Richiami su numeri complessi

- **Insieme *C* dei numeri complessi**

E' l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali

$$Z = (Z_R, Z_I) = Z_R + jZ_I; \quad Z_R, Z_I \in R$$

$$j \stackrel{\Delta}{=} (0,1)$$ *unità immaginaria*

Si noti che *C* contiene *R*; in particolare l'insieme delle coppie del tipo (a,0), coincide con l'insieme R.

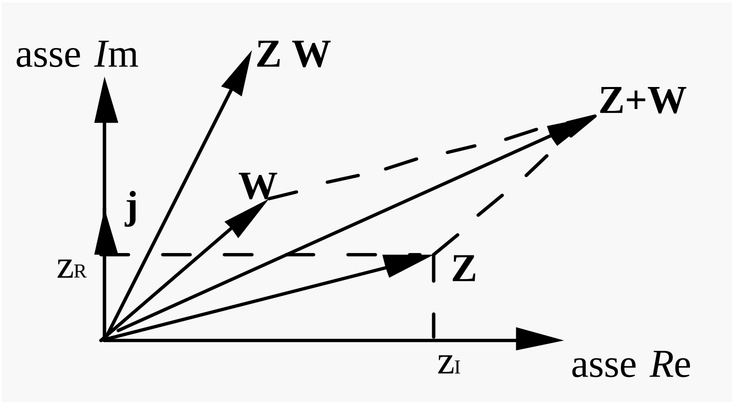
Richiami su numeri complessi (2)

- **Operazioni sui numeri complessi**

coniùgio (o coniugato) $Z^* = Z_R - j\,Z_I$

somma $Z + W = Z_R + W_R + j\left(Z_I + W_I\right)$

prodotto $Z\,W = Z_R\,W_R - Z_I\,W_I + j\left(Z_I\,W_R + Z_R\,W_I\right)$



- *Esistono inoltre le seguenti operazioni a risultato reale:*

modulo $|Z| = \sqrt{Z_R^2 + Z_I^2} = \sqrt{Z \cdot Z^*}$

argomento o fase $\arg(Z) = \angle Z = arctg\,\dfrac{Z_I}{Z_R}$

Richiami su numeri complessi (3)

Un numero complesso può essere scritto tramite modulo ed argomento nel seguente modo:

$$Z = |Z| e^{j\,\arg(Z)} = |Z| \left[\cos(\angle Z) + j\sin(\angle Z)\right]$$

Come conseguenza, il prodotto di due numeri complessi verifica la seguente proprietà:

$$ZW = |Z||W| e^{j\,[\arg(Z)+\arg(W)]}$$

$$\begin{cases} |ZW| = |Z||W| \\ \arg(ZW) = \arg(Z) + \arg(W) \end{cases}$$

Richiami su spazi vettoriali

Sia *K* un campo, detto campo degli scalari e sia *V* un insieme non vuoto nel quale siano definite le operazioni di addizione e di moltiplicazione per uno scalare, tali che:

$\forall\, u, v \in V \quad \exists \quad u+v \in V$ (chiusura rispetto alla somma)

$\forall\, u \in V,\ a \in K \quad \exists \quad a\,u \in V$ (chiusura rispetto al prodotto)

allora *V* è detto spazio vettoriale sul campo *K* se sussistono i seguenti assiomi:

assiomi della addizione

A1) $\forall\, u, v, w \in V, \quad (u+v)+w = u+(v+w)$

A2) $\exists\, \text{ø} \in V: \quad u+\text{ø} = u \quad \forall\, u \in V$

A3) $\forall\, u \in V, \quad \exists\, (-u) \in V: \quad u+(-u) = \text{ø}$

A4) $\forall\, u, v \in V \quad u+v = v+u$

Richiami su spazi vettoriali (2)

assiomi della moltiplicazione

M1) $\forall\ a \in K, \quad u,\ v \in V, \quad a(u+v)=a\,u+a\,v$

M2) $\forall\ a,\ b \in K, \qquad u \in V, \quad (a+b)\,u = a\,u + b\,u$

M3) $\forall\ a,\ b \in K, \qquad u \in V, \quad (a\,b)\,u = a\,(b\,u)$

M4) per lo scalare "unità" $1 \in K, \quad 1\ u = u \qquad \forall\ u \in V$

Gli elementi di V si dicono **vettori**.

