Sistemi di coordinate curvilinee (1)

- Un sistema di coordinate curvilinee (u_1, u_2, u_3) nello spazio $\mathbf{R}^3$ è definito, con riferimento ad un sistema cartesiano, da 3 funzioni del tipo:

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x, y, z) \\ u_2 = u_2(x, y, z) \\ u_3 = u_3(x, y, z) \end{cases}$$

La funzione vettoriale: $\mathbf{u}: \quad (x, y, z) \rightarrow (u_1, u_2, u_3)$

si dirà un *cambiamento di coordinate*.

- In modo analogo, si definisce il cambiamento di coordinate inverso:

$$\begin{cases} x = x(u_1, u_2, u_3) \\ y = y(u_1, u_2, u_3) \\ z = z(u_1, u_2, u_3) \end{cases}$$

$$\mathbf{r}: \quad (u_1, u_2, u_3) \rightarrow (x, y, z)$$

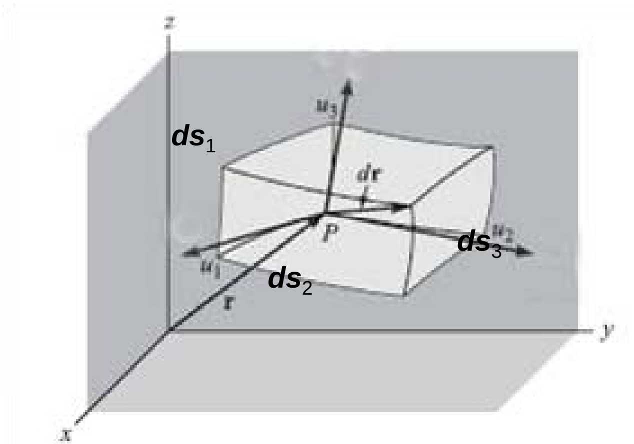
Sistemi di coordinate curvilinee (2)

Chiameremo *superfici coordinate* le superfici di equazione u_i =costante:

$$\begin{cases} u_1(x,y,z) = c_1 \\ u_2(x,y,z) = c_2 \\ u_3(x,y,z) = c_3 \end{cases}$$

Su una superficie coordinata variano solo 2 coordinate

Chiameremo *linee coordinate* le 3 linee che si ottengono intersecando a 2 a 2 le 3 superfici coordinate. Lungo tali linee varia solo una coordinata u_i.



Chiameremo infine *versori fondamentali* relativi al generico punto P di coordinate (u_1, u_2, u_3) i versori $\hat{\mathbf{u}}_1$, $\hat{\mathbf{u}}_2$, $\hat{\mathbf{u}}_3$ tangenti alle tre linee coordinate passanti per P, nel punto P stesso

Un sistema di coordinate curvilinee (u_1, u_2, u_3), si dice *ortogonale* se i versori $\hat{\mathbf{u}}_1$, $\hat{\mathbf{u}}_2$, $\hat{\mathbf{u}}_3$ sono mutuamente ortogonali in ogni punto.

Se inoltre $\hat{\mathbf{u}}_1 \times \hat{\mathbf{u}}_2 = \hat{\mathbf{u}}_3$ sistema ortogonale destrorso

Sistemi di coordinate curvilinee (3)

Si noti che i versori fondamentali sono in generale delle funzioni del punto!!!

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_1 = \hat{\mathbf{u}}_1(P) = \hat{\mathbf{u}}_1(u_1, u_2, u_3) \\ \hat{\mathbf{u}}_1 = \hat{\mathbf{u}}_1(P) = \hat{\mathbf{u}}_1(u_1, u_2, u_3) \\ \hat{\mathbf{u}}_1 = \hat{\mathbf{u}}_1(P) = \hat{\mathbf{u}}_1(u_1, u_2, u_3) \end{cases}$$

Le quantità:

$$h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2} \qquad i = 1,2,3$$

sono dette coefficienti metrici

Si può dimostrare che risulta:

$$\boxed{\hat{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \qquad i = 1,2,3}$$

con $\quad \mathbf{r} = x(u_1, u_2, u_3)\,\hat{\mathbf{i}}_x + y(u_1, u_2, u_3)\,\hat{\mathbf{i}}_y + z(u_1, u_2, u_3)\,\hat{\mathbf{i}}_z$

Sistemi di coordinate curvilinee (4)

Se si incrementa la coordinata u_i di un du_i, senza variare le altre 2, P si sposterà di un arco elementare di lunghezza $ds_{i,}$, in generale non uguale a du_i (come in coordinate cartesiane), ma ad esso proporzionale!

