

# Linee prive di perdite

Una linea si dice **priva di perdite** se nel circuito equivalente risulta:  $R=G \simeq 0$ . Perché tale approssimazione sia valida deve risultare:

$$\alpha \cdot \ell \ll 1$$

essendo  $\ell$  la lunghezza del tronco di linea che si considera.

Dunque, una linea in pratica **si può considerare senza perdite non tanto quando R e G (e quindi  $\alpha$ ) sono piccoli, ma quando il prodotto  $\alpha \cdot \ell$  è piccolo.**

- Se la linea è molto lunga, come avviene nel caso in cui essa sia utilizzata per trasmissioni su lunga distanza (applicazioni di telecomunicazioni), difficilmente si possono trascurare le perdite.
- Nel caso di collegamenti tra apparati (applicazioni circuitali), dove le distanze sono brevi, è possibile trascurarle in prima approssimazione.



# Linee prive di perdite (2)

Per una linea priva di perdite risulta:

$$1) \quad \alpha = 0 \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{LC} \quad Z_c = R_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{Resistenza Caratteristica } [\Omega]$$

$$2) \quad \begin{cases} V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z} \\ I(z) = \frac{V_0^+}{R_C} e^{-j\beta z} - \frac{V_0^-}{R_C} e^{j\beta z} \end{cases}$$

$$3) \quad \rho(z) = \rho_L \cdot e^{2j\beta z} \quad \Rightarrow \quad |\rho(z)| = |\rho_L|$$

$$4) \quad Z_i(z) = R_c \frac{Z_L \cos(\beta z) - jR_c \sin(\beta z)}{R_c \cos(\beta z) - jZ_L \sin(\beta z)} \quad (\text{essendo } \text{sh}(jz) = j\sin(z) \text{ e } \text{ch}(jz) = \cos(z) )$$



## Linee prive di perdite (3)

Consideriamo la sola espressione dell'onda di tensione (analoghe considerazioni varranno per l'onda di corrente); ponendo  $V_0^* = V_0^+ - V_0^-$  si ottiene:

$$V(z) = (V_0^* + V_0^-) \cdot e^{-j\beta z} + V_0^- \cdot e^{j\beta z} = V_0^* \cdot e^{-j\beta z} + 2 \cdot V_0^- \cdot \cos(\beta z)$$

Il primo termine rappresenta come visto un'onda progressiva. Il secondo termine non rappresenta evidentemente ne' un'onda progressiva, ne' un'onda regressiva, e merita dunque maggiore attenzione; riscrivendolo nel dominio dei tempi:

$$V'(z) = 2 \cdot V_0^- \cdot \cos(\beta z) \Rightarrow v'(z, t) = \text{Re}\{V'(z) \cdot e^{j\omega t}\} = 2 \cdot |V_0^-| \cdot \cos(\omega t + \arg V_0^-) \cdot \cos(\beta z)$$

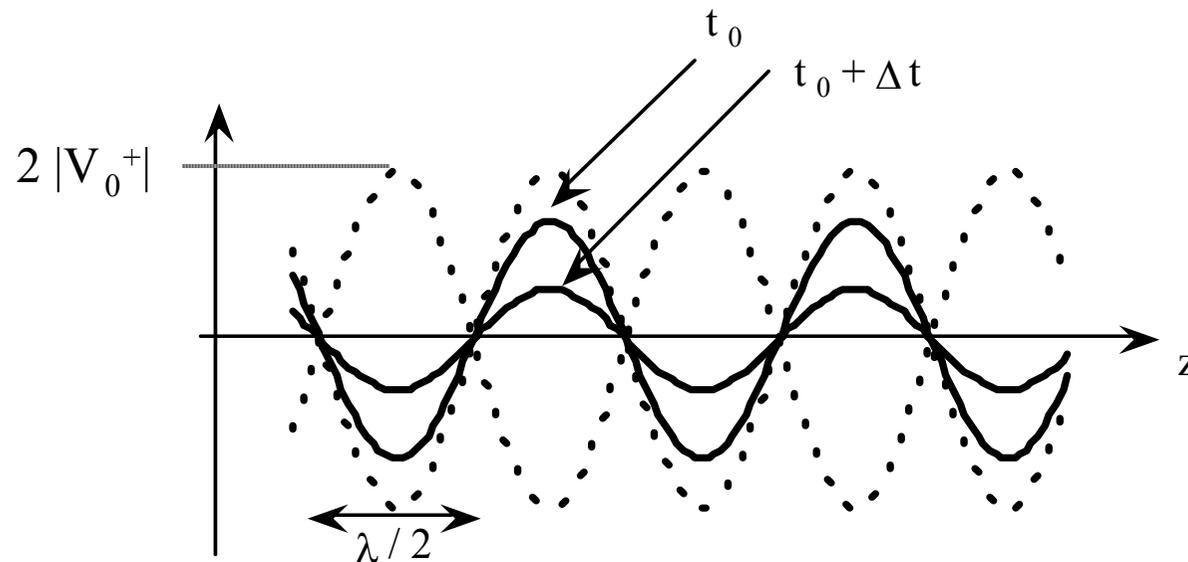
Si osserva che **in corrispondenza di quei valori di z che annullano  $\cos(\beta z)$ , risulta  $v'(z, t) = 0$  in qualunque istante t**. Essendo vincolati i valori di z che annullano l'ampiezza, ne segue automaticamente che l'onda non si propaga, ma in realta' oscilla, pulsa all'interno dei punti di zero. Si tratta cioè di **un'onda stazionaria**.



