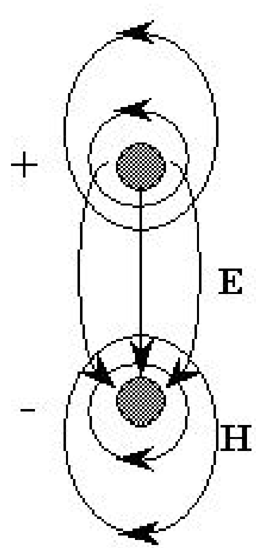
Linee di TX ordinarie – rappresentazione circuitale (1/2)

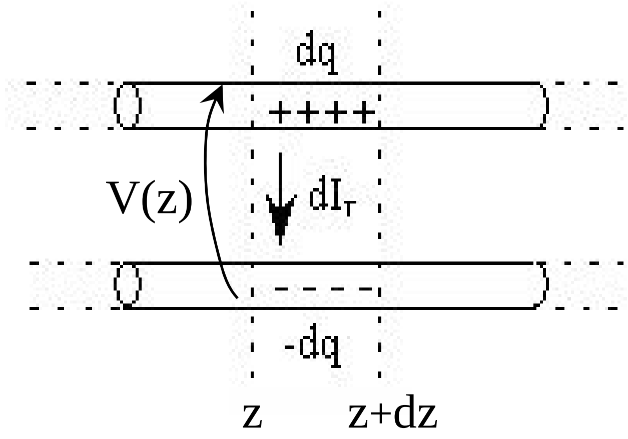
Esempio di riferimento: linea bifilare



1) Sugli elementi di conduttore compresi tra z e z + dz si hanno due cariche uguali ed opposte dq e - dq date da

$$\boxed{dq = V(Cdz)}$$

dove V è la tensione applicata e C è la capacità della linea per unità di lunghezza.



$$dI_S = \frac{dq}{dt} = (Cdz)\frac{dV}{dt}$$

dI_S corrente di spostamento

2) Se il dielettrico è ideale ($\sigma = 0$), si ha solamente la corrente di spostamento dI_S. Altrimenti, parte della carica sfugge dai conduttori e viene dissipata nel dielettrico sotto forma di corrente

$$\boxed{dI_T = V(Gdz)}$$

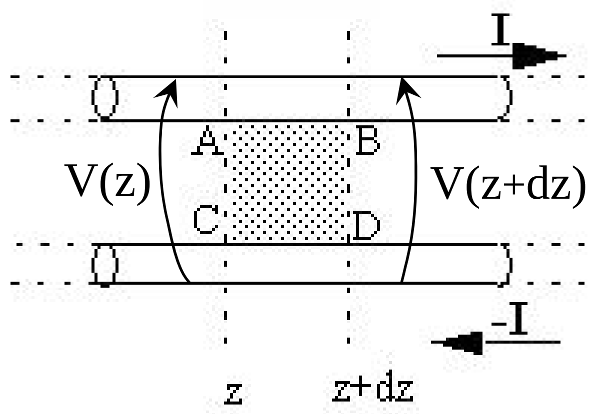
dove G è la conduttanza del dielettrico per unità di lunghezza

Linee di TX ordinarie – rappresentazione circuitale (2/2)

3) Inoltre la superficie ABCD indicata in figura è attraversata da un flusso di induzione magnetica (flusso concatenato con la linea ABCD):

$$\boxed{d\Phi = I\left(Ldz\right)}$$

dove I è la corrente che fluisce nella "spira" ABCD ed L rappresenta la induttanza per unità di lunghezza.



