Operatori differenziali (1)

- **Gradiente** (opera su uno scalare; ha come risultato un vettore)

$$grad(\Phi) = \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{x}}\hat{\mathbf{i}}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{y}}\hat{\mathbf{i}}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{z}}\hat{\mathbf{i}}_z$$

- **Divergenza** (opera su un vettore; ha come risultato uno scalare)

$$div(\mathbf{A}) = \nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial A_y}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial A_z}{\partial \mathrm{z}}$$

- **Rotazionale o rotore** (opera su un vettore; ha come risultato un vettore)

$$rot(\mathbf{A}) = \nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}}_x & \hat{\mathbf{i}}_y & \hat{\mathbf{i}}_z \\ \partial/\partial \mathrm{x} & \partial/\partial \mathrm{y} & \partial/\partial \mathrm{z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial A_y}{\partial \mathrm{z}}\right)\hat{\mathbf{i}}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial A_z}{\partial \mathrm{x}}\right)\hat{\mathbf{i}}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial A_x}{\partial \mathrm{y}}\right)\hat{\mathbf{i}}_z$$

Operatori differenziali (2)

- **Laplaciano** (opera su uno scalare; ha come risultato uno scalare)

$$\nabla^2 \Phi = \Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

Il laplaciano scalare gode della seguente proprietà:

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot (\nabla \Phi)$$

- **Laplaciano vettoriale** (opera su un vettore; ha come risultato un vettore)

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \Delta\, \mathbf{A} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2}$$

solo nel caso del riferimento cartesiano i laplaciani vettoriali e scalari sono legati fra loro dalla seguente proprietà:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \left(\nabla^2 A_x\right)\hat{\mathbf{i}}_x + \left(\nabla^2 A_y\right)\hat{\mathbf{i}}_y + \left(\nabla^2 A_z\right)\hat{\mathbf{i}}_z$$

Operatori differenziali (3)

<u>Proprietà dell'operatore gradiente</u>

1) $$\nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \left(\hat{\mathbf{i}}dx + \hat{\mathbf{j}}dy + \hat{\mathbf{k}}dz \right) =$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = d\phi$$

[Variazione di ϕ da **r** a **r**+d**r**]

$$\Rightarrow \quad \frac{d\phi}{du} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{du}$$

[linea parametrizzata da **r**(u)]

In particolare, se il parametro u è la lunghezza d'arco lungo la linea, si ha:

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell$$

In generale, la velocità di variazione del campo scalare ϕ lungo una particolare direzione **a** (derivata direzionale) si può scrivere come:

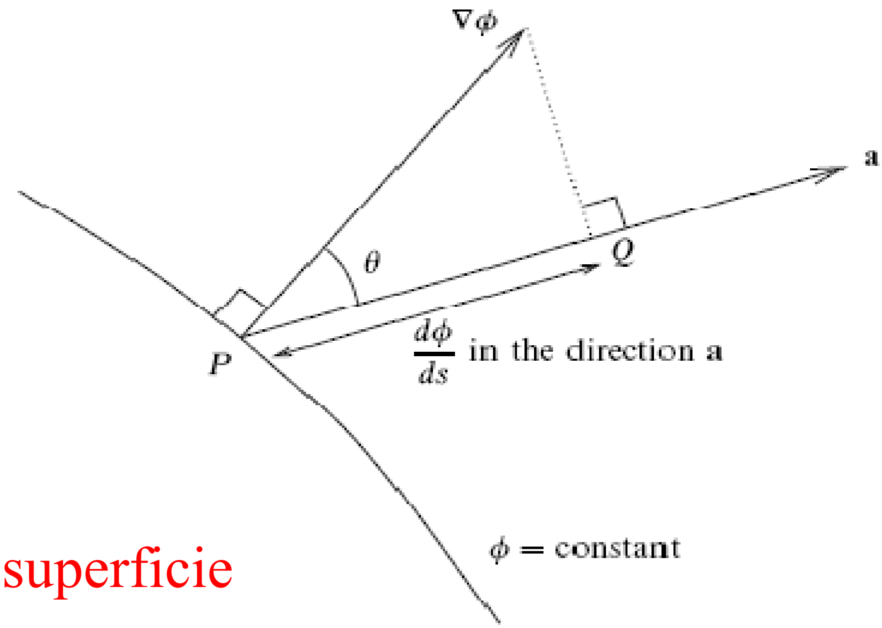
$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{a}} = \left|\nabla\phi\right| \cos\theta \qquad \text{(con } \theta \text{ angolo fra } \hat{\mathbf{a}} \text{ e } \nabla\phi \text{)}$$

Operatori differenziali (4)

