Polarizzazione: introduzione

Si consideri un campo vettoriale costituito dalla sovrapposizione di 2 oscillazioni sinusoidali lungo gli assi x e y:

$$
\begin{aligned}
&\vec{\mathbf{e}}(P,t) = e_x(P,t)\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{x} + e_y(P,t)\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{y} = \\
&= E_{xM}(P)\cos\left(\omega t + \phi_x(P)\right)\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{x} + E_{yM}(P)\cos\left(\omega t + \phi_y(P)\right)\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{y} = \\
&= \left|E_x(P)\right|\cos\left(\omega t'\right)\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{x} + \left|E_y(P)\right|\cos\left(\omega t' + \Delta\phi(P)\right)\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{y}
\end{aligned}
$$

L’ultima uguaglianza si è ottenuta cambiando l’origine dell’asse temporale ($\omega t + \phi_x = \omega t'$). Inoltre, si è indicata con $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x$ la differenza di fase fra le 2 componenti.

Nel dominio dei fasori risulta:

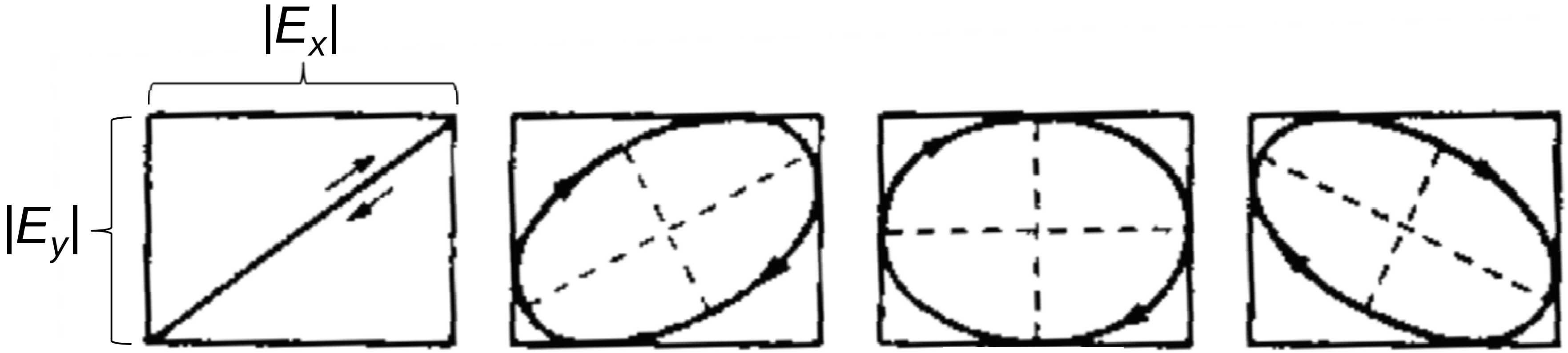
$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}(P) = E_x(P)\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{x} + E_y(P)\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{y} = \left|E_x(P)\right|e^{j\phi_x}\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{x} + \left|E_y(P)\right|e^{j\phi_y}\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{y} = \\
&= \left(\left|E_x\right|\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{x} + \left|E_y\right|e^{j\Delta\phi}\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{y}\right)e^{j\phi_x}
\end{aligned}
$$

Campi sinusoidali: stati di polarizzazione

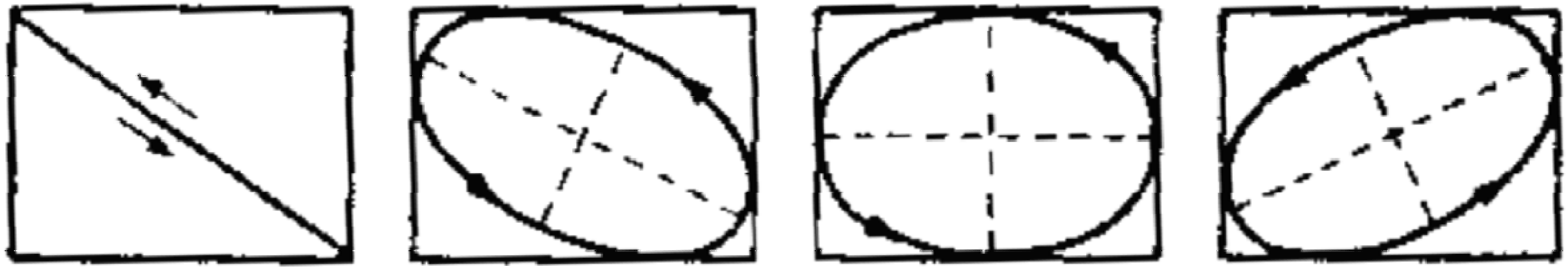
Caratteristiche di polarizzazione di un generico campo sinusoidale nel dominio del tempo

Circolare destrorsa	$\|E_x\| = \|E_y\|$	e	$\Delta\phi = -\pi/2$
Ellittica destrorsa	$\|E_x\|$, $\|E_y\|$ arbitrari	e	$\Delta\phi < 0$
Rettilinea	$\|E_x\| = 0$ o $\|E_y\| = 0$	oppure	$\Delta\phi = 0$ o $\Delta\phi = \pm\pi$
Ellittica sinistrorsa	$\|E_x\|$, $\|E_y\|$ arbitrari	e	$\Delta\phi > 0$
Circolare sinistrorsa	$\|E_x\| = \|E_y\|$	e	$\Delta\phi = \pi/2$

Polarizzazione: descrizione semi-qualitativa



$\Delta\phi = 0$ $\qquad 0 < \Delta\phi < \frac{\pi}{2}$ $\qquad \Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \frac{\pi}{2} < \Delta\phi < \pi$



$\Delta\phi = \pm\pi$ $\qquad -\pi < \Delta\phi < -\frac{\pi}{2}$ $\qquad \Delta\phi = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad -\frac{\pi}{2} < \Delta\phi < 0$

Polarizzazione … Applets

Applets utili per la comprensione della polarizzazione:

http://webphysics.davidson.edu/physlet_resources/dav_optics/Examples/polarization.html

http://www.amanogawa.com/archive/Polarization/Polarization-2.html

http://www.amanogawa.com/archive/Polarization2/Polarization2-2.html

Ellisse di polarizzazione

Si possono riscrivere le componenti del vettore sinusoidale **e**(t) nella forma:

$$\begin{cases} e_x(t) = |E_x|\left[\cos\omega t\cos\phi_x - \sin\omega t\sin\phi_x\right] \\ e_y(t) = |E_y|\left[\cos\omega t\cos\phi_y - \sin\omega t\sin\phi_y\right] \end{cases}$$

Risolvendo rispetto a cosωt e sinωt si ha:

$$\cos\omega t\sin\Delta\phi = \frac{e_y(t)}{|E_y|}\sin\phi_x - \frac{e_x(t)}{|E_x|}\sin\phi_y \qquad \sin\omega t\sin\Delta\phi = \frac{e_y(t)}{|E_y|}\cos\phi_x - \frac{e_x(t)}{|E_x|}\cos\phi_y$$

Sfruttando la relazione trigonometrica cos$^2\omega$t + sin$^2\omega$t = 1 si ha poi:

$$\left(\frac{e_y(t)}{|E_y|}\sin\phi_x - \frac{e_x(t)}{|E_x|}\sin\phi_y\right)^2 + \left(\frac{e_y(t)}{|E_y|}\cos\phi_x - \frac{e_x(t)}{|E_x|}\cos\phi_y\right)^2 = \sin^2\Delta\phi$$

Ellisse di polarizzazione (2)

e infine, ponendo $x=e_x(t)$ e $y=e_y(t)$:

$$\frac{x^2}{|E_x|^2}+\frac{y^2}{|E_y|^2}-2\cos\Delta\phi\frac{xy}{|E_x||E_y|}=\sin^2\Delta\phi$$

che rappresenta l'equazione dell'ellisse di polarizzazione espressa in termini delle quantità $|E_x|$, $|E_y|$, ϕ. Si può dimostrare che l'angolo Ψ formato dal semiasse maggiore dell'ellisse con l'asse x vale:

$$\psi=\frac{1}{2}arctg\left\{\frac{2|E_x||E_y|}{|E_x|^2-|E_y|^2}\cos\Delta\phi\right\}$$

