Campi scalari e vettoriali (1)

Se ad ogni punto P = (x, y, z) di una regione di spazio $\Omega \in \mathbf{R}^3$ è associato uno ed uno solo scalare ϕ diremo che un **campo scalare** è stato definito in Ω. In altri termini:

$$\phi: \quad P \in \mathbf{R}^3 \quad \to \quad \phi(P) \in \mathbf{R} \quad (\text{o } \mathbf{C})$$

Indicheremo il campo scalare con la notazione ϕ (x, y, z, t), oppure ϕ (P, t). Qualora ϕ non dipenda dal tempo, e cioè $\phi = \phi(x, y, z) = \phi(P)$, il campo scalare si dirà stazionario

Chiameremo superficie di livello il luogo di tutti i punti nei quali ϕ assume il medesimo valore ϕ_0 . In formule:

$$\phi(x,y,z) = \phi_0$$

Se il campo scalare soddisfa opportune condizioni di regolarità (derivabile almeno 2 volte e gradiente di ϕ non nullo in ogni punto) per ogni punto passa *una ed una sola* superficie di livello

La conoscenza delle superfici di livello consente di descrivere completamente il campo

Se la regione Ω è bidimensionale, si parla di linee di livello

Campi scalari e vettoriali (2)

Se ad ogni punto P = (x, y, z) di una regione Ω dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ è associato uno ed un solo vettore **A**, diremo che un **campo vettoriale A** è stato definito in Ω.

A può essere un vettore dello spazio $\mathbf{R}^n$ oppure dello spazio $\mathbf{C}^n$. In simboli:

$$\mathbf{A}: \quad P \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{A}(P) \in \mathbf{R}^n \ (\text{o } \mathbf{C}^n)$$

Indicheremo il campo vettoriale **A** con la notazione **A**(x, y, z, t), oppure **A**(P, t). Qualora **A** non dipenda dal tempo, e cioè **A** = **A**(x, y, z) = **A**(P), il campo vettoriale si dirà stazionario.

- A seconda della grandezza fisica (vettoriale) rappresentata da **A,** il campo vettoriale potrà assumere denominazioni diverse. Ad esempio, se **A** ha le dimensioni di una velocità parleremo di “campo di velocità”, se **A** ha le dimensioni di una forza, parleremo di “campo di forze”, se V ha le dimensioni di una forza per unità di carica si parlerà di “campo elettrico”, e via dicendo …

Si chiamano *linee di campo* le linee dello spazio $\mathbf{R}^3$ parallele in ogni punto P al vettore **A**. Per i punti di tali linee risulta:

$$\mathbf{A} \times d\vec{\ell} = 0 \qquad \text{(i)}$$

dove $d\vec{\ell}$ è il vettore di lunghezza infinitesima tangente alla linea nel punto P. Tale uguaglianza, difatti, è soddisfatta se e solo se **A** e $d\vec{\ell}$ sono paralleli.

Campi scalari e vettoriali (3)

Se **A** è un campo di velocità, le linee di campo si diranno “linee di flusso” (o “linee di corrente”, se **A** è stazionario). Se **A** è un campo di forze, si parla di “linee di forza”. Anche nel caso dei campi E.M. si usa la dizione *linee di flusso*, o talvolta, impropriamente, di linee di forza.

Esprimendo il vettore infinitesimo tangente alla linea in componenti cartesiane:

$$d\vec{\ell} = dx\ \hat{\mathbf{i}}_x + dy\ \hat{\mathbf{i}}_y + dz\ \hat{\mathbf{i}}_z$$

l’equazione vettoriale (i) si può riscrivere nel modo seguente:

$$\begin{cases} A_y dz - A_z dy = 0 \\ A_z dx - A_x dz = 0 \\ A_x dy - A_y dx = 0 \end{cases}$$

da queste 3 equazioni scalari si ricava infine:

$$\boxed{\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}} \qquad \text{(ii)}$$

In modo del tutto analogo, si dimostra che le linee di campo soddisfano l’equazione:

$$\frac{ds_{u1}}{A_{u1}} = \frac{ds_{u2}}{A_{u2}} = \frac{ds_{u3}}{A_{u3}}$$

dove ($ds_{u1}, ds_{u2}, ds_{u3}$ sono gli archi elementari e (A_{u1}, A_{u2}, A_{u3}) le componenti di **A** rispetto a un generico sistema di riferimento curvilineo (u_1, u_2, u_3).