$$dV_i = \left(Ldz\right)\frac{dI}{dt}$$

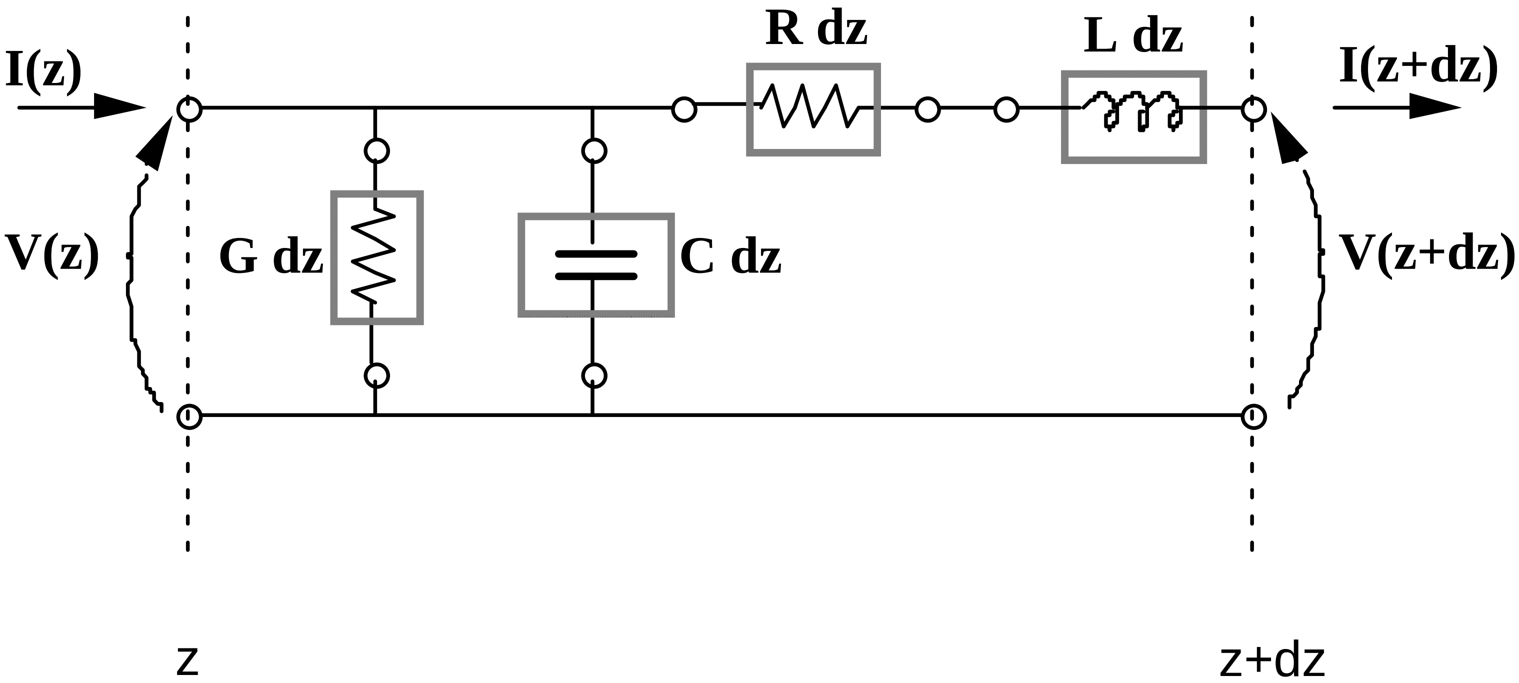
dV_i tensione auto-indotta

4) Se i conduttori sono ideali ($\sigma = \infty$), si ha solamente la tensione auto-indotta dV_i. Altrimenti, la tensione cala ulteriormente lungo la direzione z, a causa della resistenza non nulla dei conduttori:

$$\boxed{dV_C = V(z+dz) - V(z) = (Rdz)\ I}$$

dove R è la resistenza dei conduttori per unità di lunghezza

Linee di TX ordinarie – circuito equivalente



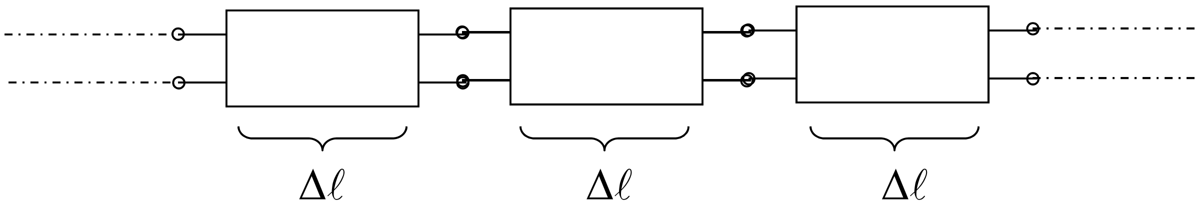
In generale, V e I funzione della coordinata assiale (z) e del tempo!

L, C, G, R parametri primari della linea (per unità di lunghezza)

Modello a parametri distribuiti

Parametri concentrati vs parametri distribuiti (1/2)

- In linea teorica, è possibile anche una descrizione a parametri concentrati delle linee di trasmissione: basta schematizzare la linea come una cascata di quadripoli, a patto di dimensionare la lunghezza di ciascun quadripolo in modo che sia rispettata la condizione di quasi-stazionarietà.