Polarizzazione e fasori (1)

Sia $\vec{E} = \vec{E}(P)$ il vettore complesso rappresentativo del generico vettore sinusoidale $\vec{e} = \vec{e}(P,t)$, in un punto *P(x,y,z)* qualunque dello spazio, che ai fini della trattazione che segue si può supporre fissato. Proiettando $\vec{E}$ lungo gli assi di un generico sistema di riferimento cartesiano Ortogonale si ha:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= E_x\hat{i}_x + E_y\hat{i}_y + E_z\hat{i}_z = |E_x|e^{j\phi_x}\hat{i}_x + |E_y|e^{j\phi_y}\hat{i}_y + |E_z|e^{j\phi_z}\hat{i}_z = \\ &= |E_x|[\cos\phi_x + j\sin\phi_x]\hat{i}_x + |E_y|[\cos\phi_y + j\sin\phi_y]\hat{i}_y + |E_z|[\cos\phi_z + j\sin\phi_z]\hat{i}_z\end{aligned}}$$

Alternativamente, $\vec{E}$ può essere espresso come: $\vec{E} = \vec{E}_R + j\vec{E}_I$

Ponendo: $$\begin{cases}\vec{E}_R = |E_x|\cos\phi_x\hat{i}_x + |E_y|\cos\phi_y\hat{i}_y + |E_z|\cos\phi_z\hat{i}_z \\ \vec{E}_I = |E_x|\sin\phi_x\hat{i}_x + |E_y|\sin\phi_y\hat{i}_y + |E_z|\sin\phi_z\hat{i}_z\end{cases}$$

$(\vec{E}_R;\vec{E}_I)$: parte reale e immaginaria del fasore complesso associato al vettore

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{e}(t) &= \mathrm{Re}\{\vec{E}e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{(\vec{E}_R + j\vec{E}_I)e^{j\omega t}\} = \mathrm{Re}\{(\vec{E}_R + j\vec{E}_I)(\cos\omega t + j\sin\omega t)\} = \\ &= \mathrm{Re}\{\vec{E}_R\cos\omega t + j\vec{E}_R\sin\omega t + j\vec{E}_I\cos\omega t - \vec{E}_I\sin\omega t\} = \vec{E}_R\cos\omega t - \vec{E}_I\sin\omega t\end{aligned}}$$

Polarizzazione e fasori (2)

$\vec{e}(t)$ in ogni punto varia nel tempo, ma appartiene sempre al piano geometrico individuato dai vettori $\vec{E}_R \; ed \; \vec{E}_I$ e dal punto di applicazione P di $\vec{e}(t)$; si può dimostrare facilmente che al variare del tempo, l'estremità di $\vec{e}(t)$ descrive in tale pino una traiettoria ellittica:

Dim.

Si consideri in s.d.r. cartesiano ortogonale (x,y) nel piano dei vettori $\vec{E}_R, \vec{E}_I$ *, si*

Considerino le componenti di tali vettori lungo gli assi:
$$\begin{cases} \vec{E}_R = E_{Rx}\hat{i}_x + E_{Ry}\hat{i}_y \\ \vec{E}_I = E_{Ix}\hat{i}_x + E_{Iy}\hat{i}_y \end{cases}$$

Sostituendo: $\vec{e}(t) = \left(E_{Rx}\cos\omega t - E_{Ix}\sin\omega t\right)\hat{i}_x + \left(E_{Ry}\cos\omega t - E_{Iy}\sin\omega t\right)\hat{i}_y$

Allora:
$$\begin{cases} x(t) = E_{Rx}\cos\omega t - E_{Ix}\sin\omega t \\ y(t) = E_{Ry}\cos\omega t - E_{Iy}\sin\omega t \end{cases}$$
sono le comp. di $\vec{e}(t)$ *lungo (x,y)*

Da cui:

Polarizzazione e fasori (3)

$$\begin{cases} \sin \omega t = \dfrac{xE_{Ry} - yE_{Rx}}{\left(E_{Iy}E_{Rx} - E_{Ix}E_{Ry}\right)} \\ \cos \omega t = \dfrac{xE_{Iy} - yE_{Ix}}{\left(E_{Iy}E_{Rx} - E_{Ix}E_{Ry}\right)} \end{cases}$$

Elevando al quadrato e sommando membro a membro…

$$\left(xE_{Ry} - yE_{Rx}\right)^2 + \left(xE_{Iy} - yE_{Ix}\right)^2 = \left(E_{Iy}E_{Rx} - E_{Ix}E_{Ry}\right)^2$$

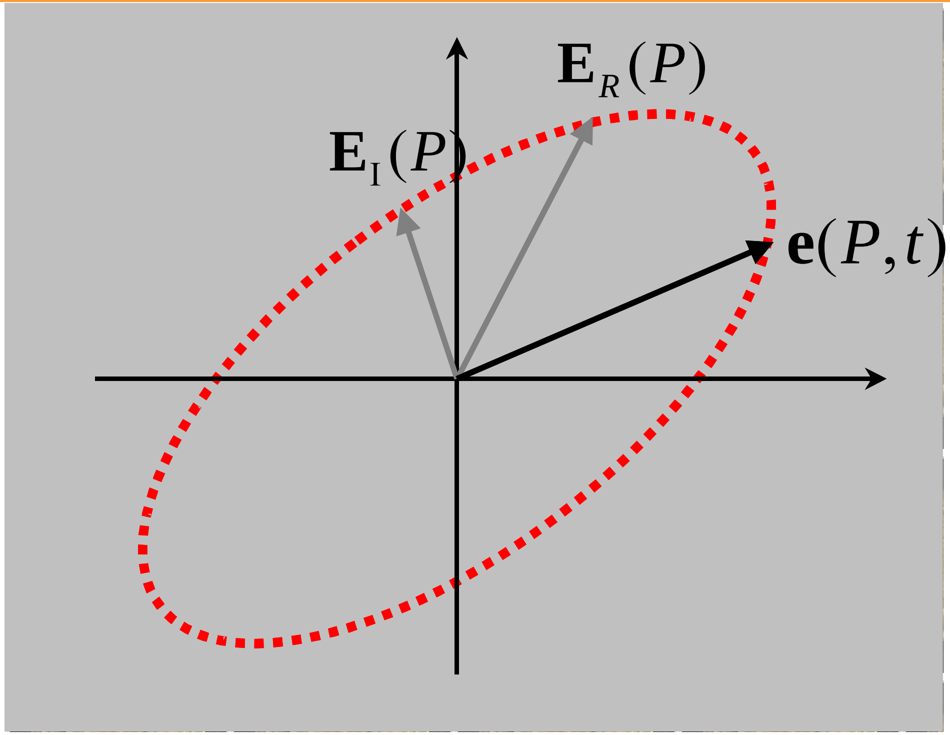
Ed infine …

$$\left(E_{Ry} + E_{Ix}\right)^2 x^2 + \left(E_{Rx} + E_{Ix}\right)^2 y^2 - 2\left(E_{Ry}E_{Rx} + E_{Ix}E_{Iy}\right)xy = \left(E_{Iy}E_{Rx} - E_{Ix}E_{Ry}\right)^2$$

Che rappresenta l'equazione di una ellisse (in forma non canonica)

Un vettore sinusoidale la cui estremità descrive un'ellisse si dice ***polarizzato ellitticamente.*** In casi particolari l'ellisse si riduce ad un cerchio (***pol. circolare***) o ad un segmento (***pol. lineare***)

Polarizzazione e fasori (4)



La polarizzazione circolare si ha quando i vettori $\vec{E}_R$ ed $\vec{E}_I$ sono perpendicolari tra loro ed hanno uguale modulo; la polarizzazione lineare si ottiene invece quando i vettori $\vec{E}_R$ ed $\vec{E}_I$ hanno stessa direzione, oppure quando uno di essi è nullo.

Nei casi di polarizzazione ellittica e circolare, il verso di rotazione può essere destrorso o sinistrorso.