Campi scalari e vettoriali (4)

Integrando l'equazione differenziale (ii) si può quindi ottenere l'espressione analitica delle linee di forza del campo vettoriale. L'integrazione di tale equazione può risultare nella pratica molto difficile! Per questo motivo spesso si utilizzano *criteri qualitativi* per il tracciamento delle linee di flusso.

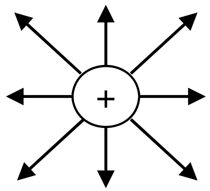
- **Esercizio** Determinare sul piano xy l'espressione analitica delle linee di flusso del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme q_0 posta nell'origine del sistema di riferimento cartesiano

Le linee di flusso hanno il limite di fornire una rappresentazione completa solo di direzione e verso della grandezza vettoriale rappresentata, ma non danno informazioni rigorose sulla sua intensità. Per ovviare a ciò, si utilizza il *criterio di Faraday*: le linee di forza vengono disegnate più ravvicinate nelle zone dello spazio in cui l'intensità del campo è maggiore. Perché tale criterio dia informazioni precise, è quindi necessario che si abbia una relazione di diretta proporzionalità fra la densità di linee di forza disegnate e il modulo del vettore. Si tratta, comunque, di un criterio qualitativo.

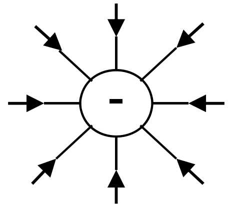
- Un campo le cui linee di flusso sono ovunque // ed equidistanziate si dirà uniforme
- Un punto del campo vettoriale dal quale si dipartono tutte le linee vettoriali si dirà una "sorgente" del campo
- Un punto nel quale si chiudono tutte le linee vettoriali si dirà un "pozzo".

Campi scalari e vettoriali (5)

<u>Esempio</u> : nel caso del campo elettrostatico, le cariche positive sono le sorgenti, le cariche negative i pozzi.

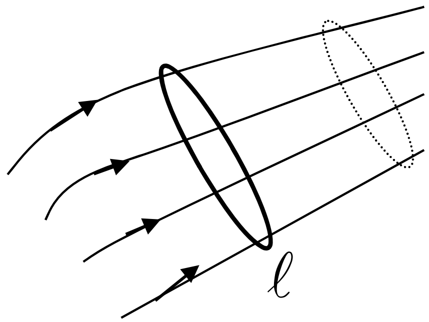


<u>SORGENTE</u>



<u>POZZO</u>

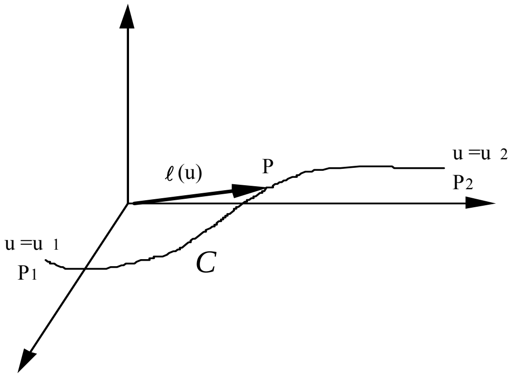
Data una linea chiusa ℓ, si definisce tubo di flusso la superficie tubolare formata da tutte le linee vettoriali che passano per i punti di ℓ.



Integrali su linee, superfici e volumi

INTEGRALI DI LINEA

Sia *C* una curva orientata di **R**^{3}, di estremi P1 e P2. *C* sia descritta in forma parametrica dalla funzione $\vec{\ell}$, dipendente dal parametro scalare *u*:



$$\vec{\ell}: \quad u \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \subseteq \mathbf{R} \to [C] \subseteq \mathbf{R}^3$$

$$\mathrm{P}_1 = \vec{\ell}(\mathrm{a})$$

$$\mathrm{P}_2 = \vec{\ell}(\mathrm{b})$$

$$\vec{\ell}(u) = \mathrm{x}(u)\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{x} + \mathrm{y}(u)\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{y} + \mathrm{z}(u)\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z}$$

Sia *f* una funzione definita sull'insieme [*C*] dei punti di *C*

Integrale curvilineo

$$\boxed{{}_C\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} f \; \mathrm{d}\ell}$$

Tale integrale non dipende dalla parametrizzazione $\vec{\ell}$ scelta.

