Equazioni fondamentali (nel dominio dei tempi)

Equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{e} = -\dfrac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j} + \dfrac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{d} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_c + \mathbf{j}_i$$

Eq. di continuità:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Legge del trasporto:

$$\mathbf{j}_c = \sigma\ \mathbf{e}$$

Relazioni costitutive del mezzo:

$$\begin{cases} \mathbf{d} = \varepsilon\ \mathbf{e} \\ \mathbf{b} = \mu\ \mathbf{h} \end{cases}$$

Caso stazionario (1)

Nel caso stazionario le grandezze E.M. non dipendono dal tempo

si annullano le derivate temporali nelle equazioni fondamentali

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Caso stazionario (2)

Dunque, nel caso stazionario la prima equazione di Maxwell in forma differenziale diventa:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Oppure, considerando la corrispondente equazione in forma integrale, si ha:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$$

E è un campo vettoriale conservativo, e può essere espresso come gradiente di un opportuno campo scalare ϕ:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \qquad \Phi \quad \textit{Potenziale} \quad \textit{scalare} \quad \textit{elettrico}$$

Caso stazionario (3)

- La ragione del segno – davanti al gradiente è di carattere storico (è una convenzione adottata in elettromagnetismo sul segno della differenza di potenziale fra 2 punti).

Dati 2 punti P e Q dello spazio, si definisce ***tensione*** fra i punti P e Q la grandezza:

$$\int_Q^P \mathbf{E} \cdot d\vec{\ell} = \left[\Phi(Q) - \Phi(P)\right] \stackrel{\Delta}{=} V_{QP} = -V_{PQ}$$

La tensione dipende solo dai punti P e Q e non dal percorso sul quale viene calcolato l’integrale, essendo **E** conservativo.

Caso stazionario (4)

Si ricordi inoltre che ϕ è definito a meno di una costante additiva arbitraria.

Per convenzione, tale arbitrarietà viene eliminata imponendo che il potenziale sia nullo quando la distanza dalle sorgenti del campo tende all'infinito. Si ha quindi:

$$\Phi(\mathrm{P}) \stackrel{\Delta}{=} \int_{\mathrm{P}}^{\infty} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \qquad \text{avendo assunto } \Phi(\infty) = 0$$

Caso stazionario (5)

L'equazione di divergenza relativa all'induzione magnetica è:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

B è quindi un campo *solenoidale* e si può supporre che sia esprimibile tramite il rotazionale di un opportuno vettore **A**:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

A è detto *potenziale vettore magnetico*, per analogia col potenziale elettrico ϕ.

- Si osservi anche che **A** è definito *a meno del gradiente di un campo scalare arbitrario. Tale arbitrarietà viene risolta tramite un'opportuna "scelta"* .

Caso stazionario (6)

Concludendo, nel caso stazionario, <u>il campo E.M. è completamente caratterizzato una volta che siano noti i potenziali **A** e ϕ</u>.

- L'uso dei potenziali in luogo dei campi **E** ed **H** è in generale molto vantaggioso. In particolare, ϕ ha il vantaggio di essere un campo scalare.

Caso stazionario: schema riassuntivo

E	CONSERVATIVO	$\oint \mathbf{E}\cdot d\vec{\ell}=0$	$\nabla\times\mathbf{E}=0$	$\mathbf{E}=-\nabla\Phi$
B	SOLENOIDALE	$\oiint \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{i}}_n dS=0$	$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$

Caso stazionario (7)

Nel caso stazionario si possono avere 3 situazioni distinte:
(a) Il campo magnetico è nullo e il campo elettrico è diverso da 0

(b) Il campo elettrico è nullo e il campo magnetico è diverso da 0

(c) Il campo elettrico e il campo magnetico sono entrambi non nulli.

Nel caso (a) si parla di modello dell'elettrostatica. In tale modello, le equazioni fondamentali si particolarizzano nelle equazioni seguenti:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

In questo modello le uniche sorgenti "fisiche" del campo sono le cariche ferme (distribuzione statica di carica ρ)

$$\mathbf{D} = \varepsilon \, \mathbf{E}$$

Caso stazionario (8)

La prima equazione del modello (a) consente di esprimere **E** come gradiente del potenziale scalare elettrostatico ϕ:

$$\mathbf{E} = -\nabla\,\Phi$$

Sostituendo tale espressione nella seconda equazione del modello si ottiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varepsilon\,\mathbf{E}) = \nabla \cdot [\varepsilon(-\nabla \phi)] = \rho$$

$$\Rightarrow \quad -\nabla\varepsilon \cdot \nabla\phi - \varepsilon\nabla^2\phi = \rho$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2\phi + \frac{1}{\varepsilon}\nabla\varepsilon \cdot \nabla\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Se il mezzo è omogeneo, $\nabla\varepsilon = 0$ e si ha:

$$\boxed{\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

Equazione di Poisson scalare

Caso stazionario (9)

Nel caso (b) si parla di modello della magnetostatica. In tale modello, le equazioni fondamentali si particolarizzano nelle equazioni seguenti:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_i$$

In questo modello, le sorgenti “fisiche” del campo E.M. sono le correnti impresse, costanti nel tempo (distribuzione statica di corrente $\mathbf{J}_i$)

$$\mathbf{B} = \mu\, \mathbf{H}$$

Si può dimostrare che dalle equazioni precedenti si ottiene la seguente equazione di Poisson vettoriale, che è l’equazione fondamentale della magnetostatica

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu\, \mathbf{J}_i}$$

Caso stazionario (10)

Nel caso (c) si parla di modello della conduzione stazionaria o del campo stazionario di corrente. In tale modello, le equazioni fondamentali si particolarizzano nelle equazioni seguenti:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_i$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{J}_c + \mathbf{J}_i) = 0$$

In questo modello le sorgenti “fisiche” sono sia le correnti impresse che le correnti di conduzione, entrambe costanti nel tempo.