Polarizzazione: due punti di vista complementari (1)

Qualunque campo sinusoidale può essere sempre scomposto in 2 polarizzazioni lineari distinte. Si usano due diversi metodi:

1) scomposizione del vettore sinusoidale in due polarizzazioni lineari in quadratura di fase tra loro. Nel dominio complesso si ha:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_R + j\mathbf{E}_I$$

Nel dominio dei tempi:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_R(t) = \mathbf{E}_R \cdot \cos \omega t \\ \mathbf{e}_I(t) = \mathbf{E}_I \cdot \sin \omega t = \mathbf{E}_I \cdot \cos\left(\omega t - \pi/2\right) \end{cases}$$

N.B. i vettori $\mathbf{E}_R$ ed $\mathbf{E}_I$ non sono, in generale, ortogonali!

Polarizzazione: due punti di vista complementari (2)

2) scomposizione del vettore sinusoidale in due polarizzazioni lineari ortogonali sul piano di polarizzazione (parallele agli assi di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy scelto su tale piano).

Nel dominio complesso si scrive:

$$\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{y}} = |E_x| e^{j\phi_x} \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{x}} + |E_y| e^{j\phi_y} \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{y}} = \left(|E_x| \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{x}} + |E_y| e^{j\Delta\phi} \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{y}} \right) e^{j\phi_x}$$

La polarizzazione del vettore **E** dipende dai moduli $|E_x|$ e $|E_y|$ delle componenti e dalla differenza di fase $\Delta\phi = \phi_x - \phi_y$ (non dipende dai valori assoluti ϕ_x e ϕ_y delle fasi!)

Studio della polarizzazione (1)

Esistono infinite possibilità per effettuare la scomposizione di un vettore sinusoidale in 2 pol. lineari. Considerato infatti un angolo δ qualsiasi, si può sempre scrivere:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathrm{R}} + j\mathbf{E}_{\mathrm{I}} = \left(\mathbf{E}_{\mathrm{R}} \cdot e^{-j\delta} + j\mathbf{E}_{\mathrm{I}} \cdot e^{-j\delta}\right) \cdot e^{j\delta} = \left(\mathbf{E}_1 + j\mathbf{E}_2\right) \cdot e^{j\delta}$$

dove $\mathbf{E}_1$ ed $\mathbf{E}_2$ sono 2 vettori così definiti:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{\mathrm{R}} \cdot \cos\delta + \mathbf{E}_{\mathrm{I}} \cdot \sin\delta \\ \mathbf{E}_2 = -\mathbf{E}_{\mathrm{R}} \cdot \sin\delta + \mathbf{E}_{\mathrm{I}} \cdot \cos\delta \end{cases}$$

- I vettori $\mathbf{E}_1$ ed $\mathbf{E}_2$ sono in generale del tutto differenti dai vettori $\mathbf{E}_{\mathrm{R}}$ ed $\mathbf{E}_{\mathrm{I}}$ (direzione, modulo, verso)!

Nel dominio dei tempi si ha:

$$\mathbf{e}(t) = \Re e\left\{\mathbf{E} \cdot e^{j\omega t}\right\} = \Re e\left\{\left(\mathbf{E}_1 + j\mathbf{E}_2\right) \cdot e^{j\delta} \cdot e^{j\omega t}\right\} = \mathbf{E}_1 \cos(\omega t + \delta) - \mathbf{E}_2 \sin(\omega t + \delta)$$

Studio della polarizzazione (2)

In particolare, è possibile individuare il valore δ_0 che consente di ottenere vettori $\mathbf{E_1}^{\mathbf{0}}$ ed $\mathbf{E_2}^{\mathbf{0}}$ fra loro ortogonali:

$$\mathbf{E}_1{}^0 \cdot \mathbf{E}_2{}^0 = 0$$

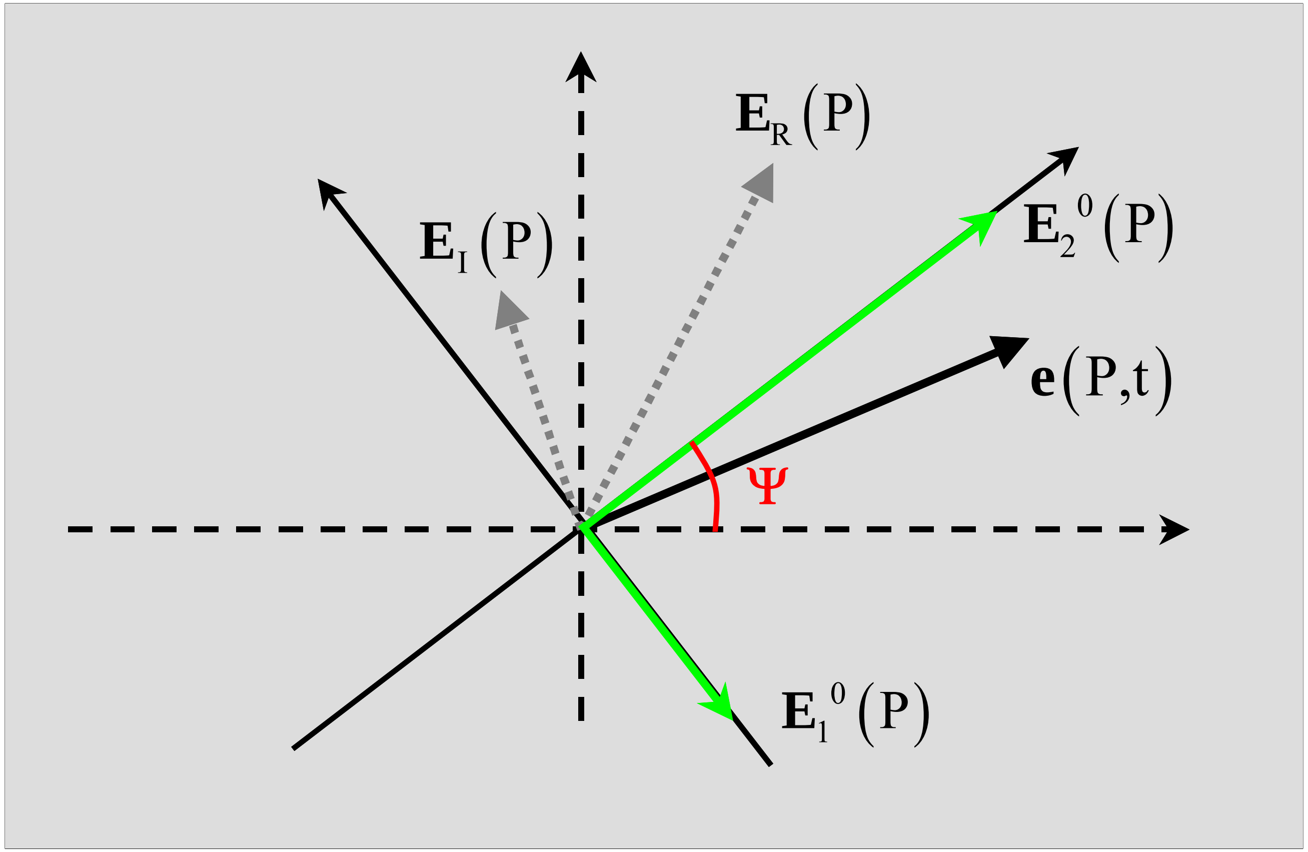
$$\left(\mathbf{E}_\mathrm{R} \cdot \cos\delta_0 + \mathbf{E}_\mathrm{I} \cdot \sin\delta_0\right) \cdot \left(-\mathbf{E}_\mathrm{R} \cdot \sin\delta_0 + \mathbf{E}_\mathrm{I} \cdot \cos\delta_0\right) = 0$$

$$\left(\left|\mathbf{E}_\mathrm{I}\right|^2 - \left|\mathbf{E}_\mathrm{R}\right|^2\right) \underbrace{\sin\delta_0 \cos\delta_0}_{\frac{\sin 2\delta}{2}} + \mathbf{E}_\mathrm{R} \cdot \mathbf{E}_\mathrm{I} \underbrace{\left(\cos^2\delta_0 - \sin^2\delta_0\right)}_{\cos 2\delta} = 0$$

$$\frac{1}{2} tg\left(2\delta_0\right)\left(\left|\mathbf{E}_\mathrm{R}\right|^2 - \left|\mathbf{E}_\mathrm{I}\right|^2\right) = \mathbf{E}_\mathrm{R} \cdot \mathbf{E}_\mathrm{I}$$

$$\delta_0 = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{2\,\mathbf{E}_\mathrm{R} \cdot \mathbf{E}_\mathrm{I}}{\left|\mathbf{E}_\mathrm{R}\right|^2 - \left|\mathbf{E}_\mathrm{I}\right|^2}\right)$$