# Linee prive di perdite (4)

Per indicare tale un onda di questo tipo, che non si propaga si parla di **onda puramente stazionaria** (vedi figura).

Il regime d'onda che si instaura all'interno della linea, dato dalla sovrapposizione dell'onda progressiva e dell'onda puramente stazionaria, viene detto di **onda parzialmente stazionaria**.



# Linee prive di perdite (5)

## ESEMPI

- $V_0^- = 0 \Rightarrow$  solo *onda progressiva*, essendoci adattamento in uniformita';
- $V_0^+ = V_0^- \Rightarrow \rho_L = 1 \Rightarrow Z_L = \infty$  (*Linea Aperta*): solo *onda stazionaria pura*;
- $V_0^+ = -V_0^- \Rightarrow \rho_L = -1 \Rightarrow Z_L = 0$  (*Linea Cortocircuitata*): in questo caso

$$V(z) = -V_0^- \cdot e^{-j\beta z} + V_0^- \cdot e^{+j\beta z} = 2j \cdot V_0^- \cdot \sin(\beta z)$$

e quindi ancora solo *onda stazionaria pura*.

E' allora opportuno individuare un parametro facilmente calcolabile e/o misurabile che permetta sinteticamente di individuare il regime d'onda all'interno della linea. Si consideri allora

$$V(z) = V_0^+ \cdot e^{-j\beta z} \cdot (1 + \rho_L e^{2j\beta z}) = V_0^+ \cdot e^{-j\beta z} \cdot (1 + |\rho_L| \cdot \cos(2\beta z + \arg \rho_L) + j \cdot |\rho_L| \cdot \sin(2\beta z + \arg \rho_L))$$

e se ne calcoli il modulo:

$$|V(z)|^2 = |V_0^+|^2 \cdot [1 + |\rho_L| \cdot \cos(2\beta z + \arg \rho_L)]^2 + [|\rho_L| \cdot \sin(2\beta z + \arg \rho_L)]^2$$



# Regimi elettrici

Si ha in generale:

$$|V(z)| = |V_0^+| \cdot \sqrt{1 + |\rho_L|^2 + 2 \cdot |\rho_L| \cdot \cos(2\beta z + \arg \rho_L)}$$

1) Sezioni ad ampiezza massima (*ventri*):

$$\cos(2\beta z + \arg \rho_L) = 1 \quad \rightarrow \quad 2\beta z + \arg \rho_L = 0 + 2k\pi \quad \xrightarrow{\beta = 2\pi/\lambda} \quad z = k \cdot \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda \cdot \arg \rho_L}{4\pi}$$