Spazi vettoriali normati

Una **norma** su uno spazio vettoriale **V** è un'applicazione $\|\ .\ \| : V \to R^+$ tale che, $\forall a \in K$ e $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ valgono le proprietà :

1) $\|a\mathbf{u}\| = |a| \cdot \|\mathbf{u}\|$ 2) $\underbrace{\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|}_{\text{Disuguaglianza triangolare}}$ 3) $\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Uno **spazio normato** è una coppia $(V, \|\ \ \|)$ dove $\|\ .\ \| \ge 0$ è la norma

Richiami su spazi vettoriali (3)

Una **metrica** o **distanza** nell'insieme **A** è un'applicazione d: $A \times A \rightarrow R^{+}$ che soddisfa, $\forall \; x, y \in \mathrm{A}$, le seguenti proprietà:

1. $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$
2. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare)
3. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Uno **spazio metrico** è una coppia (A,d) dove d è la metrica.

Ogni spazio vettoriale normato è anche uno spazio metrico. Infatti, dati 2 vettori **u** e **v**, si può definire la distanza fra di essi mediante la formula:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left\| \mathbf{u} - \mathbf{v} \right\|$$

Richiami su spazi vettoriali (4)

Spazi unitari

Sia **V** uno spazio vettoriale sul campo K, (ad esempio R o C), in cui è definita una funzione $\langle . | . \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow K$, chiamata prodotto interno, che verifica le seguenti proprietà, $\forall u, v, w \in \mathbf{V} \quad e \quad \forall a \in K$:

1. $\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle \geq 0 \quad \text{con} \quad \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$ $\qquad \langle . | . \rangle$ funzione *definita positiva*
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle$
3. $\langle a\, \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = a \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$
4. $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle$
5. $\langle \mathbf{u} | a\, \mathbf{v} \rangle = a^* \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$
6. $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{u} \rangle^*$
7. $\langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle^* \Rightarrow \langle \mathbf{u} | \mathbf{u} \rangle \in R$

$\langle . | . \rangle$ *forma hermitiana* (lineare nel primo argomento e antilineare nel secondo) se K complesso, oppure *forma bilineare simmetrica* se K reale

La coppia (**V** , $\langle . | . \rangle$) costituisce uno spazio unitario (o spazio pre-hilbertiano)

Richiami su spazi vettoriali (5)

Due vettori **u**,**v** di uno spazio unitario si dicono ortogonali se risulta:

$$\boxed{\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle = 0}$$

In uno spazio unitario, si definisce la norma di un vettore (norma “indotta” dal prodotto interno) nel modo seguente:

$$\boxed{\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}}$$

quindi <u>uno spazio unitario è anche uno spazio normato</u>, e vale la relazione:

$$\left|\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle\right| \le \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

Si può introdurre di conseguenza anche la distanza:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

che rende **V** uno spazio metrico.

Esempio

Lo spazio vettoriale R^n è uno spazio unitario se si adotta come prodotto interno il prodotto scalare ordinario (euclideo):

$$\boxed{\langle \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}$$

Di conseguenza si ottiene la norma euclidea (o modulo) di un vettore:

$$\|\mathbf{u}\| = |\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2 + \ldots + u_n{}^2}$$

Due vettori **u,v** di R^n si dicono ortogonali se risulta:

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0}$$

Spazi vettoriali complessi

Spazio vettoriale complesso a *n* dimensioni

E' lo spazio vettoriale C^n sul campo C costituito dalle n-ple di numeri complessi.