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$$

Caso stazionario (11)

In modo analogo a quanto fatto nei casi elettrostatico e magnetostatico, si dimostra che le equazioni fondamentali della conduzione stazionaria sono le 2 equazioni di Poisson (scalare e vettoriale):

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu\, \mathbf{J}_{\mathrm{i}} \\ \nabla^2 \phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

Dal punto di vista matematico, gli unici termini noti del problema differenziale sono le correnti impresse $\mathbf{J}_i$, mentre le $\mathbf{J}_c$ e la densità di carica sono incognite. Infatti, note le $\mathbf{J}_i$, risolvendo la prima equazione si determina **A** e quindi **H**. Poi, dalla equazione $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\mathrm{c}} + \mathbf{J}_{\mathrm{i}}$ si ricavano le correnti $\mathbf{J}_c$ e quindi il campo **E** (o in alternativa, il potenziale ϕ). Infine, la ρ si determina utilizzando la legge di Gauss per il campo elettrico, oppure tramite l'equazione di Poisson scalare nel potenziale ϕ.

Circuiti - Caso stazionario

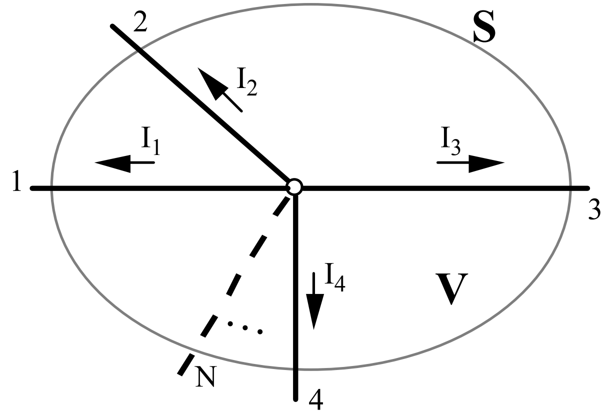
Prima legge di Kirchhoff

Nel caso stazionario l'equazione di continuità si può scrivere:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

e integrando ambo i membri sul volume V, delimitato dalla superficie chiusa S, mediante il teorema di Gauss si ottiene:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS = \sum_i I_i = 0$$



La relazione trovata esprime la prima legge di Kirchhoff ossia "*la somma algebrica delle correnti che escono da un nodo è nulla*".

Circuiti - Caso stazionario (2)

- Dall’equazione di conservazione della carica, si evince che in condizioni stazionarie, essendo nullo il flusso di **J** attraverso la superficie S, non può esserci accumulo di carica nel volume V.

Seconda legge di Kirchhoff

La prima equazione di Maxwell assume la forma:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Il campo elettrico è conservativo e quindi può essere espresso come:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

Si consideri una linea chiusa costituita da un certo numero di segmenti rettilinei (“rami”), corrispondenti a fili di materiale perfettamente conduttore percorsi da corrente . Nel linguaggio circuitale, una linea di tale tipo è denominata “maglia”.

Circuiti - Caso stazionario (3)

Calcolando l'integrale di circuitazione di ambo i membri dell'equazione precedente lungo tale linea, si ottiene, per le proprietà del potenziale scalare elettrico ϕ:

$$\oint_{\ell} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\ell} \, d\ell = \sum_{i} V_i = 0$$

essendo $V_i = \phi_{Ai} - \phi_{Bi}$ la tensione lungo l'i-esimo ramo della maglia.

La relazione trovata esprime la seconda legge di Kirchhoff ossia "*la somma algebrica delle cadute di tensione lungo una maglia è nulla*".

- In regime stazionario la caduta di potenziale V può essere attribuita esclusivamente alla presenza di un campo elettrico **E** non nullo. Inoltre, dalla prima equazione di Maxwell si evince che la variazione temporale del flusso del vettore induzione magnetica **B** è nulla e quindi non può aver luogo alcun fenomeno di immagazzinamento o dissipazione di energia.

Caso non stazionario (1)

Anche nel caso non stazionario sarebbe utile continuare ad avere dei potenziali che, opportunamente derivate, forniscano i campi. Per quanto riguarda il campo magnetico, continua a valere l'equazione:

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$$

Si può quindi scrivere ancora:

$$\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a} \qquad \mathbf{a} \;\; \textit{potenziale vettore magnetico}$$

Il campo elettrico, invece, non è più irrotazionale, essendo:

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}$$

Tuttavia si può sostituire la precedente equazione nella prima equazione di Maxwell, e si ottiene:

⬇

Caso non stazionario (2)

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{a}) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}\right)$$

e quindi:

$$\nabla \times \left(\mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}\right) = 0$$

Essendo il vettore $\mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}$ irrotazionale, si può scrivere:

$$\mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

ϕ è detto ancora potenziale scalare elettrico, ma è una quantità in generale diversa dal potenziale nel caso stazionario!

Riassumendo, nel caso non stazionario valgono le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{e} = -\nabla \Phi - \dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \\ \mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a} \end{cases} \quad (*)$$

Caso non stazionario (3)

Dalle equazioni (*) si deduce quindi che, nel caso non stazionario, il campo E.M. è completamente determinato una volta che siano noti i potenziali vettore e scalare **a** e ϕ.