$$|V(z)|_{MAX} = |V_0^+| \cdot (1 + |\rho_L|) = |V_0^+| + |V_0^-|$$

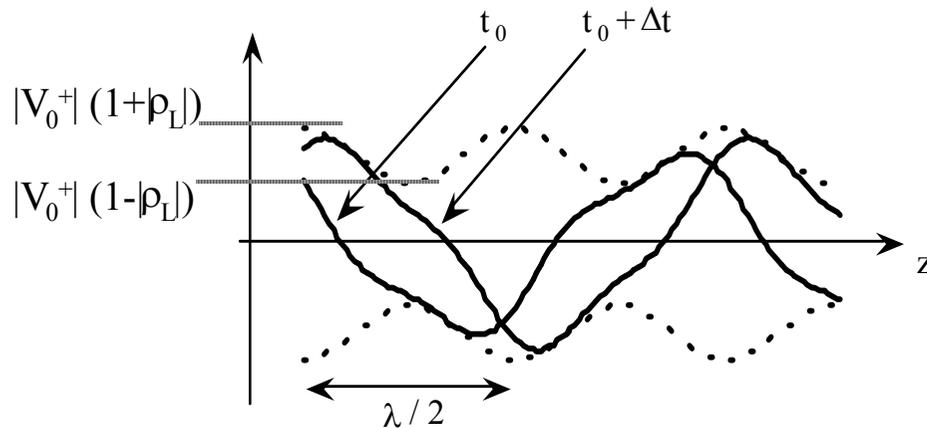
2) Sezioni ad ampiezza minima (*nodi*):

$$\cos(2\beta z + \arg \rho_L) = -1 \quad \rightarrow \quad 2\beta z + \arg \rho_L = \pi + 2k\pi \quad \xrightarrow{\beta = 2\pi/\lambda} \quad z = \frac{\lambda}{4} + k \cdot \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda \cdot \arg \rho_L}{4\pi}$$

$$|V(z)|_{MIN} = |V_0^+| \cdot (1 - |\rho_L|) = |V_0^+| - |V_0^-|$$



## Regimi elettrici (2)



*Nodi e ventri, pertanto, si alternano distanziati di  $\lambda/4$  (e dunque nodi successivi – e ventri successivi - distano fra loro  $\lambda/2$ ).*

Rapporto d'Onda Stazionaria (ROS)



$$S \triangleq \frac{|V|_{\max}}{|V|_{\min}}$$

$$S = \frac{|V_0^+| (1 + |\rho_L|)}{|V_0^+| (1 - |\rho_L|)} = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$$

$$|\rho| = \frac{S - 1}{S + 1}$$

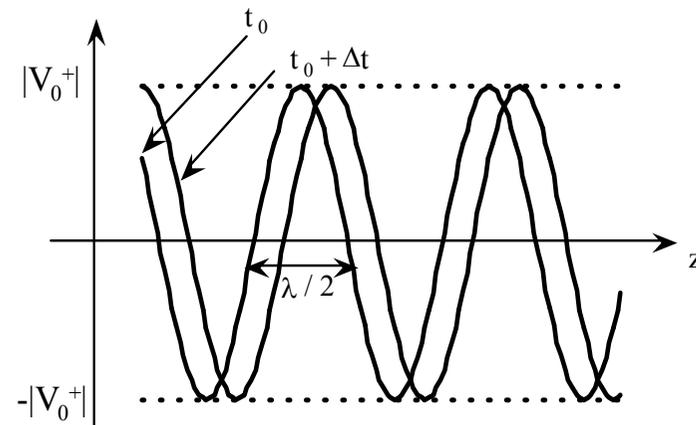


# Regimi elettrici (3)

$$\begin{aligned} S = 1 &\Leftrightarrow |\rho_L| = 0 \Leftrightarrow \text{Regime d'Onda Puramente Progressiva} \\ S = \infty &\Leftrightarrow |\rho_L| = 1 \Leftrightarrow \text{Regime d'Onda Puramente Stazionaria} \\ 1 < S < \infty &\Leftrightarrow 0 < |\rho_L| < 1 \Leftrightarrow \text{Regime d'Onda Parzialmente Stazionaria} \end{aligned}$$

Il caso a) corrisponde alla condizione di **carico adattato**. Il caso c) ( $|\rho_L|=1$ ) corrisponde alla condizione di **carico puramente reattivo**.

a) Se  $|\rho_L| = 0$  allora automaticamente  $|\mathbf{V}|_{\text{MAX}} = |\mathbf{V}|_{\text{MIN}} = |\mathbf{V}_0^+|$ ; l'ampiezza dell'oscillazione e' costante e indipendente da  $z$ . non c'e' onda riflessa  $\Rightarrow$  **REGIME D'ONDA PURAMENTE PROGRESSIVA**. (Infatti  $|\rho_L|=0 \Rightarrow V_0^- = 0$  e quindi **adattamento in uniformità**).