Studio della polarizzazione (3)



Studio della polarizzazione (4)

Siano i vettori reali ortogonali che si ottengono da $\mathbf{E}_R$ ed $\mathbf{E}_I$ per mezzo del valore δ_0, cioè:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1{}^0 = \mathbf{E}_\mathrm{R} \cdot \cos\delta_0 + \mathbf{E}_\mathrm{I} \cdot \sin\delta_0 \\ \mathbf{E}_2{}^0 = -\mathbf{E}_\mathrm{R} \cdot \sin\delta_0 + \mathbf{E}_\mathrm{I} \cdot \cos\delta_0 \end{cases}$$

Evidentemente, conviene scegliere gli assi del sistema di riferimento nel piano di appartenenza del vettore **e**(t) in modo che abbiano direzioni coincidenti con quelle dei vettori $\mathbf{E}_1{}^0$ ed $\mathbf{E}_2{}^0$. Convenzionalmente, si sceglie l'asse x in modo che sia concorde con il vettore avente modulo maggiore fra i 2.

Assumendo che $\left(\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{x}{}^0, \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{y}{}^0\right)$ siano i versori di tale sistema di riferimento (orientati in modo tale da formare ancora una terna ortogonale destrorsa con $\hat{\mathbf{k}}$, cioè in modo che sia $\hat{\mathbf{i}}_x{}^0 \times \hat{\mathbf{i}}_y{}^0 = \hat{\mathbf{k}}$), risulta allora:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1{}^0 = \mathrm{A}\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{x}{}^0 \\ \mathbf{E}_2{}^0 = \mathrm{B}\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{y}{}^0 \end{cases} \quad \text{se } \left\|\mathbf{E}_1{}^0\right\| > \left\|\mathbf{E}_2{}^0\right\| \qquad \text{oppure:} \qquad \begin{cases} \mathbf{E}_1{}^0 = \mathrm{B}\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{y}{}^0 \\ \mathbf{E}_2{}^0 = \mathrm{A}\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{x}{}^0 \end{cases} \quad \text{se } \left\|\mathbf{E}_1{}^0\right\| < \left\|\mathbf{E}_2{}^0\right\|$$

con A, B $\in \Re$, A > 0 e A > | B |.

Studio della polarizzazione (5)

Non è detto che, in generale, i vettori $\mathbf{E}_1^{\mathbf{0}}$ e $\mathbf{E}_2^0$ costituiscano una terna destrorsa con $\hat{\mathbf{i}}_z$. Infatti, il vettore avente modulo minore fra $\mathbf{E}_1^0$ e $\mathbf{E}_2^0$ può avere verso concorde oppure discorde con il versore dell'asse y (individuato dalla regola della mano destra, visto che i versori $\hat{\mathbf{i}}_x^0$ e $\hat{\mathbf{k}}$ sono fissati). Ciò si traduce nel fatto che la grandezza scalare B può avere segno positivo oppure negativo.

Pertanto, il vettore complesso **E** si può sempre esprimere nella forma:

$$\boxed{\mathbf{E} = \left(\mathrm{A}\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{x}}^{\,0} + \mathrm{jB}\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{y}}^{\,0}\right)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_0} \quad \text{con } \mathrm{A} > 0,\ \mathrm{A} > |\mathrm{B}|}$$

I versori $\left(\hat{i}_x^0, \hat{i}_y^0\right)$ individuano un sistema di riferimento che è chiamato riferimento principale della polarizzazione considerata. Tale riferimento è l'unico possibile che consente di scomporre il vettore in 2 polarizzazioni lineari che sono sia ortogonali che in quadratura di fase tra loro.

Studio della polarizzazione (6)

Nel dominio dei tempi, si ha:

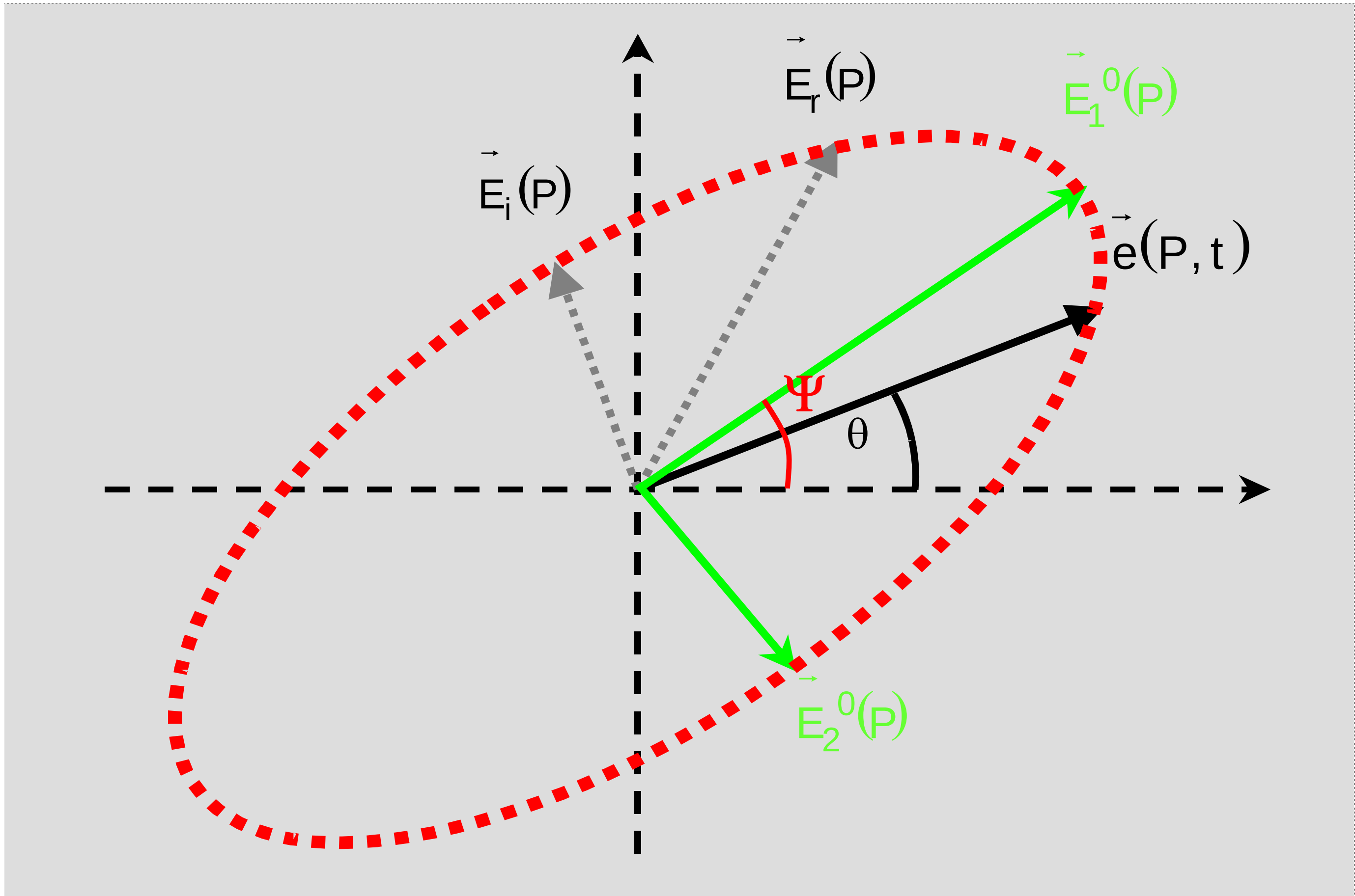
$$\mathbf{e}(t) = \underbrace{A\cos\left(\omega t + \delta_0\right)}_{x_0} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{x}}^{\,0} - \underbrace{B\sin\left(\omega t + \delta_0\right)}_{y_0} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{y}}^{\,0}$$

ed immediatamente si ricava:

$$\left(\frac{x_0}{A}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{B}\right)^2 = 1$$

che rappresenta la ben nota equazione di una ellissi avente gli assi coincidenti con gli assi del sistema di riferimento (in forma canonica). Ne consegue che *i vettori* $\boldsymbol{E}_1^0$ *ed* $\boldsymbol{E}_2^0$ *sono orientati lungo i semiassi maggiore e minore dell'ellisse descritta dall'estremità del vettore sinusoidale*.