Il generico elemento è:

$$\mathbf{A} = \left(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{n}\right); \qquad \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{n} \in \mathbb{C}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\mathrm{R} + j\mathbf{A}_\mathrm{I}; \qquad \mathbf{A}_\mathrm{R}, \mathbf{A}_\mathrm{I} \in \mathbb{R}^n$$

- **Operazioni su vettori complessi**

1) somma

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \left(A_1 + B_1, A_2 + B_2, \ldots, A_n + B_n\right)$$

2) *prodotto per uno scalare*

$$\mathrm{Z}\mathbf{A} = \left(\mathrm{ZA}_1, \mathrm{ZA}_2, \ldots, \mathrm{ZA}_\mathrm{n}\right) \quad \mathrm{Z} \in \mathbb{C}$$

Spazi vettoriali complessi (2)

3) prodotto scalare euclideo

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1 + \mathrm{A}_2\mathrm{B}_2 + \ldots + \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n) =$$
$$= \mathbf{A_R}\cdot\mathbf{B_R} - \mathbf{A_I}\cdot\mathbf{B_I} + \mathrm{j}(\mathbf{A_I}\cdot\mathbf{B_R} + \mathbf{A_R}\cdot\mathbf{B_I})$$

quindi il prodotto scalare euclideo tra vettori complessi segue la stessa regola del prodotto tra numeri complessi.

4) vettore complesso coniugato

$$\mathbf{A}^* = \left(\mathrm{A}_1^*, \mathrm{A}_2^*, \ldots, \mathrm{A}_n^*\right) = \mathbf{A}_R - j\mathbf{A}_I$$

Lo spazio vettoriale C^n non è unitario rispetto al prodotto scalare ordinario euclideo. Infatti, consideriamo ad esempio un vettore E dello spazio C^3. Se si introduce la grandezza:

$$A_C(\mathbf{E}) = \sqrt{\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}} = \sqrt{E_x^{\ 2} + E_y^{\ 2} + E_z^{\ 2}} = \sqrt{\mathbf{E}_R\cdot\mathbf{E}_R - \mathbf{E}_I\cdot\mathbf{E}_I + 2j\mathbf{E}_R\cdot\mathbf{E}_I}$$

Spazi vettoriali complessi (3)

Tale grandezza è in generale complessa, e quindi non può essere una norma, che è una grandezza reale positiva. Chiameremo $A_C(E)$ ampiezza complessa del vettore E.

Lo spazio vettoriale C^n (e in particolare lo spazio complesso tridimensionale C^3) è unitario se si adotta come prodotto interno il prodotto scalare coniugato (o prodotto hermitiano):

$$\boxed{\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^*}$$

Due vettori **A,B** dello spazio C^n (C^3) si dicono ortogonali se:

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^* = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{B} = 0}$$

Spazi vettoriali complessi (4)

Essendo lo spazio C^3 unitario rispetto al prodotto hermitiano, si può introdurre la norma (o modulo) di un vettore complesso:

$$\|\mathbf{E}\| = |\mathbf{E}| = \sqrt{\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*} = \sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2} = \sqrt{\mathbf{E}_R\cdot\mathbf{E}_R + \mathbf{E}_I\cdot\mathbf{E}_I}$$

Tale grandezza è effettivamente reale positiva, quindi consente di introdurre la nozione di distanza in uno spazio complesso.

Si considerino 2 vettori u, A dello spazio C^3, con **u** vettore reale (cioè avente componenti reali) e A complesso. Si ha:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}^* = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

e quindi, se uno dei 2 vettori è reale, la definizione di ortogonalità in C^3 coincide con quella classica dello spazio R^3

Spazi vettoriali complessi (5)

Chiameremo versore complesso un vettore di C^3 a norma unitaria, cioè un vettore che soddisfa la relazione:

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}}^* = 1$$

- Tale vettore, avendo in generale componenti complesse, non rappresenta in generale una direzione geometrica, come avviene nello spazio R^3: si tratta, in questo senso, di uno “pseudo-versore”.

Dato un generico vettore complesso **E**, si può sempre definire il versore complesso ad esso associato:

$$\hat{\mathbf{i}}_E = \mathbf{E} \big/ \left\| \mathbf{E} \right\| \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E} = \left\| \mathbf{E} \right\| \hat{\mathbf{i}}_E$$

Nello spazio C^3, si definisce la proiezione di un vettore **E** lungo un generico versore complesso **i** come:

$$E_i = \left\langle \mathbf{E}, \hat{\mathbf{i}} \right\rangle = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{i}}^*$$

Spazi vettoriali complessi (6)

Ovviamente, la proiezione di un vettore lungo la sua “direzione” deve essere uguale al modulo del vettore stesso:

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{i}}_E^{\,*}=\mathbf{E}\cdot\left(\frac{\mathbf{E}}{\left\|\mathbf{E}\right\|}\right)^{*}=\frac{\left\|\mathbf{E}\right\|^{2}}{\left\|\mathbf{E}\right\|}=\left\|\mathbf{E}\right\|$$

avendo indicato con $\hat{\mathbf{i}}_E$ il versore complesso associato ad **E**.