2) Sia $\phi(x,y,z) = c$ (con c quantità costante) una superficie di livello del campo scalare ϕ. Lungo tale superficie risulta ovviamente $\dfrac{d\phi}{ds} = 0$ e quindi:

$$\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$$

(con **i** versore tangente alla superficie)



In altri termini, $\nabla\phi$ è un vettore normale alla superficie $\phi(x,y,z) = c$ in ogni suo punto. Si può scrivere anche:

$$\nabla\phi \equiv \frac{\partial\phi}{\partial n}\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{n}}$$

con $\dfrac{\partial\phi}{\partial n} \equiv |\nabla\phi|$ derivata in direzione normale

Operatori differenziali (5)

- Operatore “simbolico” nabla (o “atled”)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{i}}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{i}}_z$$

1) Opera come se fosse un vettore (secondo le note operazioni) e come se le sue componenti fossero quantità scalari
2) Dopo aver operato, le derivate in esso presenti si applicano effettivamente alle quantità che si trovano alla loro destra

Sfruttando queste proprietà, unitamente alle proprietà delle operazioni vettoriali e delle derivate, si possono dimostrare facilmente numerose relazioni differenziali (vedi pagine successive)

In modo analogo, si può definire anche l’operatore di Laplace:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial z}$$

Operatori differenziali (6)

Principali relazioni differenziali:

1) $$\nabla(\Phi+\psi)=\nabla\Phi+\nabla\psi$$

2) $$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla\cdot\mathbf{B}$$

3) $$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\nabla\times\mathbf{A}+\nabla\times\mathbf{B}$$

4) $$\nabla^2(\Phi+\psi)=\nabla^2\Phi+\nabla^2\psi$$

5) $$\nabla^2(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\nabla^2\mathbf{A}+\nabla^2\mathbf{B}$$

6) $$\nabla\cdot(\nabla\Phi)=\nabla^2\Phi$$

7) $$\nabla(\Phi\,\psi)=\Phi\nabla\psi+\psi\nabla\Phi$$

Operatori differenziali (7)

8) $\nabla \cdot (\Phi \mathbf{A}) = \Phi \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \Phi \cdot \mathbf{A}$

9) $\nabla \times (\Phi \mathbf{A}) = \Phi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \Phi \times \mathbf{A}$

10) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$

11) $\nabla \times \nabla \Phi = 0$

12) $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$

13) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

Le relazioni 11, 12 e 13 sono particolarmente importanti.

Operatori differenziali (8)

14) $$\nabla\cdot(\Phi\nabla\psi)=\nabla\Phi\cdot\nabla\psi+\Phi\nabla^2\psi$$

15) $$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$$

16) $$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}-(\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$$

17) $$\nabla^2(\Phi\psi)=\Phi\nabla^2\psi+\nabla\Phi\cdot\nabla\psi+\psi\nabla^2\Phi$$

18) $$\nabla^2(\Phi\mathbf{A})=\Phi\nabla^2\mathbf{A}+\mathbf{A}\nabla^2\Phi+2(\nabla\Phi\cdot\nabla)\mathbf{A}$$

19) $$\nabla\nabla\cdot(\Phi\mathbf{A})=(\nabla\Phi)\nabla\cdot\mathbf{A}+\Phi\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla\Phi\times\nabla\times\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\nabla\Phi+(\nabla\Phi\cdot\nabla)\mathbf{A}$$

20) $$\nabla\times\nabla\times(\Phi\mathbf{A})=\nabla\Phi\times\nabla\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\nabla^2\Phi+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\nabla\Phi+\Phi\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}+\nabla\Phi\,\nabla\cdot\mathbf{A}-(\nabla\Phi\cdot\nabla)\,\mathbf{A}$$

Operatori differenziali (9)

Operatori differenziali in coordinate curvilinee:

Si consideri un generico sistema di coordinate curvilinee (u_1,u_2,u_3), e siano i rispettivi versori fondamentali e (h_1,h_2,h_3) i coefficienti metrici.

Si definiscono gli operatori differenziali nel modo seguente:

- **Gradiente**

$$\nabla\Phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\hat{\mathbf{u}}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\hat{\mathbf{u}}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\hat{\mathbf{u}}_3$$

- **Divergenza**

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right]$$

Operatori differenziali (10)

- Rotazionale

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{\mathbf{u}}_1 & h_2\hat{\mathbf{u}}_2 & h_3\hat{\mathbf{u}}_3 \\ \partial/\partial u_1 & \partial/\partial u_2 & \partial/\partial u_3 \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1/h_2 h_3 & \hat{\mathbf{u}}_2/h_3 h_1 & \hat{\mathbf{u}}_3/h_1 h_2 \\ \partial/\partial u_1 & \partial/\partial u_2 & \partial/\partial u_3 \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{\hat{\mathbf{u}}_1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 A_2)\right] + \frac{\hat{\mathbf{u}}_2}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(h_3 A_3)\right] +$$

$$+ \frac{\hat{\mathbf{u}}_2}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 A_1)\right]$$