Si noti anche che nel caso stazionario **non ha senso** definire la tensione fra 2 punti, infatti:

$$\int_Q^P \mathbf{e}\cdot d\vec{\ell} = \int_Q^P \left(-\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right)\cdot d\vec{\ell} = \Phi(Q) - \Phi(P) - \frac{\partial}{\partial t}\int_Q^P \mathbf{a}\cdot d\vec{\ell}$$

Compare cioè, oltre alla differenza di potenziale, un termine addizionale che in generale dipende dal cammino scelto per effettuare l'integrale tra Q e P (infatti, il vettore **a** per definizione non è conservativo, essendo $\nabla\times\mathbf{a} = \mathbf{b} \neq 0$).

Caso non stazionario (4)

Le equazioni fondamentali dell'elettrodinamica non stazionaria sono le seguenti:

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{a} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial\, \mathrm{t}^2} - \mu\sigma \dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial\, \mathrm{t}} = -\mu\ \mathbf{j}_{\mathrm{i}} \\ \nabla^2 \phi - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial\, \mathrm{t}^2} - \mu\sigma \dfrac{\partial \phi}{\partial\, \mathrm{t}} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases} \qquad (**)$$

Tali equazioni si ottengono dalle equazioni di Maxwell, esprimendo i campi tramite i rispettivi potenziali, ed infine imponendo la condizione di Lorentz nel dominio dei tempi:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial\, \mathrm{t}} - \mu\sigma\varphi$$

Si osservi che nel caso di mezzo privo di perdite ($\sigma = 0$) le equazioni scritte sopra diventano le ben note equazioni di D'Alembert (vettoriale e scalare) non omogenee.

Caso non stazionario (5)

- La risoluzione del sistema differenziale (**) è in generale molto difficoltosa per un regime temporale generico (si tratta infatti di un sistema di equazioni alle derivate parziali sia nelle variabili spaziali che nella variabile temporale)
- Se però si considerano campi in regime sinusoidale e si passa alla rappresentazione mediante campi complessi rappresentativi (fasori), la soluzione di tali equazioni si semplifica notevolmente. Si ottengono infatti 2 equazioni disaccoppiate [eq. di Helmholtz non omogenee] nel potenziale vettore magnetico e nel potenziale scalare elettrico, rispettivamente:

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{A} + \omega^2 \mu \varepsilon_C \mathbf{A} = -\mu \, \mathbf{J}_\mathrm{i} \\ \nabla^2 \phi + \omega^2 \mu \varepsilon_C \phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases} \qquad (***)$$

Deve valere inoltre la **condizione di Lorentz**:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\mu\varepsilon_C \phi$$

Caso non stazionario (6)

- Ad esempio, per ricavare la seconda equazione delle (***), è sufficiente sostituire $\mathbf{H} = (1/\mu)\nabla \times \mathbf{A}$ nella seconda eq. di Maxwell e si ottiene:
$$\nabla \times (\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} + j\omega\mathbf{A} = -\nabla\phi$$
- Ricordando poi l'equazione di divergenza del campo elettrico $\nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$ e combinandola con l'equazione precedente si ha:
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \nabla\phi - j\omega\nabla \cdot \mathbf{A} = -\nabla^2\phi - \omega^2\mu\varepsilon_C = \frac{\rho}{\varepsilon}$$
dove, ancora una volta, si è fatto uso della condizione di Lorentz. Per la risoluzione del sistema differenziale (***), la conoscenza del termine ρ/ε non è necessaria, in quanto esso può essere espresso a sua volta in funzione delle correnti impresse:
$$\frac{\rho}{\varepsilon} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_i}{j\omega\varepsilon_C}$$
Di fatto, la scelta di Lorentz rende le 2 equazioni (***) (e quindi anche i potenziali **A** e ϕ) fra loro dipendenti.

Caso non stazionario (7)

- Infatti, una volta determinato **A** risolvendo la prima delle (***) con il metodo della funzione di Green, il potenziale scalare si può ricavare dalla eq.:

$$\phi = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega\varepsilon_C}$$

- Una proprietà concettualmente rilevante dei potenziali scelte di Lorentz è che essi possono considerarsi come la naturale estensione al caso dinamico dei corrispondenti potenziali statici. Si abbia infatti una distribuzione di corrente stazionaria $\mathbf{J}_{i0}$ e una distribuzione statica di carica ρ_0, e siano $\mathbf{A}_0$, ϕ_0 il potenziale vettore magnetostatico e il potenziale scalare elettrostatico che tali distribuzioni sostengono. Come noto, $\mathbf{A}_0$ e ϕ_0 soddisfano le equazioni di Poisson:

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{A}_0 = -\mu\, \mathbf{J}_{i0} \\ \nabla^2 \phi_0 = -\dfrac{\rho_0}{\varepsilon} \end{cases} \qquad (****)$$

E' immediato riconoscere che le (****) rappresentano il limite delle eq. di Helmholtz (***) per $\omega \to 0$!

Circuiti - Caso non stazionario

<u>*Circuiti in regime non stazionario*</u>

Nel caso stazionario non è di norma lecito trascurare le derivate temporali delle grandezze elettromagnetiche pertanto risultano verificate le seguenti relazioni:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\varepsilon \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathrm{t}} \neq 0$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathrm{t}} \neq 0$$

dalle quali si deduce che *nel caso non stazionario non valgono le leggi di Kirchhoff.*

L’approssimazione quasi-stazionaria (1)

- Si parla di campi *quasi stazionari* per indicare campi che non sono strettamente stazionari, ma per i quali le variazioni nel tempo non giocano un ruolo primario (campi lentamente variabili).