- Tale modello è però valido solo in una banda di frequenza superiormente limitata [0 , f_{MAX}].
- Infatti, deve essere soddisfatta la condizione $\Delta\ell \ll \lambda_{\min}$, con $\lambda_{\min} = \dfrac{v_p}{f_{\max}}$
- La condizione di quasi-stazionarietà si può ritenere in pratica soddisfatta se risulta $K\Delta\ell < \lambda_{\min}$ con K abbastanza grande.
- Ad esempio, se si assume K=10 deve essere:

$$\Delta\ell < \frac{1}{10}\lambda_{\min} \triangleq \Delta\ell_{\max}$$

Parametri concentrati vs parametri distribuiti (2/2)

- Nota la massima frequenza di lavoro ammissibile, è immediato ricavare il parametro $\Delta\ell_{\max}$, e da esso il numero minimo di quadripoli in cascata con cui è necessario schematizzare la linea affinché il modello a parametri concentrati sia valido:

$$n = \mathrm{int}\left[\frac{\ell}{\Delta\ell_{\max}}\right]$$

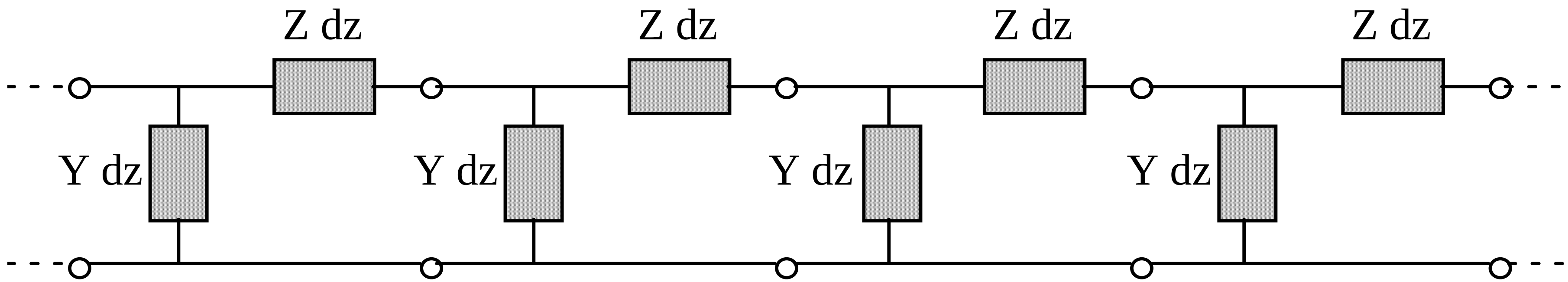
essendo int[ ] il numero intero immediatamente superiore alla quantità entro le parentesi

- Si noti che questo è in ogni caso un modello approssimato, mentre il modello a parametri distribuiti è un modello rigoroso (si può ricavare direttamente dalle eq. di Maxwell, senza fare approssimazioni).
- Inoltre, il modello a parametri distribuiti non ha limitazioni in frequenza. Infatti, esso si può immaginare come il limite del modello a parametri concentrati quando la lunghezza dei quadripoli diventa infinitesima. Essendo $\Delta\ell = dz$, la condizione di quasi-stazionarietà risulta soddisfatta anche per $\lambda_{\min} \rightarrow 0$, cioè per $f_{\max} \rightarrow \infty$.

Linee di TX in regime sinusoidale

Si consideri ora una linea alimentata con una tensione sinusoidale ad una frequenza $f=\omega/2\pi$. In regime sinusoidale, tensioni e correnti vengono sostituite dalle rispettive grandezze complesse rappresentative (fasori).

Si è visto che mediante il modello a parametri distribuiti si può schematizzare la linea come una cascata di quadripoli di lunghezza infinitesima:

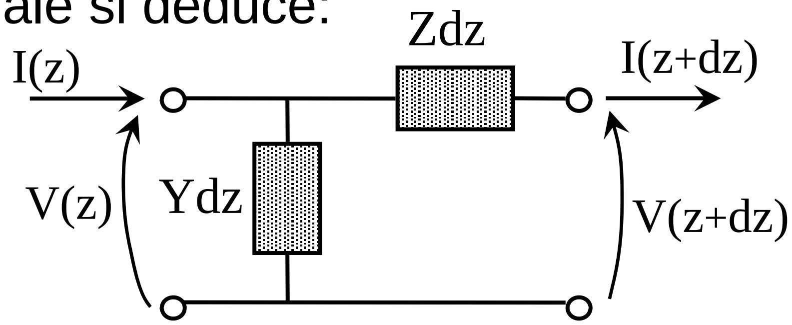


Si ha quindi:

- $V=V(z)$ e $I=I(z)$ Fasori funzione solo di z
- $Z = R + j\omega L$ Impedenza serie (per unità di lunghezza)
- $Y = G + j\omega C$ Ammettenza parallelo (per unità di lunghezza)

Equazioni dei telefonisti

Dal circuito equivalente in regime sinusoidale si deduce:



$$\begin{cases} dV = V(z+dz) - V(z) = -(Zdz)I(z) \\ dI = I(z+dz) - I(z) = -(Ydz)V(z) \end{cases}$$

e dividendo per dz:

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dz} = -ZI \\ \dfrac{dI}{dz} = -YV \end{cases}$$

Equazioni dei telefonisti

Le equazioni dei telefonisti sono l'equivalente circuitale delle equazioni di Maxwell, per le linee di TX. Ai fini della trattazione svolta per le linee, esse sostituiscono completamente le eq. di Maxwell.

Equazioni dei telefonisti: risoluzione (1/2)

Per risolvere le equazioni dei telefonisti occorre disaccoppiarle. A tal fine si derivi la prima rispetto a z:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = - Z \frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dz}}$$

Ricavando dI/dz dalla seconda e sostituendolo nella equazione precedente si ottiene:

$$\frac{d^2V}{dz^2} - \mathrm{ZY\,V} = 0$$

Equazione dei telegrafisti

L'integrale generale di questa equazione è del tipo:

$$V(z) = \mathrm{V}_0^+ \, \mathrm{e}^{-\sqrt{\mathrm{ZY}}\, z} + \mathrm{V}_0^- \, \mathrm{e}^{\sqrt{\mathrm{ZY}}\, \mathrm{z}}$$

Equazioni dei telefonisti: risoluzione (2/2)

Derivando la precedente soluzione e sostituendola nella seconda equazione dei telefonisti, si ottiene la soluzione in termini di correnti:

$$I(z) = -\frac{1}{Z}\frac{dV(z)}{dz} = \sqrt{\frac{Y}{Z}}\, V_0^+\, e^{-\sqrt{ZY}\, z} - \sqrt{\frac{Y}{Z}}\, V_0^-\, e^{\sqrt{ZY}\, z}$$

Si osservi che tutte le quantità presenti in tali soluzioni sono complesse.

I due termini presenti nelle soluzioni hanno il significato di onde di tensione e di corrente che si propagano in direzione assiale, rispettivamente nella direzione delle z positive e delle z negative. Tali onde hanno una costante di propagazione (assiale):

$$\Gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)\cdot(G + j\omega C)}\,;\ \ \alpha,\beta \in \mathrm{R}$$

Linee di TX: parametri secondari (1/2)

Elevando al quadrato ambo i membri e uguagliando parti reali e immaginarie si ottiene:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = RG - \omega^2 LC \\ 2\alpha\beta = \omega(CR + LG) \end{cases}$$

e infine si ricavano le espressioni di α e β in funzione dei parametri primari della linea:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)\left(G^2 + \omega^2 C^2\right)} - \left(\omega^2 LC - RG\right)}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)\left(G^2 + \omega^2 C^2\right)} + \left(\omega^2 LC - RG\right)}$$

α costante di attenuazione; β costante di fase

Linee di TX: parametri secondari (2/2)

Si definisce inoltre la grandezza:

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

Impedenza caratteristica della linea

α, β e Zc sono detti *parametri secondari* della linea (dipendono dai parametri primari C, L, G, R).

Le soluzioni delle eq. dei telefonisti si possono quindi riscrivere così:

$$\begin{cases} V(z) = V_0^+ e^{-\Gamma z} + V_0^- e^{\Gamma z} = V^+(z) + V^-(z) \\ I(z) = \dfrac{V_0^+}{Z_c} e^{-\Gamma z} - \dfrac{V_0^-}{Z_c} e^{\Gamma z} = I^+(z) - I^-(z) \end{cases}$$

Onda progressiva e regressiva (1/4)