- Laplaciano (scalare o vettoriale)

$$\nabla^2[\ ] = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_1^2}\frac{\partial}{\partial u_1}[\ ]\right)\right] + \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_2^2}\frac{\partial}{\partial u_2}[\ ]\right)\right] + \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_3^2}\frac{\partial}{\partial u_3}[\ ]\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}[\ ]\right)\right] + \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}[\ ]\right)\right] + \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}[\ ]\right)\right]$$

Operatori differenziali (11)

<u>Operatori differenziali in coordinate cilindriche</u>

Si ricordi che in un riferimento cilindrico si ha $u_1 = \rho$, $u_2 = \phi$, $u_3 = z$ e quindi risulta:

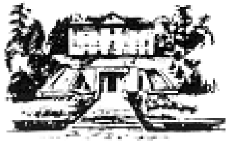
$h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$

- **Gradiente**

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\hat{\mathbf{i}}_{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\mathbf{i}}_{\phi} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{\mathbf{i}}_{z}$$

- **Divergenza**

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,A_{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_{\phi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_{z}}{\partial z}$$



Operatori differenziali (12)

- **Rotazionale**

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\hat{\mathbf{i}}_\rho & \hat{\mathbf{i}}_\phi & \frac{1}{\rho}\hat{\mathbf{i}}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho A_\phi\right)\right]\hat{\mathbf{i}}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\hat{\mathbf{i}}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right]\hat{\mathbf{i}}_z =$$

$$= \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{i}}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\hat{\mathbf{i}}_\phi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right]\hat{\mathbf{i}}_z$$

- **Laplaciano (scalare o vettoriale)**

$$\nabla^2[\ ] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}[\ ]\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}[\ ] + \frac{\partial^2}{\partial z^2}[\ ] = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}[\ ] + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}[\ ] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}[\ ] + \frac{\partial^2}{\partial z^2}[\ ]$$

Operatori differenziali (13)

Per il laplaciano di un vettore in coordinate cilindriche, con alcune manipolazioni si può ottenere la seguente espressione alternativa:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \left[\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{i}}_\rho + \left[\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \hat{\mathbf{i}}_\phi + \left(\nabla^2 A_z \right) \hat{\mathbf{i}}_z$$

Operatori differenziali in coordinate sferiche

Si ricordi che in un riferimento cilindrico si ha $u_1 = r$, $u_2 = \theta$, $u_3 = \phi$ e quindi risulta:

$h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r \sin\theta$

- **Gradiente**

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{\mathbf{i}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \hat{\mathbf{i}}_\theta + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{i}}_\phi$$

Operatori differenziali (14)

- **Divergenza**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\, A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \varphi}$$

- **Rotazionale**

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\hat{\mathbf{i}}_r}{r^2\sin\vartheta} & \dfrac{\hat{\mathbf{i}}_\theta}{r\sin\vartheta} & \dfrac{\hat{\mathbf{i}}_\varphi}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r\,A_\theta & r\sin\vartheta\, A_\phi \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(r\sin\vartheta\, A_\phi\right) - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(r\,A_\theta\right)\right]\hat{\mathbf{i}}_r +$$

$$+ \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\vartheta\, A_\phi\right)\right]\hat{\mathbf{i}}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\mathbf{i}}_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\, A_\phi\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]\hat{\mathbf{i}}_r +$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\,A_\phi\right)\right]\hat{\mathbf{i}}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\mathbf{i}}_\phi$$

Operatori differenziali (15)

- **Laplaciano (scalare o vettoriale)**

$$\nabla^2[\ ] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}[\ ]\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}[\ ]\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}[\ ] =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2}[\ ] + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}[\ ] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}[\ ] + \frac{1}{r^2\tan\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}[\ ] + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}[\ ]$$

Per il laplaciano di un vettore in coordinate sferiche, con alcune manipolazioni si può ottenere la seguente espressione alternativa:

$$\nabla^2\mathbf{A} = \left[\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2A_\theta}{r^2\tan\vartheta} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\vartheta} - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\varphi}\right]\hat{\mathbf{i}}_r +$$

$$+\left[\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\sin\vartheta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta} - \frac{2}{r^2\sin\vartheta\tan\vartheta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\varphi}\right]\hat{\mathbf{i}}_\theta +$$