Si definisce base ortonormale per lo spazio vettoriale complesso C^3 una terna di versori complessi $\left(\hat{\mathbf{i}}_u,\hat{\mathbf{i}}_v,\hat{\mathbf{i}}_w\right)$ mutuamente ortogonali, che soddisfano cioè le relazioni:

$$\hat{\mathbf{i}}_u\cdot\hat{\mathbf{i}}_u^{\,*}=1\qquad\hat{\mathbf{i}}_v\cdot\hat{\mathbf{i}}_v^{\,*}=1\qquad\hat{\mathbf{i}}_w\cdot\hat{\mathbf{i}}_w^{\,*}=1$$

$$\hat{\mathbf{i}}_u\cdot\hat{\mathbf{i}}_v^{\,*}=\hat{\mathbf{i}}_u^{\,*}\cdot\hat{\mathbf{i}}_v=0\qquad\hat{\mathbf{i}}_u\cdot\hat{\mathbf{i}}_w^{\,*}=\hat{\mathbf{i}}_u^{\,*}\cdot\hat{\mathbf{i}}_w=0\qquad\hat{\mathbf{i}}_v\cdot\hat{\mathbf{i}}_w^{\,*}=\hat{\mathbf{i}}_v^{\,*}\cdot\hat{\mathbf{i}}_w=0$$

Spazi vettoriali complessi (7)

In generale, un vettore complesso può scriversi sempre nella forma:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_R + j\mathbf{E}_I = E_R\hat{\mathbf{i}}_R + jE_I\hat{\mathbf{i}}_I \qquad \mathbf{E}_R, \hat{\mathbf{i}}_R, \mathbf{E}_I, \hat{\mathbf{i}}_I \in R^3$$

Se e solo se risulta verificata una delle 3 seguenti condizioni:

1. $\mathbf{E}_\mathrm{R} = 0$ 2. $\mathbf{E}_\mathrm{I} = 0$ 3. $\mathbf{E}_\mathrm{R} \ // \ \mathbf{E}_\mathrm{I}$

allora si può scrivere:

$$\boxed{\mathbf{E} = A\hat{\mathbf{i}}_R \qquad A \in C \quad e \quad \hat{\mathbf{i}}_R \quad versore \quad reale \quad \left(\in R^3\right)}$$

le condizioni 1,2,3 si possono riassumere nella condizione:

$$\mathbf{E}_\mathrm{R} \times \mathbf{E}_\mathrm{I} = 0 \quad \text{(cond. di polarizzazione lineare)}$$

Vettori sinusoidali e fasori: richiami

Una funzione vettoriale del tempo e dello spazio si dice vettore sinusoidale (o monocromatico) se ciascuna delle sue componenti è una funzione sinusoidale del tempo:

$$\vec{f}(P,t) = f_x(P,t)\hat{i}_x + f_y(P,t)\hat{i}_y + f_z(P,t)\hat{i}_z = A_x(P)\cos\big(\omega t + \varphi_x(P)\big)\hat{i}_x +$$

$$+A_y(P)\cos\big(\omega t + \varphi_y(P)\big)\hat{i}_y + A_z(P)\cos\big(\omega t + \varphi_z(P)\big)\hat{i}_z$$

In ogni punto dello spazio ed in ogni istante di tempo, $\vec{\mathrm{f}}(\mathrm{P},\mathrm{t}) \in \Re^3$.