# Regimi elettrici (4)

b) Se  $|\rho_L| = 1$  allora  $|\mathbf{V}|_{\text{MIN}} = 0$  e dunque in corrispondenza dei nodi l'ampiezza e' nulla in qualunque istante di tempo (in tal caso si parla di **zeri**)  $\Rightarrow$  **REGIME D'ONDA PURAMENTE STAZIONARIA**.

Si osservi che la condizione  $|\rho_L| = 1$  corrisponde, in concreto, ad uno dei seguenti casi:

$$Z_L = \infty \Rightarrow \rho_L = 1 \quad \text{Linea Aperta ;}$$

$$Z_L = 0 \Rightarrow \rho_L = -1 \quad \text{Linea Cortocircuitata ;}$$

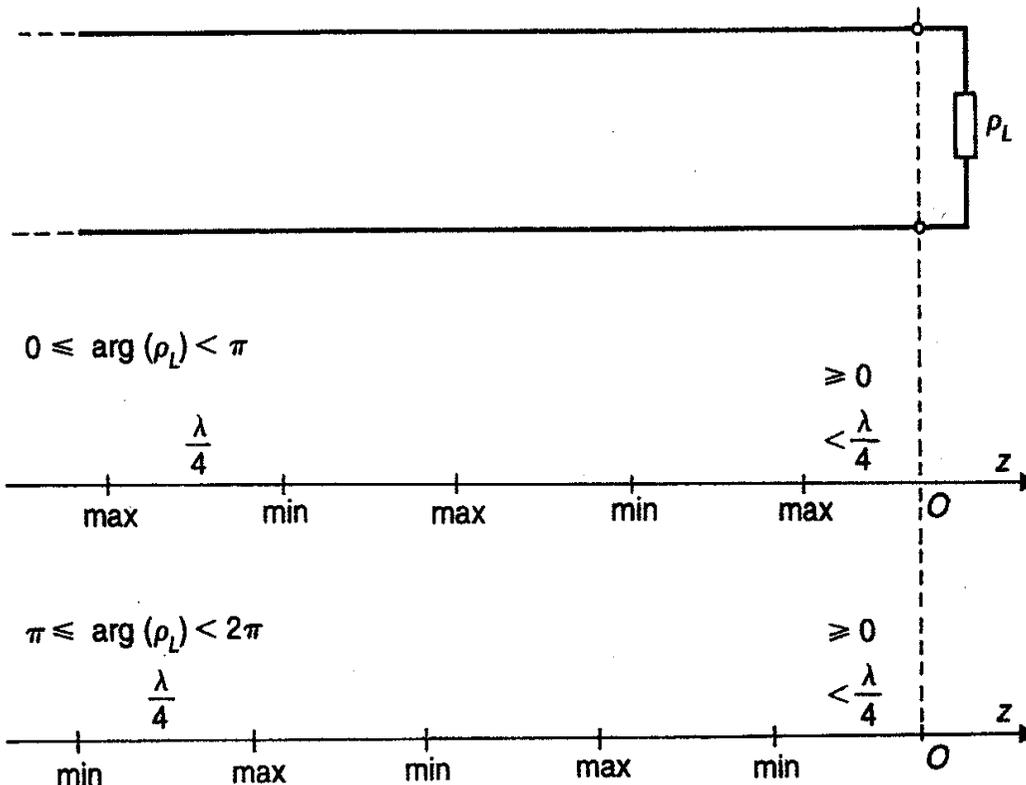
$$Z_L = j X_L \quad \Rightarrow \quad \text{Linea chiusa su Carico } \textit{Puramente Reattivo}$$

Per estensione, si possono classificare i casi di linea aperta e cortocircuitata nella categoria dei carichi reattivi, includendo anche i casi "degeneri"  $X_L=0$  e  $X_L=\infty$ .

c) In questo caso, esiste una componente regressiva non nulla. L'onda risultante dalla sovrapposizione delle 2 componenti progressiva e regressiva ha dei massimi (ventri) e minimi (nodi) di ampiezza  $\Rightarrow$  **REGIME D'ONDA PARZIALMENTE STAZIONARIA**.