- L’approssimazione quasi-stazionaria consiste nel trascurare, se sono verificate alcune condizioni ben precise, alcune delle derivate temporali che compaiono nelle equazioni fondamentali.
  - Non si trascura la dipendenza dal tempo !!!

La possibilità di trascurare le variazioni temporali di alcune grandezze dipende dal regime temporale che si instaura nel sistema in oggetto.

- Il regime temporale del sistema dipende a sua volta dalle cause che originano i campi, cioè dalle sorgenti fisiche (correnti e cariche)

L’approssimazione quasi-stazionaria (2)

Che cosa significa trascurare le variazioni temporali delle grandezze E.M. ?

➡ Significa trascurare gli effetti della propagazione dei campi E.M. all’interno del sistema, cioè trascurare il ritardo di propagazione.

In altri termini, ciò equivale a supporre che *gli effetti delle variazioni temporali delle forze impresse si manifestino istantaneamente in tutti i punti del sistema (successione di stati quasi-stazionari)*.

- E’ ovvio che, per trascurare il tempo di ritardo, il sistema che si sta considerando deve essere geometricamente limitato (diversamente non sarebbe possibile individuare un valore massimo per il tempo di ritardo).

L'approssimazione quasi-stazionaria (3)

Data una coppia di punti P e P_0 appartenenti al sistema che si sta considerando, si ponga

$$r_{max} = \max\left(\left|P - P_0\right|\right)$$

$$t_{max} = \frac{r_{max}}{c}$$

dove c indica la velocità della luce nel vuoto.

Se le relazioni di trascurabilità, che di seguito verranno esplicitate, sono verificate per distanze pari a r_{max}, a maggior ragione lo saranno per ogni altro valore della distanza r.

Trascurare il tempo di ritardo significa, come detto, supporre che le *cause* che originano il campo non varino nell'intervallo temporale in esame, cioè:

$$\text{(a)} \quad \rho\left(P,t-t_{max}\right) \approx \rho\left(P,t\right) \quad \Rightarrow \quad \left|\rho\left(P,t-t_{max}\right)-\rho\left(P,t\right)\right| << \left|\rho\left(P,t\right)\right|$$

$$\text{(b)} \quad \mathbf{j}_i\left(P,t-t_{max}\right) \approx \mathbf{j}_i\left(P,t\right) \quad \Rightarrow \quad \left|\mathbf{j}_i\left(P,t-t_{max}\right)-\mathbf{j}_i\left(P,t\right)\right| << \left|j_i\left(P,t\right)\right|$$

L’approssimazione quasi-stazionaria (4)

Considerando ad esempio la distribuzione delle cariche ρ(P,t), mediante sviluppo in serie è possibile riscrivere la relazione (a) nella forma:

$$(a') \qquad \left|\frac{\partial \rho(P,t)}{\partial t}\frac{r_{max}}{c}\right| << |\rho(P,t)|$$

Se si considera come caso di maggior interesse quello di un *regime sinusoidale di pulsazione ω* si può scrivere:

$$\rho(P,t) = \rho(P)\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial \rho(P,t)}{\partial t} = -\omega\rho(P)\sin(\omega t + \varphi)$$

e la (a’) risulta verificata ogni qual volta risulta:

$$\frac{\omega r_{max}}{c} << 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi f}{c} r_{max} << 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda r_{max} << 1$$

Lo stesso procedimento si può seguire per la grandezza vettoriale $\mathbf{J}_i$ arrivando alle stesse conclusioni.

L’approssimazione quasi-stazionaria (5)

E’ stata così individuata una ***condizione sufficiente per l’approssimazione di quasi stazionarietà*** che spesso viene espressa anche nella forma:

$$\boxed{r_{max} << \lambda}$$

Quindi nella pratica, affinché nel regime sinusoidale sia verificata l’ipotesi di quasi stazionarietà, le dimensioni del sistema elettromagnetico in esame devono essere trascurabili rispetto alla lunghezza d’onda del campo che si propaga.

L'approssimazione quasi-stazionaria (6)

Come conseguenza dell'ipotesi di quasi stazionarietà si ha che per ogni coppia di punti P e P_0 del sistema, risultano vere le relazioni:

$$(a) \qquad \frac{2\pi}{\lambda}\left|P - P_0\right| << 2\pi$$

Lo sfasamento che il campo sinusoidale subisce propagandosi da un punto all'altro del sistema è trascurabile.

$$(b) \qquad \frac{\left|\mathrm{P} - \mathrm{P}_0\right|}{\mathrm{c}} << \mathrm{T}$$

(T=1/f periodo del campo sinusoidale)

Il tempo di propagazione del campo tra due punti qualsiasi del sistema è trascurabile rispetto al periodo, cioè la propagazione nell'ambito del sistema si può ritenere a tutti gli effetti istantanea.

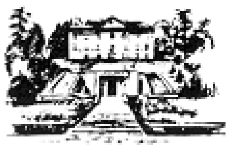
$$(c) \qquad f << \frac{c}{\left|P - P_0\right|}$$

La frequenza di propagazione è molto bassa rispetto all'inverso del tempo di propagazione tra due punti del circuito.