Per ogni vettore sinusoidale, si definisce il rispettivo *vettore complesso rappresentativo (o fasore)* mediante la relazione (trasformata di Steinmetz vettoriale):

$$\boxed{\vec{F}(P) = A_x(P)e^{j\varphi_x(P)}\hat{i}_x + A_y(P)e^{j\varphi_y(P)}\hat{i}_y + A_z(P)e^{j\varphi_z(P)}\hat{i}_z}$$

In ogni punto dello spazio, $\vec{\mathrm{F}} \in \mathrm{C}^3$.

Vettori sinusoidali e fasori: richiami (2)

F è “rappresentativo” nel senso che ad un assegnato vettore sinusoidale corrisponde sempre uno ed un solo vettore complesso, e viceversa. Esiste cioè una corrispondenza biunivoca fra l’insieme dei vettori sinusoidali e l’insieme dei vettori complessi ad essi associati.

Si definisce la trasformazione inversa (antitrasformata di Steinmetz vettoriale) nel modo seguente:

$$\boxed{\vec{f}\,(t) = \Re e\left\{ \vec{F} \cdot e^{j\omega t} \right\} = \frac{1}{2}\left(\vec{F} \cdot e^{j\omega t} + \vec{F}^{\,*} \cdot e^{-j\omega t} \right)}$$

Si considerino ora due generici vettori sinusoidali **f** e **g** di uguale frequenza, rappresentati nel campo complesso dai fasori **F** e **G**. Il valor medio temporale del prodotto scalare fra **f** e **g** è:

$$<\vec{\mathrm{f}} \cdot \vec{\mathrm{g}}> = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} \vec{\mathrm{f}} \cdot \vec{\mathrm{g}}\,\mathrm{dt}$$

Vettori sinusoidali e fasori: richiami (3)

Si ha:

$$\vec{f}\cdot\vec{g}=\frac{\left(\vec{F}\cdot e^{j\omega t}+\vec{F}^{*}\cdot e^{-j\omega t}\right)\cdot\left(\vec{G}\cdot e^{j\omega t}+\vec{G}^{*}\cdot e^{-j\omega t}\right)}{4}=$$

$$=\frac{\vec{F}\cdot\vec{G}^{*}+\vec{F}^{*}\cdot\vec{G}}{4}+\frac{\vec{F}\cdot\vec{G}\,e^{j2\omega t}+\vec{F}^{*}\cdot\vec{G}^{*}\,e^{-j2\omega t}}{4}$$

e inoltre:

$$\frac{\vec{F}\cdot\vec{G}^{*}+\vec{F}^{*}\cdot\vec{G}}{4}=\frac{\left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{G}^{*}}{2}\right)+\left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{G}^{*}}{2}\right)^{*}}{2}=\Re e\left\{\frac{\vec{F}\cdot\vec{G}^{*}}{2}\right\}$$

$$\frac{\vec{F}\cdot\vec{G}\,e^{j2\omega t}+\vec{F}^{*}\cdot\vec{G}^{*}\,e^{-j2\omega t}}{4}=\frac{\left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{G}}{2}\right)e^{j2\omega t}+\left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{G}}{2}\right)^{*}e^{-j2\omega t}}{2}=\Re e\left\{\frac{\vec{F}\cdot\vec{G}}{2}\cdot e^{j2\omega t}\right\}$$

Vettori sinusoidali e fasori: richiami (4)

Pertanto:

$$< \vec{f} \cdot \vec{g} >= \frac{1}{T}\int_0^T \vec{f} \cdot \vec{g} \, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\Re e\left\{ \frac{\vec{F} \cdot \vec{G}^*}{2} \right\} + \Re e\left\{ \frac{\vec{F} \cdot \vec{G}}{2} \cdot e^{j2\omega t} \right\} \right) dt$$

Il primo addendo non dipende da t, mentre il secondo rappresenta una grandezza sinusoidale di pulsazione 2ω, e pertanto il suo valore medio da 0 a T è nullo. Si ottiene infine:

$$< \vec{f} \cdot \vec{g} >= \frac{1}{T}\int_0^T \vec{f} \cdot \vec{g} \, dt = \Re e\left\{ \frac{\vec{F} \cdot \vec{G}^*}{2} \right\}$$

Analogamente si può dimostrare che:

$$< \vec{f} \times \vec{g} >= \Re e\left\{ \frac{\vec{F} \times \vec{G}^*}{2} \right\}$$