# Regimi elettrici (5)



La distanza di una sezione di massimo (minimo) dalle 2 sezioni di minimo (massimo) adiacenti è pari a:

$$\frac{\pi}{2\beta} = \frac{\lambda}{4}$$

Invece, 2 sezioni di massimo (minimo) consecutive distano fra loro di

$$\frac{\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{2}$$

Per l'ampiezza dell'onda di corrente valgono considerazioni analoghe.

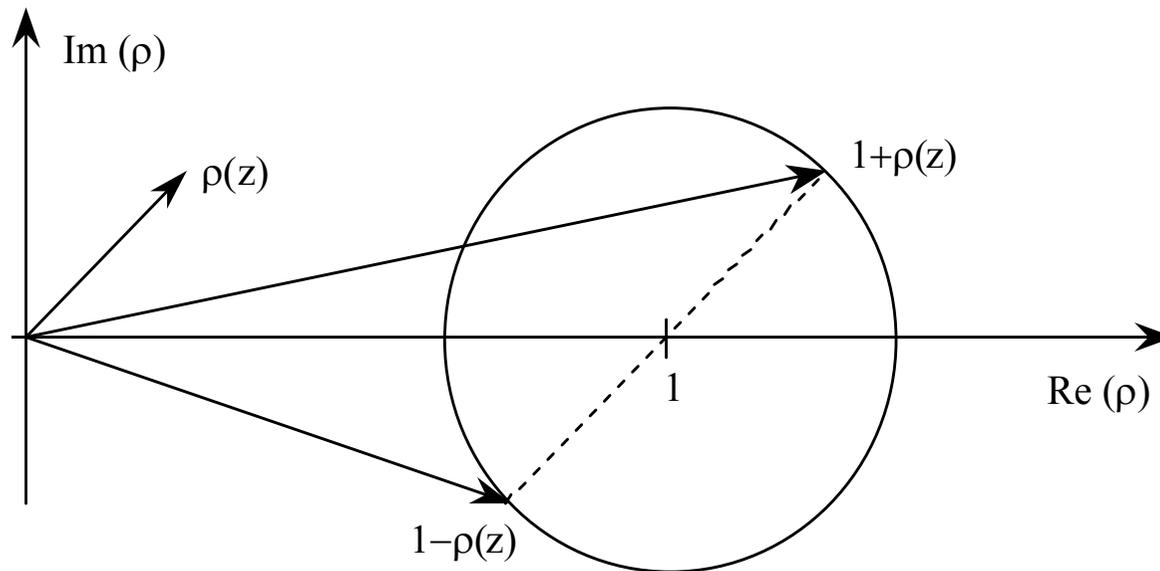


# Regimi elettrici (6)

Si ricordi che:

$$\begin{cases} |V(z)| = |V_0^+| |1 + \rho(z)| \\ |I(z)| = \frac{|V_0^+|}{R_C} |1 - \rho(z)| \end{cases}$$

Rappresentando le quantità  $(1+\rho(z))$  e  $(1-\rho(z))$  nel piano  $\rho \{ \text{Re } \rho, \text{Im } \rho \}$  si ha:



# Regimi elettrici (7)

Siccome la linea è priva di perdite  $|\rho(z)|$  è costante, perciò  $1+\rho(z)$  e  $1-\rho(z)$  al variare di  $z$  descriveranno il cerchio disegnato in figura e si troveranno sempre in posizione diametralmente opposta: quindi **dove la tensione ha la massima ampiezza la corrente ha quella minima e viceversa.**

- Il caso di onda stazionaria, in cui  $|\rho_L| = |\rho(z)| = 1$  corrisponde ad avere una circonferenza di raggio pari a 1, che passa perciò per l'origine degli assi. In tal caso esisteranno  $z$  per cui tensione o corrente sono nulle: dove è nulla la corrente è massima la tensione e viceversa.