Studio della polarizzazione (7)



Studio della polarizzazione (8)

Per ottenere il verso di rotazione di **e**(t) occorre studiare il segno della derivata $d\theta/dt$: se positivo, θ cresce, e quindi la rotazione è antioraria, se invece è negativo θ cala e la rotazione è oraria. Essendo

$$tg\theta = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{B}{A} \cdot tg\left(\omega t + \delta_0\right) \Rightarrow \theta = Arctg\left(-\frac{B}{A} \cdot tg\left(\omega t + \delta_0\right)\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\frac{B^2}{A^2} \cdot tg^2\left(\omega t + \delta_0\right) + 1} \cdot \left(-\frac{B}{A}\right) \frac{\omega}{\cos^2\left(\omega t + \delta_0\right)} = -\frac{B}{A} \frac{\omega}{\frac{B^2}{A^2} \cdot \sin^2\left(\omega t + \delta_0\right) + \cos^2\left(\omega t + \delta_0\right)}$$

si ricava immediatamente che:

- Se $B>0$: polarizzazione sinistrorsa (oraria)
- Se $B<0$: polarizzazione destrorsa (antioraria)
- Se $B=0$: polarizzazione lineare

In generale $d\theta/dt$ non è costante, a meno che non risulti $A=|B|$ (polarizzazione circolare). In tal caso, si ha $|d\theta/dt|=\omega$.

Studio della polarizzazione (9)

Vale inoltre la seguente proprietà:

$$\mathbf{E}_1{}^0 \times \mathbf{E}_2{}^0 \cdot \hat{\mathbf{k}} = AB$$

Essendo inoltre

$$\mathbf{E}_1{}^0 \times \mathbf{E}_2{}^0 = \left(\mathbf{E}_\mathrm{R} \cdot \cos\delta_0 + \mathbf{E}_\mathrm{I} \cdot \sin\delta_0\right) \times \left(-\mathbf{E}_\mathrm{R} \cdot \sin\delta_0 + \mathbf{E}_\mathrm{I} \cdot \cos\delta_0\right) =$$
$$= \mathbf{E}_\mathrm{R} \times \mathbf{E}_\mathrm{I} \cdot \cos^2\delta_0 - \mathbf{E}_\mathrm{I} \times \mathbf{E}_\mathrm{R} \cdot \sin^2\delta_0 = \mathbf{E}_\mathrm{R} \times \mathbf{E}_\mathrm{I}$$

risulta anche:

$$\mathbf{E}_\mathrm{R} \times \mathbf{E}_\mathrm{I} \cdot \hat{\mathbf{k}} = AB$$

Il segno di B coincide dunque con quello della quantità $\mathbf{E}_\mathrm{R} \times \mathbf{E}_\mathrm{I} \cdot \hat{\mathbf{k}}$.

Si può quindi dedurre il seguente schema riassuntivo:

Studio della polarizzazione (10)

Polarizzazione: tabella riassuntiva

	DESTRORSA (antioraria)	**SINISTRORSA (oraria)**
POL. LINEARE	$\mathbf{E}_\mathrm{R} = 0$ oppure $\mathbf{E}_\mathrm{I} = 0$ oppure $\mathbf{E}_\mathrm{R} \times \mathbf{E}_\mathrm{I} = 0$	
POL. ELLITTICA	$\mathbf{E}_\mathrm{R} \not\perp \mathbf{E}_\mathrm{I}$ oppure $\lvert\mathbf{E}_\mathrm{R}\rvert \neq \lvert\mathbf{E}_\mathrm{I}\rvert$ $\mathbf{E}_\mathrm{R} \times \mathbf{E}_\mathrm{I} \cdot \hat{\mathbf{k}} < 0$	$\mathbf{E}_\mathrm{R} \not\perp \mathbf{E}_\mathrm{I}$ oppure $\lvert\mathbf{E}_\mathrm{R}\rvert \neq \lvert\mathbf{E}_\mathrm{I}\rvert$ $\mathbf{E}_\mathrm{R} \times \mathbf{E}_\mathrm{I} \cdot \hat{\mathbf{k}} > 0$
POL. CIRCOLARE	$\mathbf{E}_\mathrm{R} \perp \mathbf{E}_\mathrm{I}$ e $\lvert\mathbf{E}_\mathrm{R}\rvert = \lvert\mathbf{E}_\mathrm{I}\rvert$ $\mathbf{E}_\mathrm{R} \times \mathbf{E}_\mathrm{I} \cdot \hat{\mathbf{k}} < 0$	$\mathbf{E}_\mathrm{R} \perp \mathbf{E}_\mathrm{I}$ e $\lvert\mathbf{E}_\mathrm{R}\rvert = \lvert\mathbf{E}_\mathrm{I}\rvert$ $\mathbf{E}_\mathrm{R} \times \mathbf{E}_\mathrm{I} \cdot \hat{\mathbf{k}} > 0$

Studio della polarizzazione: riepilogo

Lo studio della polarizzazione di un vettore sinusoidale è completo quando sono determinate le informazioni seguenti:

- Il tipo di polarizzazione (ellittica, circolare, lineare) e il verso di rotazione del vettore (tranne il caso di pol. lineare)
- Il fattore di forma |B| / A dell'ellisse: noto tale rapporto, ed essendo noto il modulo del vettore, A e B si ricavano facilmente osservando che vale la seguente proprietà:

$$\|\mathbf{E}\| = \sqrt{\left(\mathbf{E}_1{}^0 + \mathrm{j}\mathbf{E}_2{}^0\right)e^{j\delta_0} \cdot \left(\mathbf{E}_1{}^0 - \mathrm{j}\mathbf{E}_2{}^0\right)e^{-j\delta_0}} = \sqrt{\mathbf{E}_1{}^0 \cdot \mathbf{E}_1{}^0 + \mathbf{E}_2{}^0 \cdot \mathbf{E}_2{}^0} = \sqrt{\left\|\mathbf{E}_1{}^0\right\|^2 + \left\|\mathbf{E}_2{}^0\right\|^2} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

  che si traduce, da un punto di vista geometrico, nel fatto che il modulo del vettore **E** coincide con la distanza fra un estremo dell'asse minore e uno dell'asse maggiore)

- L'angolo Ψ che l'asse maggiore dell'ellisse forma con l'asse x di un riferimento cartesiano ortogonale sul piano di polarizzazione

$$\Psi = \arccos\left(\hat{\mathbf{i}}_x{}^0 \cdot \hat{\mathbf{i}}_x\right)$$

- [La fase iniziale δ_0]

Scomposizione in 2 polarizzazioni circolari

Si considerino i seguenti versori complessi, espressi rispetto a un riferimento cartesiano (x,y) sul piano di polarizzazione di **E**:

$$\mathbf{i}_d = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}_x - j\,\mathbf{i}_y) \qquad \mathbf{i}_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}_x + j\,\mathbf{i}_y)$$

Il versore $\mathbf{i}_d$ ha **polarizzazione circolare destrorsa**, per chi guarda nella direzione positiva dell'asse z; $\mathbf{i}_s$ invece è una polarizzazione circolare **sinistrorsa**. Si noti anche che risulta:

$$\hat{\mathbf{i}}_d{}^* = \hat{\mathbf{i}}_s \qquad \hat{\mathbf{i}}_s{}^* = \hat{\mathbf{i}}_d$$