Modelli quasi-stazionari (1)

I sistemi quasi-stazionari sono caratterizzati dalla possibilità di trascurare alcune delle variazioni temporali delle grandezze E.M. di interesse. Nella pratica, in un sistema quasi-stazionario si possono distinguere 3 diverse regioni di funzionamento:

- Regioni in cui si trascurano le variazioni del campo **e**, ma non quelle del campo **b**. In questo caso si parla di modello quasi-stazionario magnetico.
- Regioni in cui si trascurano le variazioni del campo **b**, ma non quelle del campo **e**. In questo caso si parla di modello quasi-stazionario elettrico.
- Regioni in cui si trascurano sia le variazioni sia del campo **e** che del campo **b**. In questo caso, fissato un istante di tempo t_0, il sistema si comporta in modo analogo a un sistema stazionario, e perciò si applica il modello del campo stazionario di corrente già visto in precedenza.



Modelli quasi-stazionari (2)

Modello quasi-stazionario magnetico

In tale modello, si assume di trascurare la derivata temporale del vettore induzione elettrica che compare nella seconda equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

La relazione di trascurabilità che deve essere soddisfatta perché tale modello sia valido è quindi:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \right| << |\mathbf{j}|$$

perciò risulta:

$$\nabla \times \mathbf{h} \cong \mathbf{j}$$

Modelli quasi-stazionari (3)

In sintesi, le equazioni del modello quasi-stazionario magnetico sono le seguenti:

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j}(\mathrm{P},\mathrm{t})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$$

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}$$

In tale modello, la legge per la circuitazione di **e** è esatta, mentre le equazioni del campo di corrente e del campo magnetico **h** sono quelle del limite stazionario.

Tale approssimazione è tanto migliore quanto più lente sono le variazioni dei campi elettrici e delle cariche.

Le regioni del sistema che sono rappresentate dal modello quasi-stazionario magnetico sono, evidentemente, le regioni induttive.

Modelli quasi-stazionari (4)

Modello quasi-stazionario elettrico

In tale modello, si assume di trascurare la derivata temporale del vettore induzione magnetica che compare nella prima equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}$$

Per ricavare la condizione di trascurabilità, il procedimento è leggermente più laborioso che nel caso precedente, poiché nell'equazione precedente compare un solo termine a secondo membro.

Conviene allora esprimere **b** tramite il potenziale vettore magnetico **a** ad esso associato:

$$\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$$

Modelli quasi-stazionari (5)

E’ già stato ricavato che il vettore campo elettrico può essere scritto in funzione dei potenziali scalare e vettore come:

$$\mathbf{e} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}$$

pertanto il campo elettrico non dipende dalle variazioni del campo magnetico quando risulta valida la relazione:

$$\left| \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right| << \left| \nabla\Phi \right|$$

e ciò vuol dire che vale $\quad \mathbf{e} \cong -\nabla\Phi$

$$\nabla \times \mathbf{e} \cong 0$$

Modelli quasi-stazionari (6)

In sintesi, le equazioni del modello quasi-stazionario elettrico sono le seguenti:

$$\nabla \times \mathbf{e} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \rho(\mathrm{P},\mathrm{t})$$

$$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}}$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathrm{t}}$$

In tale modello, l’unica legge approssimata è quella della circuitazione di **e**.

Tale approssimazione è tanto migliore quanto più lente sono le variazioni dei campi magnetici.

Le regioni del sistema che sono rappresentate dal modello quasi-stazionario magnetico sono, evidentemente, le regioni capacitive.

Circuiti in regime quasi-stazionario

I modelli quasi-stazionari appena visti si possono così sintetizzare:

1. In tutti i punti in cui **j** $\neq 0 \Rightarrow$ $\left|\varepsilon \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}\right| << |\mathbf{j}|$

2. In tutti i punti in cui **e** $\neq 0 \Rightarrow$ $\left|\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}\right| << |\mathbf{e}|$

Consideriamo dapprima le regioni in cui il vettore densità di corrente **j** è non nullo. Si ha:

$$\left|\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}\right| << |\mathbf{j}| \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \cdot \mathbf{j} \cong 0$$

Se la precedente relazione è verificata, si può integrare l'equazione di continuità procedendo in maniera analoga a quanto fatto nel caso stazionario e si ha che vale ancora la legge di Kirchhoff per le correnti:

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS = \sum_i I_i = 0$$

Circuiti in regime quasi-stazionario (2)

Consideriamo ora le regioni in cui il vettore **e** è non nullo. In regime quasi stazionario si ha:

$$\left|\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}\right| << \left|\nabla\Phi\right| \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{e} \cong -\nabla\Phi \neq 0$$

Poiché il campo elettrico è ancora esprimibile mediante il potenziale scalare elettrico, si può ancora procedere come nel caso stazionario e calcolare l'integrale di circuitazione che conferma la validità della legge di Kirchhoff per le tensioni anche nel caso quasi stazionario:

$$\oint_{\ell} \mathbf{e}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{\ell}\,\mathrm{d}\ell = \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{V}_{\mathrm{i}} = 0$$

Circuiti in regime quasi-stazionario (3)

Conclusione: nel caso quasi stazionario valgono ancora, con ottima approssimazione, le leggi fisiche del caso strettamente stazionario: **e** è ancora conservativo e che il vettore **j** è ancora solenoidale.

Nel caso quasi stazionario ha ancora senso una descrizione circuitale in termini di tensioni e di correnti, e inoltre si può affermare che in regime quasi stazionario valgono ancora (seppure non rigorosamente) le leggi di Kirchoff.

Approssimazione quasi-stazionaria: conseguenze

- In circuiti in regime quasi-stazionario, è ancora possibile, come nel caso stazionario, definire in modo univoco tensioni e correnti. Si tratta però di una descrizione approssimata, a rigore.
- E' possibile dare una caratterizzazione "ai morsetti" dei componenti circuitali, tramite una relazione costitutiva (funzione che lega tensione e corrente). Non è quindi importante la struttura spaziale dei componenti, che possono essere pensati come concentrati in un punto!