In conclusione, si può dire che vale sempre la proprietà: ***a nodi di tensione corrispondono ventri di corrente, mentre a ventri di tensione corrispondono nodi di corrente.***



# Potenza complessa

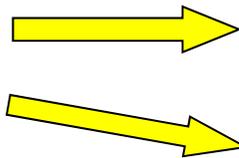
Ricordando che:

$$\begin{cases} V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} [1 + \rho(z)] \\ I(z) = \frac{V_0^+}{R_C} e^{-j\beta z} [1 - \rho(z)] \end{cases} \quad \rho(z) = \rho_L e^{j2\beta z}$$

si ottiene: 
$$P_C(z) = \frac{1}{2} V(z) \cdot I^*(z) = \frac{|V_0^+|^2}{2 R_C} (1 - |\rho_L|^2) + j \frac{|V_0^+|^2}{R_C} |\rho_L| \sin(2\beta z + \angle \rho_L) = P + jQ$$

Potenza attiva

$$P = \frac{|V_0^+|^2}{2 R_C} (1 - |\rho_L|^2)$$



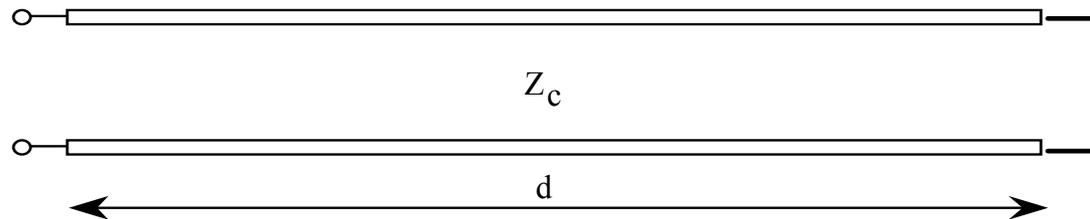
indipendente da  $z$ !

Se  $|\rho_L| = 1$ ,  $P = 0$ , cioè **in regime di onda puramente stazionaria non si ha trasferimento di potenza attiva.**



# Linee di interesse pratico

## 1) Linea in cortocircuito



$Z_L = 0$  e quindi si ha  $\rho_L = -1$ .

Il carico è puramente reattivo. Siccome  $\rho_L = -1$  si ha:

$$V_0^- = -V_0^+$$

Impedenza di ingresso:

$$Z_{in} = Z_i(-d) = -Z_C \frac{\sinh(\Gamma d)}{\cosh(\Gamma d)}$$



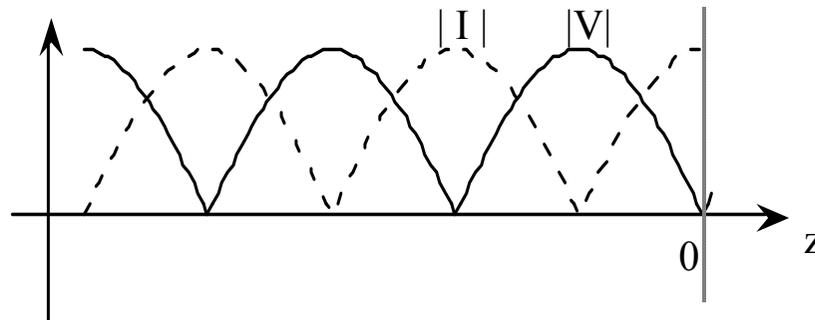
## Linee di interesse pratico (2)

Se è possibile trascurare le perdite risulta:

$$V = -j2 V_0^+ \sin \beta z$$

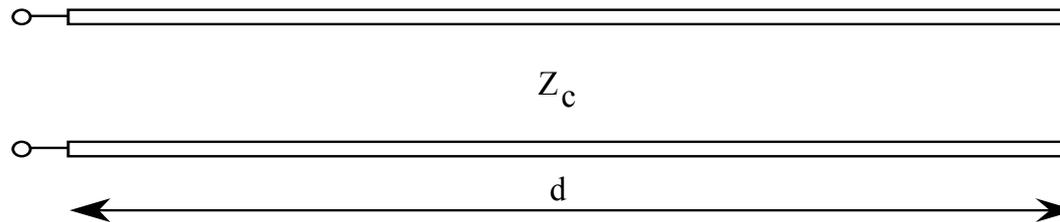
$$I = 2 \frac{V_0^+}{R_C} \cos \beta z$$

Si ha quindi un'onda stazionaria con sezioni di minimo della tensione allineate alla ascissa  $z = 0$ , come ovvio perchè  $V(0) = 0$  essendo  $Z_L = 0$ :



# Linee di interesse pratico (3)

## 2) Linea a vuoto



In questo caso la linea è lasciata aperta, quindi  $Z_L \rightarrow \infty$ .