$V^+(z), I^+(z)$ ⇨ Onda progressiva

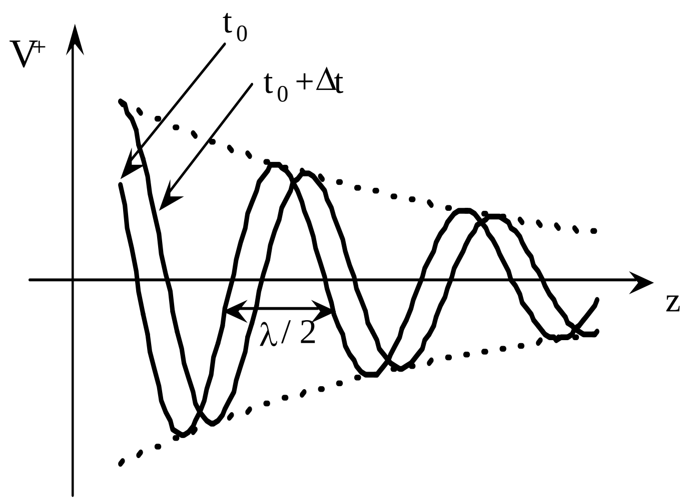
$V^-(z), I^-(z)$ ⇨ Onda regressiva

Nel dominio dei tempi V^+ ha la forma:

$$V^+(z,t) = \mathrm{Re}\left\{V_0^+ \, e^{-\Gamma z} \, e^{j\omega t}\right\} =$$

$$\left|V_0^+\right| \mathrm{Re}\left\{e^{-\alpha z} \, e^{j(\omega t - \beta z + \angle V_0^+)}\right\} =$$

$$= \left|V_0^+\right| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \angle V_0^+)$$



Si tratta di una sinusoide che si propaga nella direzione positiva dell'asse z attenuandosi esponenzialmente in ragione del termine $e^{-\alpha z}$.

Onda progressiva e regressiva (2/4)

La costante di fase β è legata alla velocità di propagazione dell'onda nel mezzo trasmissivo.

Equazione dei fronti d'onda: $\omega t \pm \beta z = \text{cost}$

Differenziando: $\omega\, dt \pm \beta\, dz = 0$

Velocità di propagazione dei fronti d'onda:

$$v_p = \left|\frac{dz}{dt}\right| = \frac{\omega}{\beta} = \lambda f$$ Velocità di fase

v_p è per definizione una grandezza positiva, e quindi assume il medesimo valore anche per la componente regressiva.

La costante di attenuazione α è invece dovuta alle perdite, cioè alle non idealità di dielettrico e conduttori: infatti se nella espressione di α si pone R = G = 0 si ottiene α = 0.

Onda progressiva e regressiva (3/4)

Lungo un tronco di linea di lunghezza ℓ l'onda progressiva subisce uno sfasamento temporale in ritardo (e la regressiva in anticipo) pari a:

$$\tau = \frac{\ell}{v_p}$$

essendo v_p la velocità di fase dell'onda. τ prende il nome di tempo di transito (o di ritardo di fase) del tronco di linea considerato. Lo sfasamento angolare nelle stesse condizioni è invece:

$$\beta\ell = 2\pi\frac{\ell}{\lambda} = \omega\tau$$

$\beta\ell$ prende anche il nome di lunghezza elettrica del tronco di linea (ℓ è la lunghezza geometrica)

Onda progressiva e regressiva (4/4)

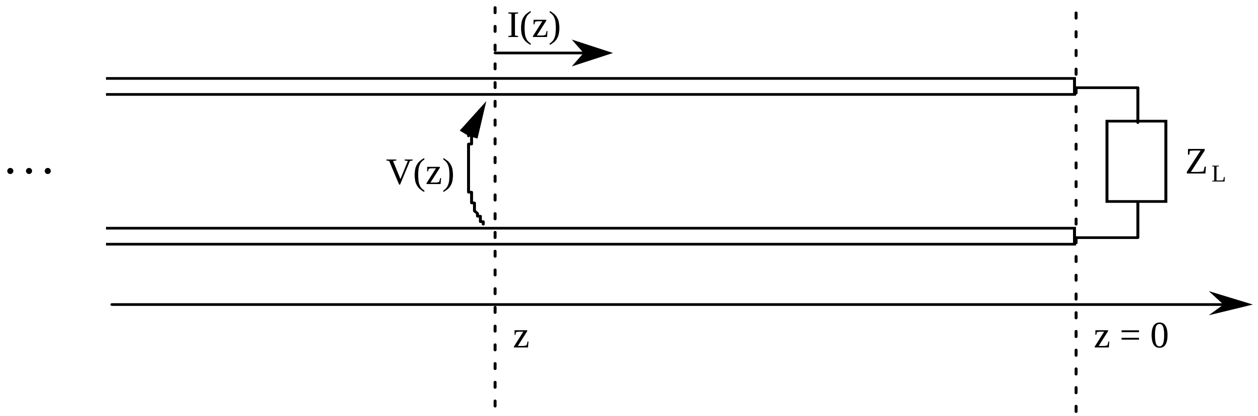
- La generica soluzione in termini di tensione e corrente è quindi costituita dalla combinazione (o sovrapposizione), secondo opportuni coefficienti, di un'*onda progressiva* e di un'*onda regressiva*.
- L'onda regressiva nasce per effetto di una disomogeneità nella struttura: tipicamente, la linea viene terminata e chiusa su di un monoporta (carico), il quale "riflette indietro" parte della potenza che incide su di esso.
- Le ampiezze delle onde di tensione e di corrente sono legate tra loro tramite Z_C, similmente a quanto avviene nel caso a costanti concentrate.