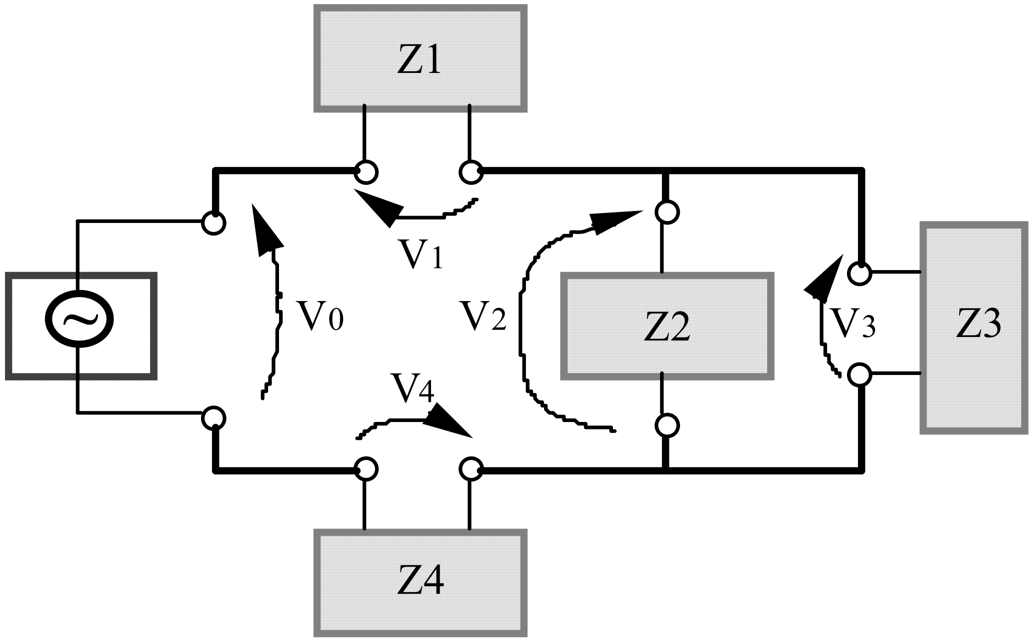
descrizione circuitale a parametri concentrati

- Valgono (seppur in modo approssimato) le leggi di Kirchhoff.
- I singoli componenti "rispondono" in modo istantaneo (tramite la propria relazione costitutiva) a variazioni temporali del segnale che alimenta il circuito.

Successione di stati stazionari!

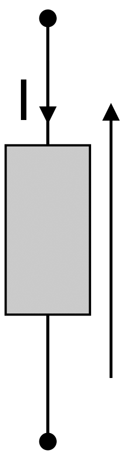
Circuiti a parametri concentrati

Un circuito a parametri concentrati è un sistema elettromagnetico costituito da un insieme di *elementi circuitali* bipolari o multipolari (resistenze, condensatori, induttanze, generatori ecc.) connessi fra loro mediante *elementi di filo* di materiale perfettamente conduttore. Diversi elementi e diversi tratti di filo si congiungono nei *nodi*. Si individuano percorsi chiusi costituiti da fili ed elementi circuitali detti *maglie* (vedi figura).



Circuiti a parametri concentrati (2)

I componenti più semplici e largamente utilizzati per la realizzazione di circuiti complessi sono i *bipoli* (o *componenti bipolari*), caratterizzati da 2 soli *punti di contatto* (o *morsetti*) per il collegamento esterno con gli altri componenti.



Come noto, il comportamento individuale di ogni singolo bipolo è descritto formalmente da una relazione fra tensione ai morsetti V e corrente I (*relazione costitutiva*):

$$\underbrace{F(V,I)=0 \quad oppure \quad V=f(I) \quad oppure \quad I=g(V)}_{\text{bipoli “stazionari”}}$$

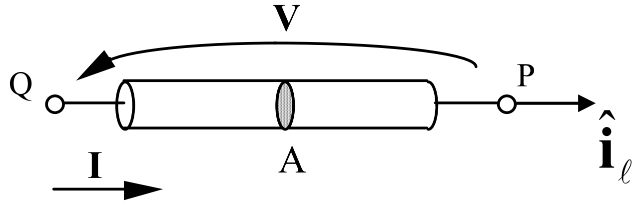
$$F\left(V,I,\frac{dV}{dt},\frac{dI}{dt},\int Vdt,\int Idt\right)=0$$

bipoli “dinamici”

Componenti circuitali bipolari: esempi (1)

1) Resistore

Si supponga di avere un resistore ideale, formato da un tratto di materiale a conducibilità finita ed area trasversale A così piccola da potere supporre $\mathbf{j}_C$ costante su una sezione.