Si dimostra che risulta sempre: $\mathrm{d}\ell = \left\| \vec{\ell}\,'(u) \right\| \mathrm{d}u$

$${}_C\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} f(\vec{\ell}(u))\, \mathrm{d}\ell = \int_\mathrm{a}^\mathrm{b} f(\vec{\ell}(u)) \left\| \vec{\ell}\,'(u) \right\| \mathrm{d}u$$

FORMULA RISOLUTIVA DELL'INTEGRALE CURVILINEO

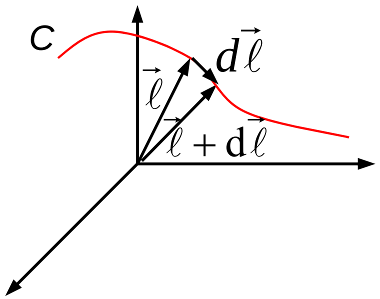
Integrali su linee, superfici e volumi (2)

Sia **A** un campo vettoriale definito e continuo lungo *C*. La quantità:

$$\int_{P_1 \atop C}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_C A_x\, dx + A_y\, dy + A_z\, dz$$

è detta integrale del campo vettoriale **A** lungo la linea *C.*

L'integrale suddetto è la somma lungo C delle componenti tangenziali di **A** rispetto alla curva stessa.



$d\vec{\ell} = dx\, \hat{\mathbf{i}}_x + dy\, \hat{\mathbf{i}}_y + dz\, \hat{\mathbf{i}}_z$

è un vettore tangente a *C* e di lunghezza infinitesima $d\ell$

Pertanto si può scrivere anche:

$$\int_c \mathbf{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_c \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell\, d\ell$$

dove $\hat{\mathbf{i}}_\ell$ è il versore tangente a *C* nel generico punto P, avente verso concorde con l'orientazione della curva.

Integrali su linee, superfici e volumi (3)

Se *C* è una curva chiusa semplice (cioè non interseca se stessa in alcun punto) allora l'integrale lungo tale curva:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \; = \; \oint_C \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell \mathrm{d}\ell$$

è detto *circuitazione* di **A** lungo *C*.

<u>OSSERVAZIONE:</u>

L'integrale di linea di un campo vettoriale è un caso particolare di integrale curvilineo, con:

$$f(\vec{\ell}(u)) \; = \; \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell$$

Il contributo della parametrizzazione $\vec{\ell}$ è contenuto nel versore tangente. Si dimostra che:

$$\hat{\mathbf{i}}_\ell \; = \; \vec{\ell}'(u) \big/ \left\| \vec{\ell}'(u) \right\|$$

Si ha quindi:

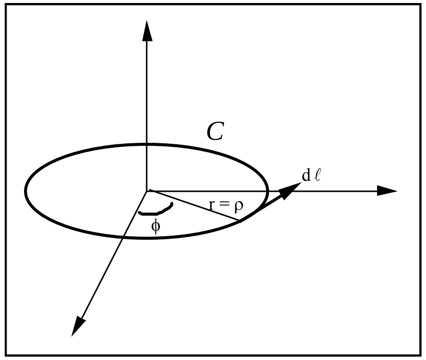
$$\int_{C\,P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \; = \; \int_{P_1,\,C}^{P_2} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell \mathrm{d}\ell = \int_a^b \mathbf{A} \cdot \frac{\vec{\ell}'(u)}{\left\| \vec{\ell}'(u) \right\|} \left\| \vec{\ell}'(u) \right\| \, \mathrm{d}u \; = \; \int_a^b \mathbf{A} \cdot \vec{\ell}'(u) \, \mathrm{d}u$$