Il vettore **E** può essere espresso anche mediante le sue componenti rispetto al riferimento ($\mathbf{i}_{d,}$ $\mathbf{i}_s$), nel modo seguente:

$$\mathbf{E} = E_d\hat{\mathbf{i}}_d + E_s\hat{\mathbf{i}}_s = \left(\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{i}}_d{}^*\right)\hat{\mathbf{i}}_d + \left(\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{i}}_s{}^*\right)\hat{\mathbf{i}}_s = \left(\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{i}}_s\right)\hat{\mathbf{i}}_d + \left(\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{i}}_d\right)\hat{\mathbf{i}}_s$$

Scomposizione in 2 polarizzazioni circolari (2)

Sostituendo nelll'equazione precedente le componenti del vettore complesso **E** e dei versori complessi $\left(\hat{\mathbf{i}}_s, \hat{\mathbf{i}}_d\right)$ rispetto al sistema cartesiano $\left(\hat{\mathbf{i}}_x, \hat{\mathbf{i}}_y\right)$ si ha:

$$\begin{cases} E_d = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(E_x + jE_y\right) \\ E_s = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(E_x - jE_y\right) \end{cases}$$

Espressioni inverse:

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(E_d + E_s\right) \\ E_y = j\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-E_d + E_s\right) \end{cases}$$

Rapporto di polarizzazione circolare

Si definisce **rapporto di polarizzazione circolare** il numero complesso:

$$q = \frac{E_s}{E_d}$$

In base al valore assunto da q (e in particolare dal suo modulo) si può stabilire in modo immediato il tipo di polarizzazione, secondo la seguente regola:

$$q = \frac{E_s}{E_d} \Rightarrow \begin{cases} |q| > 1 \;\; \text{ellittica sinistrorsa} (= +\infty \Rightarrow \text{circolare}) \\ |q| = 1 \;\; \text{rettilinea ruotata con angolo} -\dfrac{1}{2}\arg q \\ |q| < 1 \;\; \text{ellittica destrorsa} \quad (= 0 \Rightarrow \text{circolare}) \end{cases}$$

Basi di versori complessi: relazioni

Siano $\left(\hat{i}_u, \hat{i}_v\right)$ 2 versori complessi polarizzati sul medesimo piano di **E,** e fra loro ortogonali. Essi devono soddisfare le relazioni:

$$\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}}* = 1 \qquad \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{v}}* = 1 \qquad \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{v}}* = 0$$

Si può allora scomporre E rispetto a tale base, e si ha:

$$\mathbf{E} = \mathrm{E_u}\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}} + \mathrm{E_v}\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{v}} \quad \text{dove:} \quad \begin{cases} \mathrm{E_u} = \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}}^* \\ \mathrm{E_v} = \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{v}}^* \end{cases}$$

Sia ora $\left(\hat{i}_m, \hat{i}_n\right)$ un'altra base ortogonale sul medesimo piano. Si può scrivere:

$$\mathbf{E} = \mathrm{E_u}\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}} + \mathrm{E_v}\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{v}} = \mathrm{E_m}\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{m}} + \mathrm{E_n}\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}}$$

$$\begin{cases} \mathrm{E_u} = \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}}^* = \mathrm{E_m}\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{m}}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}}^* + \mathrm{E_n}\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}}^* \\ \mathrm{E_v} = \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{v}}^* = \mathrm{E_m}\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{m}}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{v}}^* + \mathrm{E_n}\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{v}}^* \end{cases}$$

Rapporto di polarizzazione lineare (1)

Si ottiene infine la formula:

$$\frac{E_v}{E_u} = \frac{\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{v}}^{*} + \frac{E_n}{E_m} \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{v}}^{*}}{\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}}^{*} + \frac{E_n}{E_m} \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{u}}^{*}}$$

Il rapporto tra le componenti scalari in una qualunque base ortogonale è una funzione bilineare dell'analogo rapporto calcolato in un'altra qualunque base ortogonale

Applicando la formula precedente ai riferimenti $\left(\hat{i}_s, \hat{i}_d\right)$ e $\left(\hat{i}_x, \hat{i}_y\right)$ si ottiene:

$$q = \frac{1 - j\dfrac{E_y}{E_x}}{1 + j\dfrac{E_y}{E_x}} = \frac{1 - p}{1 + p}$$

dove:

$$\boxed{p = j\frac{E_y}{E_x}}$$

p $\Rightarrow$ Rapporto di polarizzazione rettilinea

Rapporto di polarizzazione lineare (2)

Si ricava facilmente:

$$q = \frac{1-p}{1+p} = \frac{1 - \mathrm{Re}\{p\} - j\,\mathrm{Im}\{p\}}{1 + \mathrm{Re}\{p\} + j\,\mathrm{Im}\{p\}} \quad \Rightarrow \quad |q| = \sqrt{\frac{\left(1-\mathrm{Re}\{p\}\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\{p\}\right)^2}{\left(1+\mathrm{Re}\{p\}\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\{p\}\right)^2}}$$

e si ottengono quindi le seguenti corrispondenze fra i valori assunti dal modulo di q e dalla parte reale di p:

$$\begin{aligned} |q| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\{p\} > 0 \\ |q| > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\{p\} < 0 \\ |q| = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\{p\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad p = 1 \\ q = \infty \quad &\Leftrightarrow \quad p = -1 \end{aligned}$$

Rapporti di polarizzazione

Rapporti di polarizzazione: tabella riassuntiva

Polarizzazione	*A* , *B*	q	p
Ellittica sinistrorsa	$B > 0$	$\lvert q \rvert > 1$	$\mathrm{Re}\{p\} < 0$
Circolare sinistrorsa	$B = A$	$\lvert q \rvert = \infty$	$p = -1$
Rettilinea	$B = 0$	$\lvert q \rvert = 1$	$\mathrm{Re}\{p\} = 0$
Circolare destrorsa	$B = -A$	$\lvert q \rvert = 0$	$p = 1$
Ellittica destrorsa	$B < 0$	$\lvert q \rvert < 1$	$\mathrm{Re}\{p\} > 0$

Rapporto di polarizzazione circolare: proprietà

Nel riferimento principale risulta:

$$p_0 = j\frac{E_{y0}}{E_{x0}} = -\frac{B}{A} \quad \text{e:} \quad q_0 = \frac{1-p_0}{1+p_0} = \frac{1+B/A}{1-B/A} = |q| \quad p_0, q_0 \in R$$

Invertendo la relazione precedente si ha:

$$\boxed{\frac{B}{A} = \frac{q_0 - 1}{q_0 + 1} = \frac{|q|-1}{|q|+1}}$$

la quale consente di calcolare direttamente il fattore di forma |B|/A dell'ellisse di polarizzazione.

Infine, si può dimostrare che:

$$\boxed{\psi = -\frac{\arg(q)}{2} + k\pi}$$

dove k è un numero intero che va scelto in modo che l'angolo Ψ soddisfi la disuguaglianza: $0 \le \psi < \pi$. Quest'ultima relazione non ha significato nel caso di polarizzazione circolare (ogni rif. cartesiano è un rif. principale)

Esercizio

Esercizio (dal compito intermedio del 23/05/2001)

Sia dato il vettore sinusoidale:

$$\mathbf{e}(t) = \cos(\omega t + \pi/3)\ \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{x}} + \sin(\omega t + \pi/4)\Big/\sqrt{2}\ \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{y}}$$

1) Calcolare il corrispondente fasore **E.**
2) Determinare la polarizzazione del campo.
3) Scomporre **E** in due polarizzazioni circolari opposte.
4) Determinare l'orientazione dell'ellisse di polarizzazione, e la lunghezza dei suoi semi-assi.
5) Trovare le componenti in fase e in quadratura.
6) Determinare lo sfasamento δ che rende ortogonali le due componenti.

