'origine si contrae nell'origine stessa, che però non appartiene a Ω): perciò in questo caso il teorema di Stokes non vale.

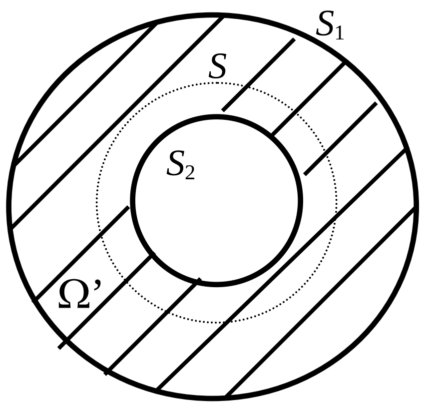
A7.2 - Teorema di Gauss-Green o della divergenza

Il teorema della divergenza afferma quanto segue: "Il flusso di un campo vettoriale **A** attraverso una superficie chiusa *S*, appartenente al dominio Ω di definizione del campo, è pari all'integrale della divergenza del campo stesso esteso al volume *V* racchiuso dalla superficie *S*". In formule:

$$\oint\!\!\oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n} \, \mathrm{d}S = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, \mathrm{d}V$$

La normale $\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n}$ è sempre orientata verso l'esterno di *S*. Analogamente al teorema di Stokes, che consente di ricondurre l'integrale di linea ad un integrale doppio, la formula di Gauss consente di ricondurre il flusso ad un integrale triplo. Anche questo teorema presenta delle limitazioni, simili a quelle del teorema di Stokes. Perché il teorema di Gauss sia valido in tutto il dominio di definizione del campo Ω, è necessario che Ω sia un dominio *a connessione superficiale semplice*. In altri termini, deve verificarsi che "ogni superficie chiusa *S* in Ω racchiuda un volume interamente incluso in Ω", o, equivalentemente, che "ogni superficie chiusa *S* sia contraibile fino a racchiudere un volume infinitesimo appartenente a Ω".

Ad esempio, se Ω' è il volume racchiuso fra due superfici sferiche S_1 e S_2 (figura), la condizione suddetta non è soddisfatta (basta infatti prendere una qualunque superficie *S* concentrica con S_1 e S_2). Pertanto, per un campo vettoriale **A** definito in Ω' il teorema della divergenza non vale.



A7.3 – Altri teoremi e relazioni integro-differenziali

1) $\oint_C \Phi \,\hat{\mathbf{i}}_\ell \, d\ell = \iint_S \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n} \times \mathbf{A} \, dS$

2) $\oiint_S \Phi \,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n} \, dS = \iiint_V \nabla\Phi \, dV$ (teorema del gradiente)

3) $\oiint_S \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n} \times \mathbf{A} \, dS = \iiint_V \nabla \times \mathbf{A} \, dV$ (teorema del rotore)

4) $\oiint_S \Phi \dfrac{\partial \psi}{\partial n} dS = \iiint_V \left(\Phi \nabla^2 \psi + \nabla\Phi \cdot \nabla \psi\right) dV$ (prima identità di Green scalare)

5) $\oiint_S \left(\Phi \dfrac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \dfrac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS = \iiint_V \left(\Phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \Phi\right) dV$ (seconda identità di Green scalare)

6) $\oiint_S \left(\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B}\right) \cdot \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n} \, dS = \iiint_V \left(\nabla \times \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}\right) dV$

(prima identità di Green vettoriale)

7) $\oiint_S \left(\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A}\right) \cdot \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n} \, dS = \iiint_V \left(\mathbf{B} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}\right) dV$

(seconda identità di Green vettoriale)