- Le costanti V_0^+ e V_0^- definiscono il regime elettrico che si instaura all'interno della linea. Il loro valore è determinato una volta che siano note le condizioni di alimentazione e di carico della linea.
- Se $|V_0^-|>0$, la sovrapposizione delle componenti progressiva e regressiva da' origine ad un'onda stazionaria.
- Se $V_0^- = 0$ $\longrightarrow$ Regime d'onda puramente progressiva

Carico

Nella pratica, una linea non si estende mai indefinitamente da z = - ∞ a z = + ∞.

La linea verrà cioè interrotta in una certa sezione, detta *sezione di carico* in cui verrà connessa ad un monoporta di impedenza Z_L, che costituisce appunto il carico.



Per comodità l'origine del sistema di riferimento verrà posto al carico, per cui tutte le sezioni della linea corrisponderanno a z negative.

Impedenza e coefficiente di riflessione (1/3)

Ci si ponga nella generica sezione di ascissa z. Si definisce *coefficiente di riflessione* $\rho(z)$ alla ascissa z il rapporto:

$$\rho(z) = \frac{V^-(z)}{V^+(z)} = \frac{V_0^- \, e^{\Gamma z}}{V_0^+ \, e^{-\Gamma z}}$$

Si definisce inoltre *impedenza* $Z_i(z)$ in una generica sezione il rapporto

$$Z_i(z) = \frac{V(z)}{I(z)}$$

che rappresenta l'impedenza del monoporta che si vede "guardando a destra" della sezione considerata (verso il carico).

Al carico (z=0) si ha

$$\rho_L = \rho(0) = \frac{V_0^-}{V_0^+} \quad \Rightarrow \quad \rho(z) = \rho_L \, e^{2\Gamma z}$$

Impedenza e coefficiente di riflessione (2/3)

Sulla sezione di carico (z=0) l'impedenza risulta:

$$Z_L = Z_i(0) = Z_C \frac{V_0^+ + V_0^-}{V_0^+ - V_0^-}$$

Confrontando le espressioni di ρ_L e di Z_L si può ricavare facilmente il legame fra le 2 grandezze:

$$Z_L = Z_C \frac{1 + \rho_L}{1 - \rho_L} \quad \text{oppure} \quad \rho_L = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C}$$

In modo analogo, si ricava il legame fra impedenza e coefficiente di riflessione sulla generica sezione z:

$$Z_i(z) = Z_C \frac{1 + \rho(z)}{1 - \rho(z)} \quad \text{e} \quad \rho(z) = \frac{Z_i(z) - Z_C}{Z_i(z) + Z_C}$$

Impedenza e coefficiente di riflessione (3/3)

Dalla prima delle 2 equazioni precedenti, ricordando che vale la relazione $\rho = \rho_L\, e^{2\Gamma z}$ e sostituendo l'espressione di ρ_L in funzione di Z_c e Z_L, si ricava facilmente che:

$$Z_i(z) = Z_C \frac{Z_L \cosh(\Gamma z) - Z_C \operatorname{senh}(\Gamma z)}{Z_C \cosh(\Gamma z) - Z_L \operatorname{senh}(\Gamma z)}$$

Tale relazione è estremamente utile perché permette di esprimere $Z_i(z)$, cioè il rapporto tra tensione e corrente nella generica sezione mediante i parametri caratteristici della linea (Z_C e Γ) e del carico (Z_L).

Infine, le soluzioni delle eq. dei telegrafisti si possono esprimere in funzione di ρ_L:

$$\begin{cases} V(z) = V_0^+ \left(e^{-\Gamma z} + \rho_L e^{\Gamma z} \right) \\ I(z) = \dfrac{V_0^+}{Z_C} \left(e^{-\Gamma z} - \rho_L e^{\Gamma z} \right) \end{cases}$$

Regime elettrico di una linea di TX (1/2)

La conoscenza del carico Z_L consente di determinare facilmente ρ_L, cioè il rapporto V_0^- / V_0^+.