Si ha allora  $\rho_L = 1$ . E' un'altro caso di carico puramente reattivo. Si ha

$$V_0^- = V_0^+$$

Da cui, nel caso privo di perdite si ricava:

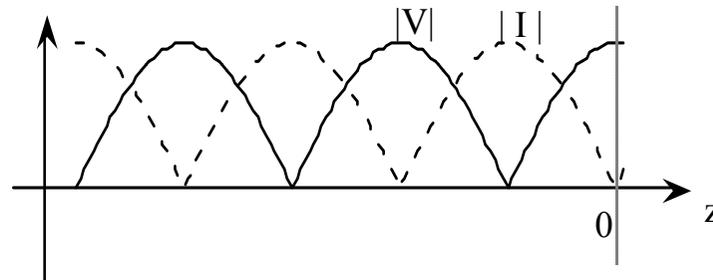
$$V(z) = 2 V_0^+ \cos(\beta z)$$

$$I(z) = -2j \frac{V_0^+}{R_C} \sin(\beta z)$$

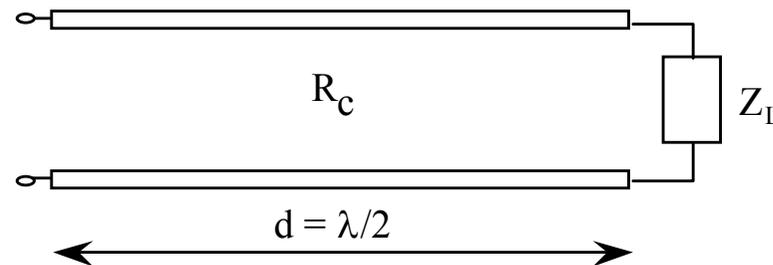


# Linee di interesse pratico (4)

In questo caso è la corrente a presentare una sezione di minimo al carico dato che il carico non consente passaggio di corrente [  $I(0) = 0$  ]:



### 3) Linea a $\lambda/2$ senza perdite



## Linee di interesse pratico (5)

Il coefficiente di riflessione e l'impedenza sulla sezione di ingresso ( $z = -d$ ) valgono:

$$\rho_{in} = \rho\left(-\frac{\lambda}{2}\right) = \rho_L$$

$$Z_{in} = Z_i\left(-\frac{\lambda}{2}\right) = Z_L$$

Mentre per le tensioni e correnti si ha (ricordando che  $e^{-j\beta\lambda/2} = e^{j\pi} = -1$ ):

$$V_{in} = V\left(-\frac{\lambda}{2}\right) = -V_L$$

$$I_{in} = I\left(-\frac{\lambda}{2}\right) = -I_L$$

Si noti che l'ipotesi di assenza di perdite è giustificata dal fatto che la linea è molto corta.



# Linee di interesse pratico (6)

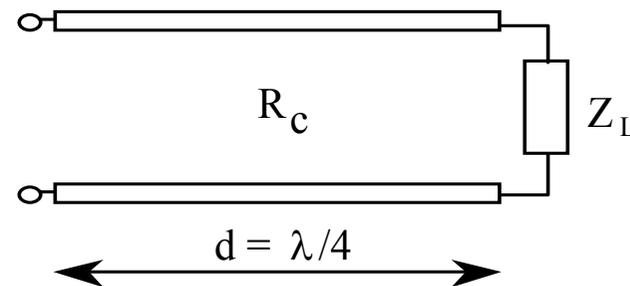
In generale, comunque, in una linea **priva di perdite** valgono sempre le seguenti proprietà:

- Impedenza e coefficiente di riflessione si ripetono lungo la linea con periodicità (spaziale)  $\lambda/2$ .
- Le ampiezze di tensioni e correnti si ripetono con periodicità  $\lambda/2$ , mentre le loro fasi si invertono con periodicità  $\lambda/2$  (di conseguenza, tensioni e correnti si ripetono in modulo e fase lungo la linea con periodicità  $\lambda$ ).

## 4) Linea a $\lambda/4$ senza perdite

Analogamente al caso precedente si ricava:

$$\rho_{in} = -\rho_L$$
$$Z_{in} = \frac{R_C^2}{Z_L}$$



# Linee di interesse pratico (7)

---

La linea a  $\lambda/4$  si comporta perciò come **trasformatore (invertitore) di impedenza**.

Infine, per le tensioni e le correnti si ricava facilmente:

$$V_{in} = j R_C I_L$$

$$I_{in} = j \frac{V_L}{R_C}$$