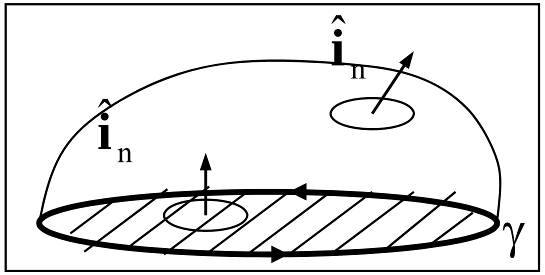
$$+\left[\nabla^2 A_\phi + \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{A_\phi}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{2}{r^2\sin\vartheta\tan\vartheta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{\mathbf{i}}_\phi$$

Teorema di Stokes o della circuitazione (1)

"La circuitazione di un campo vettoriale lungo una arbitraria linea chiusa γ, appartenente al dominio Ω di definizione del campo, è pari al flusso del rotazionale del campo medesimo attraverso una **qualunque** superficie *S* avente per contorno la linea γ". In formule:

$$\boxed{\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{S_\gamma} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{n}} \, \mathrm{d}S}$$

La superficie che si appoggia a γ (figura) può essere qualunque: conviene effettuare sempre la scelta di $S\gamma$ "più comoda". Il verso della normale deve essere concorde con il verso di percorrenza di γ, secondo la "regola della vite".



Teorema di Stokes o della circuitazione (2)

Nota importante: perché il teorema sia valido è necessario che **V** sia un campo vettoriale regolare (continuo e derivabile) definito su un insieme *stellato* rispetto ad ogni suo punto, o più in generale, a connessione lineare semplice (cioè ogni curva chiusa in Ω è contraibile in un punto ancora appartenente allo spazio Ω).

- Esempio: Campo di Biot e Savart

$$\mathbf{V} = \frac{-y}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{i}}_x + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{i}}_y$$

Questo campo è definito in $\Re^2 \setminus \{(0,0)\}$: è facile verificare che per esso il Teorema di Stokes non vale, applicando tale teorema al calcolo della circuitazione rispetto alla circonferenza unitaria centrata nell'origine.

Per un campo vettoriale definito sul piano xy, il teorema di Stokes diventa:

$$\oint_{\gamma} V_x dx + V_y dy = \iint_S \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dS$$

(denominata talvolta *Formula di Green* nel piano)

Teorema di Gauss-Green o della divergenza (1)

"Il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie chiusa *S*, appartenente al dominio Ω di definizione del campo, è pari all'integrale della divergenza del campo stesso esteso al volume racchiuso da *S*". In formule:

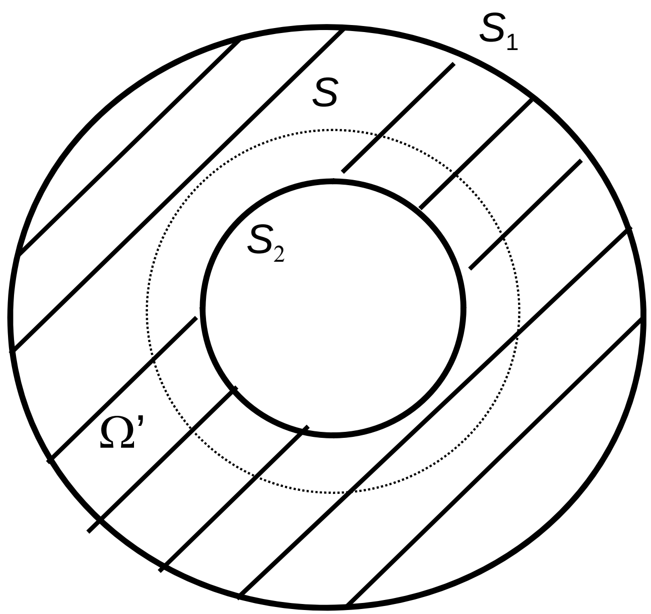
$$\boxed{\oiint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,\mathrm{d}V}$$

<u>Nota importante</u>: Perché tale teorema valga, è necessario che la regione in cui è definito il campo sia "<u>a connessione superficiale semplice</u>"

- E' necessario che "ogni superficie *S* in Ω racchiuda un volume interamente incluso in Ω", o che, equivalentemente, "ogni superficie chiusa sia contraibile fino a racchiudere un volume infinitesimo appartenente a Ω".

Teorema di Gauss-Green o della divergenza (2)

Ad esempio, se Ω' è il volume racchiuso fra due superfici sferiche S1 e S2 (figura), la condizione suddetta non è soddisfatta (basti infatti prendere una qualunque superficie S concentrica con S1 e S2).



Pertanto, per un campo vettoriale **V** definito in Ω' il teorema della divergenza non vale.