Per determinare esattamente V_0^- e V_0^+, occorre conoscere, oltre al carico, le condizioni di alimentazione della linea.

In generale, una linea di lunghezza finita ℓ sarà alimentata nella sezione $z = -\ell$ mediante una rete attiva, cioè un opportuno generatore.

Regime elettrico di una linea di TX (2/2)

Supponendo di poter schematizzare tale generatore mediante un generatore ideale di tensione V_G connesso in serie ad una impedenza Z_G (impedenza interna del generatore), si avrà che:

$$V(-\ell) + Z_G I(-\ell) = V_G$$

Associando tale equazione alla:

$$V(-\ell) = Z_i(-\ell)I(-\ell) = Z_{\mathrm{IN}} I(-\ell)$$

si ottiene un sistema che può agevolmente essere risolto nelle incognite $V(-\ell)$ e $I(-\ell)$ (si ricordi che V_G e Z_G sono termini noti, mentre Z_{IN} può essere ricavata facilmente a partire dall'impedenza di carico Z_L , anch'essa nota).

Note $V(-\ell)$ e $I(-\ell)$, si determinano facilmente le costanti V_0^+ e V_0^- e quindi le tensioni e le correnti in ogni sezione della linea, cioè si determina il regime elettrico della linea.

Adattamento in uniformità (1/3)

Un caso di notevole interesse pratico è quello in cui non è presente l'onda riflessa: ➡ *regime d'onda puramente progressiva*.

Perché tale condizione sia verificata deve risultare:

$$\rho(z) = 0 \quad \forall z \quad \Rightarrow \quad V_0^- = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_L = 0$$

Ricordando che

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} \quad \Rightarrow \quad Z_L = Z_C$$

(*condizione di adattamento in uniformità*)

La condizione di adattamento corrisponde cioè ad una proprietà della linea e del carico: quando essi sono tali che $Z_L = Z_C$ la condizione di adattamento è verificata ed il carico non "riflette" parte dell' onda incidente all'indietro, bensì la assorbe completamente.

Adattamento in uniformità (2/3)

Ricordando che

$$\rho\left(z\right)=\frac{Z_i\left(z\right)-Z_C}{Z_i\left(z\right)+Z_C}$$

si ricava anche che in adattamento

$$Z_i\left(z\right)\equiv Z_C = Z_L \quad \forall z$$

<u>cioè in ogni sezione si "vede" sempre la stessa impedenza che coincide con la impedenza di carico e con la impedenza caratteristica della linea.</u>

In condizioni di adattamento le soluzioni delle equazioni dei telefonisti diventano

$$V(z) = V_0^+ e^{-\Gamma z} = V^+(z) \qquad\qquad I(z) = \frac{V_0^+}{Z_C} e^{-\Gamma z} = I^+(z)$$

Adattamento in uniformità (3/3)

da cui si ricava immediatamente:

$$V(z) = Z_C \cdot I(z)$$

Quando una linea di trasmissione è adattata, cioè è in regime di onda puramente progressiva, V ed I sono proporzionali secondo un coefficiente complesso che non dipende dalla sezione e coincide con l'impedenza caratteristica della linea. In regime d'onda puramente progressiva, vale quindi in ogni sezione una relazione analoga alla legge di Ohm.

Questo risultato si poteva ricavare anche direttamente dalla relazione

$$Z_i(z) = \frac{V(z)}{I(z)}$$

ricordando che in adattamento risulta $Z_i\left(z\right) \equiv Z_C$.

Potenza complessa (1/5)

La potenza complessa in generica sezione della linea è:

$$P_C(z) = \frac{1}{2} V(z)\, I^*(z) = P + jQ$$

dove I*(z) indica il complesso coniugato di I(z); inoltre

$$P = \mathrm{Re}\{P_C\}$$

è la *potenza attiva* che attraversa la generica sezione nel verso positivo all'asse z. Analogamente

$$Q = \mathrm{Im}\{P_C\}$$

è la *potenza reattiva*.

Esprimendo l'impedenza $Z_i(z)$ nel seguente modo:

$$Z_i(z) = R_i(z) + j\, X_i(z)$$

Potenza complessa (2/5)

si ha:

$$P = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\, Z_i\, I\, I^*\right\} = \frac{1}{2}\, R_i\, |I|^2$$

$$Q = \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2}\, Z_i\, I\, I^*\right\} = \frac{1}{2}\, X_i\, |I|^2$$

Si può dimostrare che la condizione per avere il trasferimento della massima potenza al carico è la condizione di *adattamento in potenza*

$$Z_L = Z_C^*$$

Nel caso di linea priva di perdite (R = G = 0) la condizione di adattamento in potenza coincide con quella di adattamento in uniformità, dovendo essere:

$$R_L = R_C^* = R_C$$

In applicazioni di telecomunicazioni è molto più importante l'adattamento in uniformità perchè non si vuole trasferire potenza bensì informazione.