Ricordando che per definizione di potenziale

$$V = \Phi(Q) - \Phi(P) = \int_Q^P \mathbf{e} \cdot d\vec{\ell} = \int_Q^P \frac{\mathbf{j}_c}{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell d\ell$$

e poiché evidentemente $\mathbf{j}_c = \frac{I}{A}\hat{\mathbf{i}}_\ell;$ I : corrente totale

allora: $$\boxed{V = \int_Q^P \frac{I}{A \cdot \sigma} d\ell = I \cdot \int_Q^P \frac{1}{A \cdot \sigma} d\ell = I \cdot R}$$ *1a legge di Ohm*

Componenti circuitali bipolari: esempi (2)

dove $$\boxed{R \equiv \int_Q^P \frac{1}{A \cdot \sigma} d\ell}$$ *resistenza* [Ω]

Se A è costante, e il resistore è omogeneo (σ costante lungo il resistore) si ottiene la cosiddetta *2a legge di Ohm:*

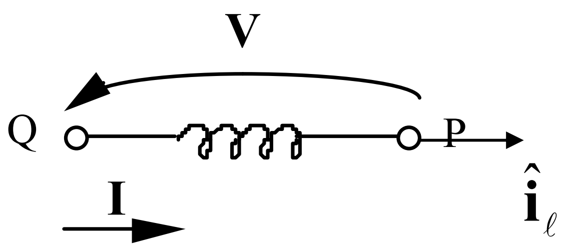
$$\boxed{R = \frac{\ell}{\sigma \cdot A}}$$

ℓ lunghezza del resistore, A area della sezione del resistore,

σ conducibilita' $[\Omega^{-1} \cdot m^{-1}]$

Induttore

Si consideri un induttore ideale realizzato tramite un pezzo di filo ideale (perfettamente conduttore, cioè $\sigma = \infty$, ed avente geometria qualsiasi.



Componenti circuitali bipolari: esempi (3)

All’interno dell’induttore risulta **e**=0 $\Rightarrow$ $\nabla\Phi = -\dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}$

e dunque

$$V = \Phi(Q) - \Phi(P) = \int_P^Q \nabla\Phi \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell \, d\ell = \int_Q^P \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell \, d\ell = \frac{\partial}{\partial t}\int_Q^P \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell \, d\ell = \frac{d}{dt}\left(LI\right) = L\frac{dI}{dt}$$

a patto di porre

$$L \equiv \frac{\int_Q^P \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell \, d\ell}{I} \qquad \text{induttanza [H]}$$

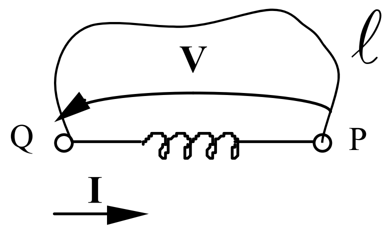
L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che l’induttanza, per la sua definizione, risulta indipendente dal tempo perché l'integrale al numeratore risulta, istante per istante, proporzionale alla corrente che sta al denominatore.

Componenti circuitali bipolari: esempi (4)

Si osservi che, qualora risulti $\frac{dI}{dt} \equiv 0$, si ha $V \equiv 0$. Ciò conferma il fatto che, come già detto in precedenza, nel caso strettamente stazionario l'induttore equivale ad un cortocircuito.

Si consideri ora una linea che, rimanendo all'esterno dell'induttore, colleghi i morsetti P e Q formando con l'induttore stesso un percorso chiuso. Poiché esternamente all'induttore non c'e' campo magnetico, e' possibile estendere l'integrale di linea a tutto il percorso chiuso cosi' formato, e dunque

$$L \equiv \frac{\oint_{\ell} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\ell}\, d\ell}{I} = \frac{\int_{S} (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{i}}_{n}\, dS}{I} = \frac{\int_{S} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{n}\, dS}{I} = \frac{\Psi}{I}$$



dove Ψ rappresenta *il flusso di induzione magnetica concatenato con l'induttore*. L'induttanza è quindi il rapporto fra il flusso di induzione magnetica e corrente.

Componenti circuitali bipolari: esempi (5)

Capacità

Si ha, ovviamente:

$$V = \int_P^Q \nabla\Phi \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell \, d\ell = -\int_Q^P \nabla\Phi \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell \, d\ell = -(\Phi(P) - \Phi(Q)) = \Phi(Q) - \Phi(P)$$

E’ necessario però ricavare un legame funzionale fra la tensione ai capi del componente e la corrente elettrica che fluisce ai morsetti, come si è fatto per gli altri componenti circuitali.

Al generico istante *t*, si avrà una carica Q su un’armatura e -Q sull'altra. Si può mostrare che Q è sempre proporzionale alla differenza di potenziale fra le armature. Sia 1/C la costante di proporzionalità. Si pone allora:

$$V = \Phi(Q)\text{-}\Phi(P) \stackrel{\Delta}{=} \frac{Q}{C} = \frac{\int I(t)\,dt}{C} \quad ; \quad C \ \ \textit{capacità} \ \ [\text{Farad}]$$

C è una costante che dipende unicamente dalle caratteristiche geometriche della regione che è sede dell’accumulo di carica elettrica.

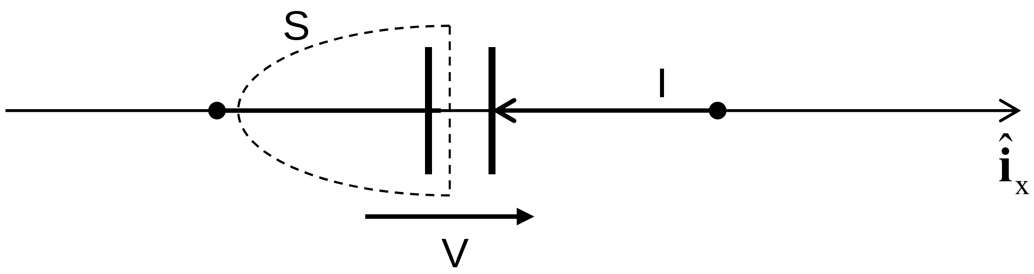
Componenti circuitali bipolari: esempi (6)

Derivando ambo i membri della formula appena scritta, si ottiene un'espressione alternativa per il legame fra tensione e corrente:

$$I = C\,\frac{dV}{dt}$$

Si osservi che, qualora risulti $\frac{dV}{dt} \equiv 0$, si ha $I \equiv 0$. Ciò conferma il fatto che nel caso strettamente stazionario il condensatore equivale ad un circuito aperto.