Integrali su linee, superfici e volumi (4)

FORMULA RISOLUTIVA PER L'INTEGRALE DI LINEA DEL CAMPO VETTORIALE:

$$\int_{C\,P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\ell = \int_a^b \mathbf{A}\cdot \vec{\ell}'(u)\, du$$

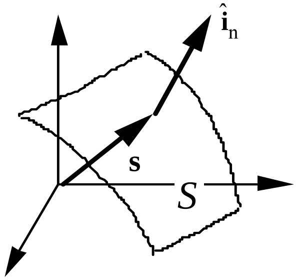
Esercizio Si calcoli la circuitazione di un vettore **A**(x,y,z) lungo un cerchio di raggio R centrato nell'origine e giacente sul piano xy (vedi figura).



INTEGRALI DI SUPERFICIE

Sia *S* una superficie orientata di $\mathbf{R}^3$ descritta in forma parametrica dalla funzione vettoriale **r**, dipendente dai parametri scalari *u*,*v*:

$$\mathbf{r}:\quad (u,v)\in D=\{[a,b]\times[c,d]\}\subseteq \mathbf{R}^2 \;\rightarrow\; [S]\subseteq \mathbf{R}^3$$



Integrali su linee, superfici e volumi (5)

r è il vettore, funzione dei parametri *u* e *v*, che individua il generico punto della superficie *S*:

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathrm{x}(u,v)\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{x}} + \mathrm{y}(u,v)\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{y}} + \mathrm{z}(u,v)\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{z}}$$

Sia ora *f* una funzione scalare o vettoriale definita sull'insieme [*S*] dei punti di *S*.

Integrale superficiale

$$\boxed{\int_S f\,\mathrm{d}S}$$

Tale integrale non dipende dalla parametrizzazione **r** scelta.

Si dimostra che risulta sempre:

$$\mathrm{d}S = \left\|\mathbf{r}_{\mathrm{u}} \times \mathbf{r}_v\right\| \mathrm{d}u\;\mathrm{d}v\,,\quad \text{dove}\;:\begin{cases}\mathbf{r}_{\mathrm{u}} = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\\[2ex] \mathbf{r}_v = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\end{cases}$$

FORMULA RISOLUTIVA DELL'INTEGRALE DI SUPERFICIE

$$\int_S f\,\mathrm{d}S = \int_D f(\mathbf{r}(u,v))\left\|\mathbf{r}_{\mathrm{u}} \times \mathbf{r}_v\right\|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\int_{\mathrm{c}}^{\mathrm{d}} f(\mathbf{r}(u,v))\left\|\mathbf{r}_{\mathrm{u}} \times \mathbf{r}_v\right\|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Integrali su linee, superfici e volumi (6)

Sia ora **A**(x,y,z) un campo vettoriale definito e continuo lungo *S*. Sia inoltre $\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n}$ il versore normale alla superficie *S* nel generico punto P. La quantità:

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n} \mathrm{d}S$$

è detta *flusso* del campo vettoriale **A** attraverso la superficie *S*.

Nota Per quanto riguarda il verso di $\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n}$, per convenzione viene considerato diretto verso l'esterno nel caso di una superficie chiusa. Se *S* è una superficie aperta, il versore $\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n}$ è diretto dalla faccia positiva a quella negativa, avendo stabilito a priori quale sia la faccia positiva della superficie. Se *S* ha per contorno una linea chiusa orientata *C*, si assume per $\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n}$ il verso in cui avanza una vite che ruota nel verso positivo fissato su *C* (regola della vite, o del cavatappi).

Se *S* è una superficie chiusa allora indicheremo con:

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n} \mathrm{d}S$$

il flusso attraverso tale superficie.