Potenza complessa (3/5)

Si consideri ora una linea adattata (in uniformità). Le onde di tensione e di corrente assumono la forma:

$$\begin{cases} V(z) = V_0^+ e^{-\Gamma z} = V_0^+ e^{-(\alpha + j\beta) z} \\ I(z) = \dfrac{V_0^+}{Z_C} e^{-\Gamma z} = \dfrac{V_0^+}{Z_C} e^{-(\alpha + j\beta) z} \end{cases}$$

La potenza complessa che attraversa una generica sezione della linea è:

$$P_c(z) = \frac{1}{2} V(z) I^*(z) = \frac{1}{2} \frac{\left|V_0^+\right|^2}{Z_c} e^{-2\alpha z} = P_c(z=0) \cdot e^{-2\alpha z}$$

Quindi, un'onda elettromagnetica che si propaga lungo una linea di trasmissione di lunghezza ℓ subisce, per effetto delle perdite nei conduttori e nel dielettrico, un'attenuazione in potenza pari a:

$$\boxed{A = \frac{P_c(0)}{P_c(\ell)} = e^{2\alpha\ell}}$$

Esprimendo l'attenuazione in dB si ha:

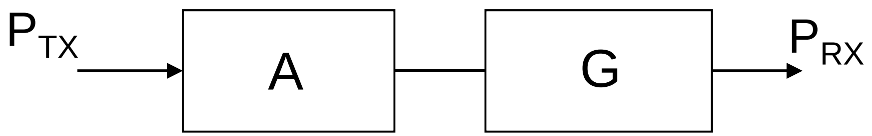
$$\boxed{A(dB) = 10 \log_{10} e^{2\alpha\ell} = \ell \cdot 10 \log_{10} e^{2\alpha} \triangleq a(dB/m) \cdot \ell}$$

Potenza complessa (4/5)

$a(dB/m)$ è l'attenuazione specifica, cioè l'attenuazione che il segnale subisce lungo un tronco di linea di lunghezza 1 m, espressa in dB:

$$a(dB/m) = 10\log_{10}\left[\frac{P_c(z=0)}{P_c(z=1\,m)}\right] = 10\log_{10} e^{2\alpha} = \alpha \cdot 20\log_{10} e \simeq 8.686 \cdot \alpha$$

Nei collegamenti su portante fisico, vale una formula di trasmissione analoga all'equazione di Friis per i collegamenti radio in spazio libero. Si ha:



$$\boxed{P_{RX}(dBW) = P_{TX}(dBW) + G(dB) - A(dB)}$$

dove G rappresenta il guadagno di tratta, cioè la somma dei guadagni di potenza degli amplificatori, mentre A è l'attenuazione in potenza che il segnale subisce per effetto delle perdite ohmiche nei conduttori (primariamente) e delle perdite nel dielettrico (secondariamente).

Potenza complessa (5/5)

- La formula di trasmissione della tratta radio è del tutto analoga, cambia solamente il significato delle grandezze A e G, che in questo caso sono rispettivamente l'attenuazione di spazio libero e la somma dei guadagni delle antenne.

Si noti che le perdite ohmiche dovute alla natura imperfetta dei conduttori possono dar luogo ad attenuazioni estremamente elevate, anche in spezzoni di linea di trasmissione non eccessivamente lunghi!

⇒ necessità di stadi di amplificazione intermedi.

Esempio: si consideri una linea in aria, in cui, alla frequenza f = 560 MHz, risulta α=0,115 m^{-1} e β=11,7 m^{-1}. Si ha α/β<0.01, cioè si può ritenere $\Gamma \simeq j\beta$ con una approssimazione migliore dell' 1%. Tuttavia, l'attenuazione specifica vale in questo caso:

$$a = 20\log_{10} e^{0.115} \cong 1 \text{ dB/m}$$

e quindi su un tratto di linea lungo 1 Km si ha un'attenuazione pari a 1000 dB! Perchè l'effetto delle perdite si possa ritenere trascurabile non è sufficiente che sia α<<1, ma deve risultare $\alpha \cdot \ell \ll 1$, dove ℓ è la lunghezza della linea.