I potenziali elettrico e magnetico

Occorre distinguere, preliminarmente, fra il corso stazionario e quello non stazionario.

a) Caso stazionario

Nel caso stazionario, tutte le derivate temporali presenti nelle equazioni di Maxwell si annullano. Dunque, la prima equazione di Maxwell in forma differenziale diventa:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Oppure, considerando la corrispondente equazione in forma integrale, si ha:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Quindi in questo caso **E** è un campo vettoriale conservativo, e può essere espresso come gradiente di un opportuno campo scalare ϕ:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \qquad \Phi \quad \textit{Potenziale scalare elettrico}$$

La ragione del segno – davanti al gradiente è di carattere storico, si tratta di una convenzione adottata in elettromagnetismo che non altera la sostanza del discorso.

Dati 2 punti P e Q dello spazio, si definisce ***tensione*** fra i punti Q e la grandezza

$$\int_Q^P \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} = [\Phi(Q) - \Phi(P)] \overset{\Delta}{=} V_{QP} = -V_{PQ}$$

Naturalmente, la tensione dipende solo dai punti P e Q e non dal percorso sul quale viene calcolato l'integrale, essendo E conservativo. Si ricordi inoltre che ϕ è definito a meno d una costante additiva; per convenzione, tale arbitrarietà viene eliminata imponendo che il potenziale sia nullo quando la distanza dalle sorgenti del campo tende all'infinito, e in tal caso ϕ viene spesso indicato con V. In altri termini:

$$V(P) \overset{\Delta}{=} \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} \qquad \text{con } V(\infty) = 0$$

L'equazione di divergenza relativa all'induzione magnetica è:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

B è quindi un campo solenoidale e si può supporre che sia esprimibile tramite il rotazionale di un opportuno vettore **A**:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

A è detto *potenziale vettore magnetico*, per analogia col potenziale elettrico ϕ. Si osservi anche che **A** è definito a meno del gradiente di un campo scalare arbitrario.

E’ importante sottolineare che il campo E.M. è completamente caratterizzato una volta che siano noti i potenziali **A** e ϕ. L’uso dei potenziali in luogo dei campi **E** ed **H** è in generale molto vantaggioso. In particolare, ϕ ha il vantaggio di essere uno scalare, più semplice da trattare rispetto ai vettori.

E stazionario	CONSERVATIVO	$\oint \mathbf{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$	$\nabla\times\mathbf{E} = 0$	$\mathbf{E} = -\nabla\Phi$
B	SOLENOIDALE	$\oiint \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{i}}_n dS = 0$	$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$	$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$

Tabella 1- Caso stazionario: schema riassuntivo

b) Caso non stazionario

Anche nel caso non stazionario sarebbe utile continuare ad avere dei potenziali che, opportunamente derivate, forniscano i campi. Per quanto riguarda **B**, continua a valere l’equazione:

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

Si può quindi scrivere ancora:

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \qquad \mathbf{A}\ \textit{potenziale vettore magnetico}$$

E, invece, non è più irrotazionale, essendo $\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$.

Tuttavia si può sostituire la precedente equazione nella prima equazione di Maxwell:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{A}) = -\nabla\times\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)$$

e quindi:

$$\nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Essendo il vettore $\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ irrotazionale, si può scrivere:

$$\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\Phi$$

ϕ è detto ancora potenziale scalare elettrico, ma è una quantità in generale diversa dal potenziale nel caso stazionario!

Riassumendo, nel caso non stazionario valgono le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} & (*) \\ \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} & (**) \end{cases}$$

Si noti anche che nel caso stazionario **non ha senso** definire la tensione fra 2 punti, infatti:

$$\int_Q^P \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_Q^P \left(-\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{\ell} = \Phi(Q) - \Phi(P) - \frac{\partial}{\partial t} \int_Q^P \mathbf{A} \cdot d\vec{\ell}$$

Compare cioè, oltre alla differenza di potenziale, un termine addizionale che in generale dipende dal cammino scelto per effettuare l'integrale tra Q e P (infatti, il vettore **A** per definizione non è conservativo, essendo $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \neq 0$).

Si è detto che **A** è definito a meno del gradiente di una funzione scalare $\psi(x, y, z, t)$, essendo, per le proprietà degli operatori differenziali:

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\psi) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\psi = \nabla \times \mathbf{A}$$

In questo caso, per via dell'equazione (*), tale arbitrarietà si riflette anche sulla scelta del potenziale scalare ϕ. Infatti, sia **A** un potenziale vettore, e sia **A**' un altro potenziale vettore, con $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi(x, y, z, t)$. Si ha:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\psi = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\frac{\partial}{\partial t}\psi = \\ &= -\nabla\Phi' - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \text{con } \Phi' = \Phi + \frac{\partial\psi}{\partial t} \end{aligned}$$

In generale, data una coppia di potenziali (**A**, ϕ), è quindi possibile passare ad una coppia (**A**', ϕ'), del tutto equivalente, mediante la trasformazione (trasformazione di gauge):

$$\begin{cases} \mathbf{A}'(x, y, z, t) = \mathbf{A}(x, y, z, t) + \nabla\psi(x, y, z, t) \\ \Phi'(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z, t) + \dfrac{\partial}{\partial t}\psi(x, y, z, t) \end{cases}$$

Tale arbitrarietà può essere eliminata mediante una opportuna scelta (gauge) della funzione scalare ψ.

Molto comune è la *scelta di Lorentz*:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

Tale scelta, essendo un legame fra i potenziali **A** e ϕ, equivale a porre un vincolo su ψ. Il motivo di tale scelta è dovuto al fatto che con essa, come si vedrà, si semplifica notevolmente l'equazione di Helmholtz non omogenea.

D’altra parte, essa non implica una perdita di generalità, proprio in virtù dell’arbitrarietà suddetta.

Nel caso stazionario, l’arbitrarietà su $\mathbf{A}$ si elimina di solito mediante la scelta di Coulomb:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$