Integrali su linee, superfici e volumi (7)

OSSERVAZIONE:

Il flusso di un campo vettoriale è un caso particolare di integrale superficiale, con:

$$f(\mathbf{r}(u,v)) = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{n}}$$

Il contributo della parametrizzazione **r** è contenuto nel versore normale. Si dimostra che:

$$\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{n}} = \frac{\mathbf{r}_{\mathrm{u}} \times \mathbf{r}_{v}}{\left\|\mathbf{r}_{\mathrm{u}} \times \mathbf{r}_{v}\right\|}$$ da cui:

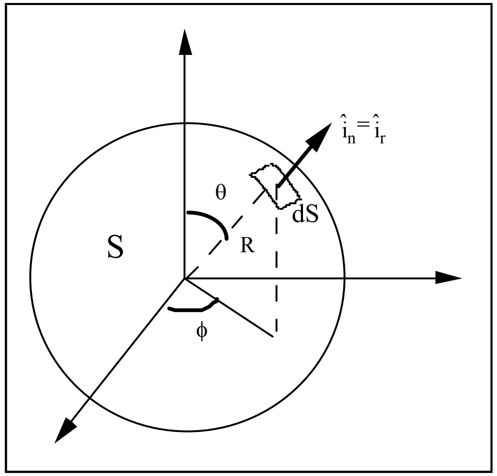
$$\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{n}} \mathrm{d}S = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\int_{\mathrm{c}}^{\mathrm{d}} \mathbf{A}\cdot\frac{\mathbf{r}_{\mathrm{u}} \times \mathbf{r}_{v}}{\left\|\mathbf{r}_{\mathrm{u}} \times \mathbf{r}_{v}\right\|}\left\|\mathbf{r}_{\mathrm{u}} \times \mathbf{r}_{v}\right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\int_{\mathrm{c}}^{\mathrm{d}} \mathbf{A}\cdot\left[\mathbf{r}_{\mathrm{u}} \times \mathbf{r}_{v}\right] \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

FORMULA RISOLUTIVA PER IL FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE:

$$\boxed{\iint_S \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{n}}\, \mathrm{d}S = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}\int_{\mathrm{c}}^{\mathrm{d}} \mathbf{A}\cdot\left[\mathbf{r}_{\mathrm{u}} \times \mathbf{r}_{v}\right] \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{a}^{b}\int_{c}^{d} \mathbf{A}\cdot\left[\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right] \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}$$

Integrali su linee, superfici e volumi (8)

<u>ESERCIZIO</u> Si calcoli il flusso del vettore **A**(x,y,z) attraverso una superficie sferica centrata nell'origine di raggio R (figura).

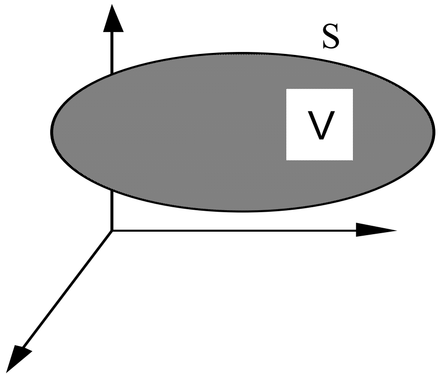


INTEGRALI DI VOLUME

Si consideri una superficie *chiusa S* che racchiude una regione **A** dello spazio **R**^{3}. Si possono allora avere i seguenti integrali di volume:

$$\iiint_V \phi \, \mathrm{d}V \quad \textit{Integrale di un campo scalare}$$

$$\iiint_V \mathbf{A} \, \mathrm{d}V \quad \textit{Integrale di un campo vettoriale}$$



Integrali su linee, superfici e volumi (9)

Se **u** è espresso, ad esempio, in forma cartesiana:

$$A = A_x \hat{\mathbf{i}}_x + A_y \hat{\mathbf{i}}_y + A_z \hat{\mathbf{i}}_z \quad \text{risulta:}$$

$$\boxed{\iiint_V A \, dV = \iiint_V A_x dV \; \hat{\mathbf{i}}_x + \iiint_V A_y dV \; \hat{\mathbf{i}}_y + \iiint_V A_z dV \; \hat{\mathbf{i}}_z}$$

e ci si riconduce quindi all’integrale di 3 funzioni scalari.