Vettori complessi paralleli

Due vettori complessi **J**, **E** sono paralleli se:

$$\boxed{\vec{J} = c\vec{E} \qquad c \in C}$$

$$|\mathrm{c}| = \frac{\|\mathbf{J}\|}{\|\mathbf{E}\|}$$

Rappresentando i vettori nel riferimento $(\hat{i}_d, \hat{i}_s)$ si ha:

$$\mathrm{J_d}\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{d} + \mathrm{J_s}\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{s} = \mathrm{c}\left(\mathrm{E_d}\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{d} + \mathrm{E_s}\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{s}\right)$$

da cui:

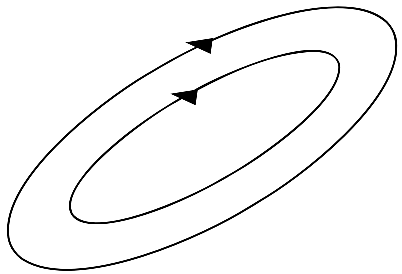
$$\boxed{\mathrm{q_J} = \frac{\mathrm{J_s}}{\mathrm{J_d}} = \frac{\mathrm{E_s}}{\mathrm{E_d}} = \mathrm{q_E}}$$

Vettori complessi paralleli (2)

Avendo lo stesso rapporto di polarizzazione circolare, i vettori sinusoidali associati a **J, E** hanno lo stesso tipo di polarizzazione, e quindi:

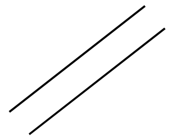
– Ellissi di polarizzazione equiorientate (assi sovrapposti) e geometricamente simili (stesso fattore di forma |B|/A)

– Stesso verso di rotazione

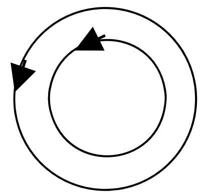


Casi particolari:

– 2 polarizzazioni lineari lungo la stessa direzione



– 2 polarizzazioni circolari con versi di rotazione concordi



Vettori complessi paralleli (3)

In generale, i vettori sinusoidali **j**(t) ed **e**(t) non sono istante per istante paralleli nello spazio, a meno che:

- J, E polarizzati linearmente
- J, E aventi polarizzazione qualunque, ma <u>con la stessa fase iniziale δ</u>.

Infatti, rappresentando **J** ed **E** rispetto al riferimento principale si ha:

$$\begin{cases} \mathbf{J} = \|\mathbf{J}\|\left(A\hat{\mathbf{i}}_{x0} + jB\hat{\mathbf{i}}_{y0}\right)\exp(j\delta_J) \\ \mathbf{E} = \|\mathbf{E}\|\left(A\hat{\mathbf{i}}_{x0} + jB\hat{\mathbf{i}}_{y0}\right)\exp(j\delta_E) \end{cases} \qquad A^2+B^2=1$$

e si ricava quindi:

$$\mathbf{J} = \underbrace{\frac{J}{E}}_{|c|}\underbrace{\exp\left[j\left(\delta_J - \delta_E\right)\right]}_{\arg(c)}\mathbf{E}$$

Se risulta $\delta_J=\delta_E=\delta$ (vettori paralleli istante per istante) si ha:

$$\vec{J} = c\vec{E} \quad con \quad c \in R^+$$ costante di proporzionalità reale positiva!

Esempio: vettore (versore) di polarizzazione

Dato un vettore sinusoidale $\vec{e}(t)$ ed indicato con $\vec{E}$ il fasore ad esso associato, si definisce vettore di polarizzazione il vettore di modulo unitario (si parla anche di "versore di polarizzazione"):

$$\hat{p} = \frac{\vec{E}}{\left|\vec{E}\right|} e^{j\chi}$$

Vettore complesso di modulo unitario avente la stessa polarizzazione di $\vec{E}$ *(in quanto parallelo ad* $\vec{E}$ *)*

χ *: termine di fase arbitrario* (non altera la polarizzazione)

L'introduzione del vettore di polarizzazione è comodo perché consente di separare le informazioni sull'intensità del campo (espressa dal modulo del vettore $\vec{E}$) dalle sue proprietà di polarizzazione.

$$\Longrightarrow \qquad \vec{E} = \hat{p}\left|\vec{E}\right| e^{-j\chi}$$

Vettori complessi ortogonali

Due vettori complessi **J**, **E** polarizzati sullo stesso piano sono ortogonali se:

$$\boxed{\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} = 0}$$

Rappresentando i vettori nel riferimento $\left(\hat{i}_d, \hat{i}_s\right)$ si ha:

$$\left(\mathrm{J}_d^* \hat{\mathbf{i}}_d^* + \mathrm{J}_s^* \hat{\mathbf{i}}_s^*\right) \cdot \left(\mathrm{E}_d \hat{\mathbf{i}}_d + \mathrm{E}_s \hat{\mathbf{i}}_s\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{J}_d^* \mathrm{E}_d + \mathrm{J}_s^* \mathrm{E}_s = 0$$

da cui:

$$\mathrm{q_E} = \frac{\mathrm{E_s}}{\mathrm{E_d}} = -\frac{\mathrm{J_d}^*}{\mathrm{J_s}^*} = -\frac{1}{\mathrm{q_J}^*} \quad \Rightarrow$$

$$1) \quad \left|\mathrm{q_E}\right| = \frac{1}{\left|\mathrm{q_J}\right|}$$

$$2) \quad \arg(\mathrm{q_E}) = (2k+1)\pi + \arg(\mathrm{q_J}) \quad \Rightarrow \quad -\frac{\arg(\mathrm{q_J})}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\arg(\mathrm{q_E})}{2}$$

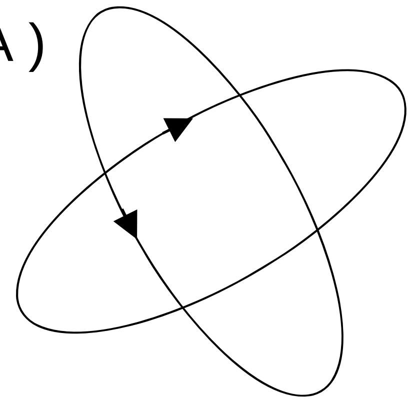
Vettori complessi ortogonali (2)

La 1) mostra che:

- **J** ed **E** sono entrambi polarizzati ellitticamente , circolarmente o linearmente sul medesimo piano di polarizzazione.
- Versi di rotazione opposti.
- Gli ellissi sono geometricamente simili (stesso |B|/A)

La 2) mostra che:

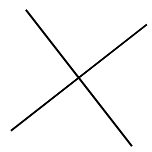
- Gli assi maggiori delle 2 ellissi di polarizzazione sono perpendicolari

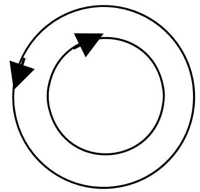


In questo caso, le polarizzazioni di **J** ed **E** si dicono incrociate

Casi particolari:

- 2 polarizzazioni lineari su direzioni perpendicolari
- 2 polarizzazioni circolari con versi di rotazione opposti





Vettori complessi ortogonali (3)

In generale, i vettori sinusoidali **j**(t) ed **e**(t) non sono istante per istante perpendicolari nello spazio, a meno che:

- J, E polarizzati linearmente
- J, E aventi polarizzazione qualunque, ma <u>con la stessa fase iniziale δ</u>.

Si supponga ora che **J** ed **E** siano polarizzati su piani diversi. Si può scomporre il vettore **J** in un componente $\mathbf{J}_t$ complanare con **E** e in un componente lungo la normale $\mathbf{i}_n$ al piano di polarizzazione di **E**. Si ha:

$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{n}} \times \mathbf{J} \times \hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{n}} + \left(\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{n}}\right)\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{n}} = \mathbf{J}_t + J_n \hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{n}}$$

e quindi:

$$\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} = \mathbf{J}_t^* \cdot \mathbf{E}$$

poiché $\hat{\mathbf{i}}_n^* \cdot \mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}_n \cdot \mathbf{E} = 0$. Quindi, <u>il componente normale di **J** è sempre ortogonale, per definizione, al vettore **E**</u>.