A titolo di esempio, ricaviamo ora l'espressione della capacità C in un caso tipico. Si consideri un condensatore ideale formato da due armature piane e parallele, poste a distanza d ed aventi area A:



Componenti circuitali bipolari: esempi (7)

Si consideri allora la superficie chiusa S rappresentata in figura. Risulta:

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = \oint_S \left(\mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS = \oint_S \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS + \oint_S \varepsilon \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS$$

il primo integrale rappresenta ovviamente la corrente di conduzione I che attraversa il bipolo; il secondo integrale, che rappresenta la corrente di spostamento, può essere calcolato osservando che all'interno del condensatore **e** = -(V/d)$\mathbf{i}_x$ e che sulla porzione di superficie in cui la corrente di spostamento non e' nulla vale, per costruzione, $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_x$; pertanto:

$$\oint_S \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_S \frac{V\varepsilon}{d} dS = -\frac{A\varepsilon}{d} \frac{\partial V}{\partial t}$$

e quindi

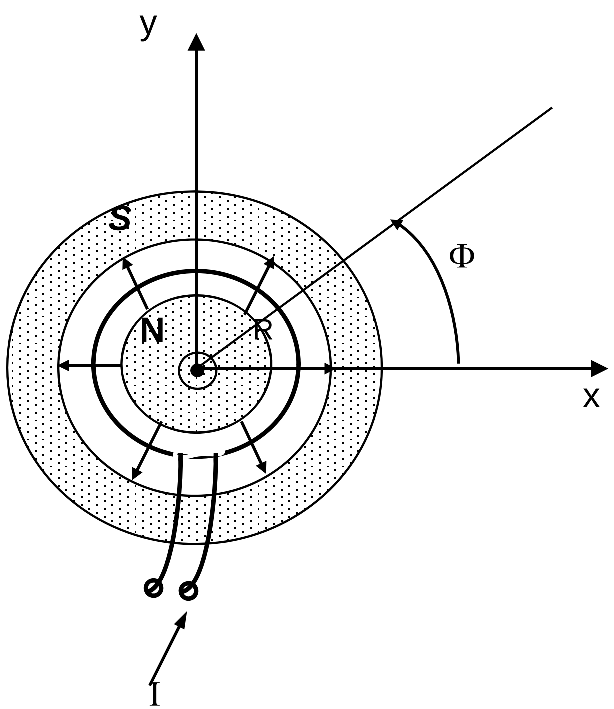
$$I = \frac{A\varepsilon}{d} \frac{\partial V}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{A\varepsilon}{d}$$

Esercizio

Esercizio (dal compito intermedio 26/02/2004)

Si consideri il sistema raffigurato in basso (schema di principio del motore di un altoparlante), costituito da 2 magneti con polarità opposte, e da una spira circolare percorsa da una corrente I variabile nel tempo.

Si noti che l'asse z è diretto ortogonalmente al foglio verso chi legge.



Il gap fra i 2 magneti è supposto molto piccolo, in modo che il campo magnetico radiale (indicato dalle frecce in figura) si possa supporre uniforme in modulo. Si supponga inoltre di alimentare la spira con un generatore ideale di tensione, e una resistenza in serie con tale generatore.

Esercizio (continua)

a) Sapendo che la massima frequenza di eccitazione f_0 del circuito è pari a 10 KHz, e che la spira ha raggio R = 0.05 m, dire se sono soddisfatte le condizioni per l'applicazione dell'ipotesi di quasi stazionarietà (si supponga trascurabile la lunghezza dei fili di interconnessione con l'alimentatore);

b) Fissato un istante di tempo $t=t_0$, (la corrente lungo la spira ha perciò intensità costante $I(t_0)$), si determini la forza complessiva che il campo magnetico radiale esercita sulla spira, in modulo, direzione e verso. A tal fine, si adotti un sistema di riferimento cilindrico $(\hat{\mathbf{i}}_\rho, \hat{\mathbf{i}}_\Phi, \hat{\mathbf{i}}_z)$ e si ricordi che per l'elemento infinitesimo di spira si ha $d\vec{\ell} = d\ell\, \hat{\mathbf{i}}_\Phi$, con $d\ell = R d\Phi$. Si assuma una corrente $I(t_0)$ pari a 1 A, e un campo magnetico di modulo $|\vec{\mathbf{H}}|$ =106 A/m (si ricordi che la permeabilità magnetica dell'aria è μ_0 = 4π*10-7 H/m).

Qualora al punto precedente si sia trovato che vale l'ipotesi di quasi stazionarietà, evidenziarne le conseguenze nel caso si voglia ripetere il calcolo appena svolto per una corrente I(t) variabile nel tempo.

Esercizio (continua)

c) Si supponga di poter scegliere fra due diverse coppie generatore-resistenza per alimentare la spira. Il primo generatore impone all'istante t=0 una tensione V_1 = 5 V, il secondo una tensione V_2 = 3 V. Il primo resistore ha conducibilità σ_1=3.5 S/m, il secondo ha conducibilità σ_2=4.5 S/m. Entrambi i resistori sono supposti di forma cilindrica e a sezione costante S. Si determini il rapporto fra le lunghezze dei due resistori affinché la corrente I che circola nella spira sia la stessa nei due casi.