Gli integrali di volume, come quelli curvilinei o di superficie, possono essere effettuati, a scelta, in uno dei sistemi di riferimento disponibili. Nel caso di un riferimento cartesiano risulta, banalmente:

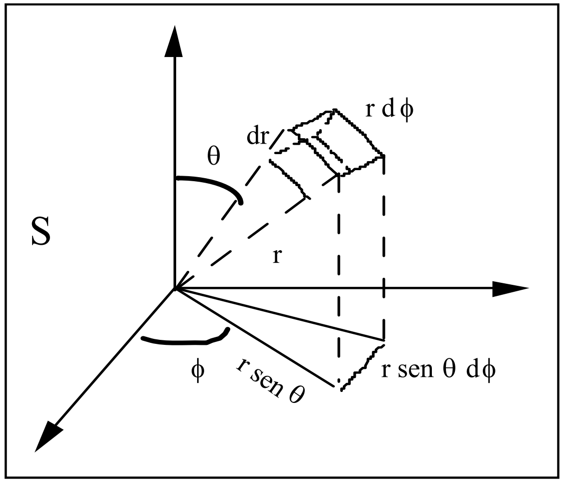
$$dV = dx \, dy \, dz$$

Si ricordi che l’elemento infinitesimo di volume (parallelepipedo elementare) in un generico sistema di coordinate curvilinee (u_1,u_2,u_3) può essere espresso nel modo seguente:

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$$

Integrali su linee, superfici e volumi (10)

Ad esempio, se si adotta un sistema di riferimento sferico (vedi figura):



$$dV = h_1\ h_2\ h_3\ dr\ d\theta\ d\Phi = r^2\ \sin\theta\ dr\ d\theta\ d\Phi$$

E In un sistema cilindrico $\quad dV = h_1\ h_2\ h_3\ dr\ d\Phi\ dz = r\ dr\ d\Phi\ dz$

Per esprimere l'elemento di volume esiste un approccio del tutto equivalente, che sfrutta le proprietà del prodotto vettoriale misto. Tale prodotto fornisce infatti il volume del parallelepipedo obliquo avente come spigoli i 3 vettori operandi. Si consideri un sistema di coordinate curvilinee (u1, u2, u3), e sia

$$\mathbf{r} = x\,(u_1, u_2, u_3)\hat{\mathbf{i}}_x + y\,(u_1, u_2, u_3)\hat{\mathbf{i}}_y + z\,(u_1, u_2, u_3)\hat{\mathbf{i}}_z$$

la relativa trasformazione da coordinate curvilinee a coordinate cartesiane.

Integrali su linee, superfici e volumi (11)

Si dimostra che:

$$dV = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \right) du_1 du_2 du_3 = (\mathbf{r}_{u1} \cdot \mathbf{r}_{u2} \times \mathbf{r}_{u3})\ du_1 du_2 du_3$$

inoltre, il prodotto misto coincide con il determinante Jacobiano della funzione **r**:

$$\begin{vmatrix} \partial \mathrm{x}/\partial u_1 & \partial \mathrm{y}/\partial u_1 & \partial \mathrm{z}/\partial u_1 \\ \partial \mathrm{x}/\partial u_2 & \partial \mathrm{y}/\partial u_2 & \partial \mathrm{z}/\partial u_2 \\ \partial \mathrm{x}/\partial u_3 & \partial \mathrm{y}/\partial u_3 & \partial \mathrm{z}/\partial u_3 \end{vmatrix} = \left| \overline{\mathrm{J}}(\mathbf{r}) \right|$$

Si verifichi per esercizio che applicando la formula scritta sopra, si riottiene, rispettivamente per i sistemi cilindrico e sferico:

<u>Cilindrico</u>

$$dV = (\mathbf{r}_{\mathrm{r}} \cdot \mathbf{r}_{\Phi} \times \mathbf{r}_{\mathrm{z}})\ \mathrm{dr}\ \mathrm{d}\Phi\ \mathrm{dz} = \mathrm{r}\ \mathrm{dr}\ \mathrm{d}\Phi\ \mathrm{dz}$$

<u>Sferico</u>

$$dV = (\mathbf{r}_{\mathrm{r}} \cdot \mathbf{r}_{\theta} \times \mathbf{r}_{\Phi})\ \mathrm{dr}\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\Phi = \mathrm{r}^2\ \sin\theta\ \mathrm{dr}\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\Phi$$