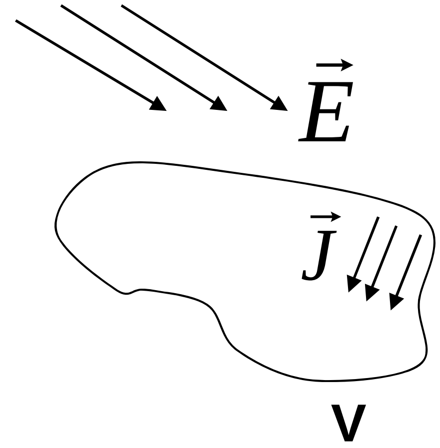
Esempio: adattamento in polarizzazione

Consideriamo un campo sinusoidale $\vec{e}(t)$ che incide su un'antenna ricevente schematizzata mediante una distribuzione di correnti impresse $\vec{j}(t)$ (di tipo utilizzatore) nel volume V. Si può mostrare che la potenza istantanea trasferita dal campo all'antenna è:

$$p_R(t) = \iiint_V \vec{j}(t) \cdot \vec{e}(t)\, dV =$$

$$= \frac{1}{4} \iiint_V \left[\vec{J} e^{j\omega t} + \vec{J}^* e^{-j\omega t} \right] \cdot \left[\vec{E} e^{j\omega t} + \vec{E}^* e^{-j\omega t} \right] dV =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ \iiint_V \frac{\vec{J}^* \cdot \vec{E}}{2}\, dV \right\} + \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{2} e^{j2\omega t} \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E}\, dV \right\}$$



La potenza attiva effettivamente ricevuta (trasferita dal campo all'antenna) è :

$$P_R = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\iiint_V \vec{j}(t) \cdot \vec{e}(t)\, dV \right] dt = \mathrm{Re}\left\{ \iiint_V \frac{\vec{J}^* \cdot \vec{E}}{2}\, dV \right\}$$

Esempio: adattamento in polarizzazione (2)

Quando $\vec{J}^* \cdot \vec{E} = 0$ (**J** ed **E** ortogonali) si ha potenza trasferita nulla!!!

Quando $\vec{J} = c\vec{E} \quad con \quad c \in R$ (**J** ed **E** paralleli) si ha potenza trasferita massima :

$$\Rightarrow \quad \vec{J}^* \cdot \vec{E} = c\vec{E} \cdot \vec{E}^* = c\left\|\vec{E}\right\|^2 = \left\|\vec{J}\right\|\left\|\vec{E}\right\|$$

Quando si ha massimo trasferimento di potenza attiva dal campo incidente all'antenna si parla di ADATTAMENTO IN POLARIZZAZIONE.

La configurazione fisica dell'antenna ricevente deve essere tale da consentire di sostenere una distribuzione di correnti impresse che abbiano la stessa polarizzazione del campo incidente. In tutti gli altri casi $P_R < P_{R\ MAX}$ e la perdita di polarizzazione rispetto al massimo può essere quantificata dalla grandezza:

$$A_p = 10\log_{10}\left[\frac{\iiint_V \frac{\left\|\vec{J}\right\| \left\|\vec{E}\right\|}{2}\, dV}{\mathrm{Re}\left[\iiint_V \frac{\vec{J}^* \cdot \vec{E}}{2}\, dV\right]}\right]$$

ATTENUAZIONE DI POLARIZZAZIONE

Vettori complessi perpendicolari

Due vettori complessi **E, H** sono perpendicolari se:

$$\boxed{\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}=0}$$

Rappresentando i vettori nel riferimento $(\hat{i}_d,\hat{i}_s)$ si ha:

$$\left(\mathrm{E_d}\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{d}+\mathrm{E_s}\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{s}\right)\cdot\left(\mathrm{H_d}\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{d}+\mathrm{H_s}\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{s}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{E_s H_d}+\mathrm{E_d H_s}=0$$

da cui:

$$\mathrm{q_E}=\frac{\mathrm{E_s}}{\mathrm{E_d}}=-\frac{\mathrm{H_s}}{\mathrm{H_d}}=-\,\mathrm{q_H} \quad\Rightarrow$$

$$1)\quad \left|\mathrm{q_E}\right|=\left|\mathrm{q_H}\right|$$

$$2)\quad -\frac{\arg(\mathrm{q_J})}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\arg(\mathrm{q_E})}{2}$$

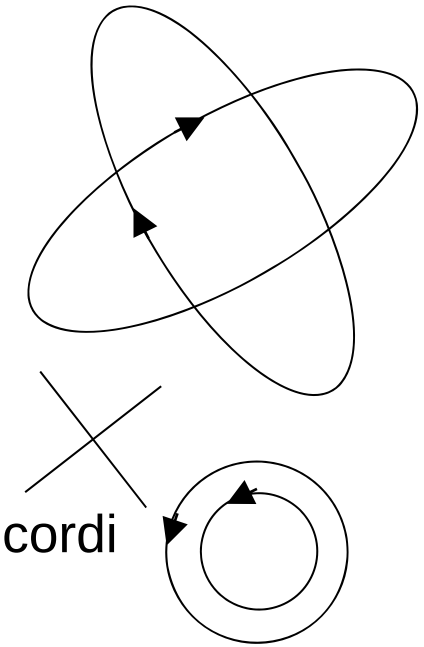
Vettori complessi perpendicolari (2)

La 1) mostra che:

- **J** ed **E** sono entrambi polarizzati ellitticamente , circolarmente o linearmente sul medesimo piano di polarizzazione.
- Versi di rotazione concordi.
- Gli ellissi sono geometricamente simili (stesso |B|/A)

La 2) mostra che:

- Gli assi maggiori delle 2 ellissi di polarizzazione sono perpendicolari



Casi particolari:

- 2 polarizzazioni lineari su direzioni perpendicolari
- 2 polarizzazioni circolari con versi di rotazione concordi

Vettori complessi perpendicolari (3)

In generale, i vettori sinusoidali **j**(t) ed **e**(t) non sono istante per istante perpendicolari nello spazio, a meno che:

- J, E polarizzati linearmente
- J, E aventi polarizzazione qualunque, ma <u>con la stessa fase iniziale δ</u>.

Si noti che <u>la nozione di perpendicolarità è in generale distinta da quella di ortogonalità</u>.

Fa eccezione il caso in cui uno dei 2 vettori (e quindi anche l'altro) sia polarizzato linearmente. Infatti, supponiamo che E sia polarizzato linearmente. Si può scrivere allora:

$$\mathbf{E} = \mathrm{E}\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{E}} \quad \text{con} \quad \hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{E}} \ \text{versore reale} \quad \rightarrow$$

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{H} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}^{*}\cdot\mathbf{H} = 0$$

Vettori complessi coniugati

Vettori complessi **E, F** coniugati:

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{E}^*}$$

Rappresentando i vettori nel riferimento $(\hat{i}_d, \hat{i}_s)$ si ha:

$$\mathrm{F_d}\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{d} + \mathrm{F_s}\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{s} = \mathrm{E_d}^*\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{d}^* + \mathrm{E_s}^*\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{s}^* = \mathrm{E_d}^*\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{s} + \mathrm{E_s}^*\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{d}$$

da cui:

$$\mathrm{q_F} = \frac{\mathrm{F_s}}{\mathrm{F_d}} = \frac{\mathrm{E_d}^*}{\mathrm{E_s}^*} = \frac{1}{\mathrm{q_E}^*} \quad \Rightarrow$$

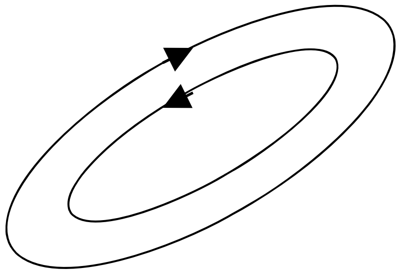
$$1)\quad |\mathrm{q_F}| = 1/|\mathrm{q_E}|$$

$$2)\quad \arg(\mathrm{q_F}) = 2k\pi - \arg(\mathrm{q_E}^*) \quad \Rightarrow \quad \arg(\mathrm{q_F}) = \arg(\mathrm{q_E}) + 2k\pi$$

Vettori complessi coniugati (2)

La 1) mostra che:

- **J** ed **E** sono entrambi polarizzati ellitticamente , circolarmente o linearmente sul medesimo piano di polarizzazione.
- Versi di rotazione opposti.
- Gli ellissi sono geometricamente simili (stesso |B|/A)



La 2) mostra che:

- Gli assi maggiori delle 2 ellissi di polarizzazione sono sovrapposti

Le proprietà di polarizzazione dei 2 vettori differiscono solamente per il verso di rotazione

Casi particolari:

- 2 polarizzazioni lineari lungo la stessa direzione
- 2 polarizzazioni circolari con versi di rotazione opposti