Archi elementari lungo le 3 linee coordinate:

$$ds_i = h_i du_i \qquad \mathrm{i} = 1,2,3$$

I 3 archi individuano una *cella elementare*, o parallelepipedo elementare, di cui essi formano 3 spigoli. Area delle facce:

$$\begin{cases} dS_1 = ds_2 ds_3 = h_2 h_3 du_2 du_3 \\ dS_2 = ds_1 ds_3 = h_1 h_3 du_1 du_3 \\ dS_3 = ds_1 ds_2 = h_1 h_2 du_1 du_2 \end{cases}$$

Volume del parallelepipedo elementare:

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \qquad \text{(i)}$$

La formula (i) è particolarmente utile nella risoluzione di integrali di volume:

$$\int_V f(u_1, u_2, u_3)\, dV$$

Sistemi di coordinate curvilinee (5)

- Il sistema fondamentale di versori $\hat{\mathbf{u}}_1,\ \hat{\mathbf{u}}_2,\ \hat{\mathbf{u}}_3$ è particolarmente importante perché mediante esso si possono ricavare le ***componenti*** di un generico vettore dello spazio rispetto al sistema di coordinate curvilinee (u_1, u_2, u_3).
- Le ***componenti*** di un generico vettore **v** nel riferimento curvilineo si ottengono proiettando tale vettore lungo ciascuno dei versori fondamentali:

$$\boxed{\mathrm{v_i} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}}_i(\mathrm{u_1}, \mathrm{u_2}, \mathrm{u_3}) \qquad \mathrm{i} = 1,2,3}$$

Coordinate cilindriche e sferiche

Esistono molteplici sistemi di coordinate curvilinee usati nello studio dei campi E.M. Ad esempio, l'equazione di Helmholtz è risolvibile per separazione di variabili in coordinate:

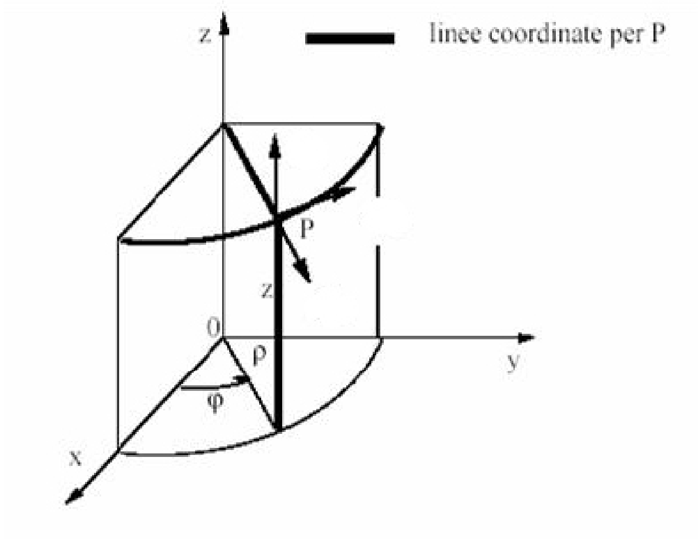
- *cartesiane ortogonali, cilindriche, sferiche, paraboliche, coniche, sferoidali, paraboloidali,ellissoidali, ecc.*

In questo corso vedremo solamente le coordinate cilindriche (utili nello studio delle strutture guidanti a simmetria circolare) e le coordinate sferiche (utili nello studio della radiazione di onde E.M.)

1) Coordinate cilindriche

$$u_1 = \rho \quad ; \quad u_2 = \Phi \quad ; \quad u_3 = z$$

Φ è detta *azimut* o longitudine, z è detta *quota*



Le superfici coordinate sono cilindri aventi per asse l'asse z (ρ = cost), dei semipiani per l'asse z (ϕ = cost) e dei piani ortogonali all'asse z.

Nel piano xy, il generico punto P è identificato da una coppia di coordinate (ρ,ϕ) ⇨ coord. polari piane (caso particolare)

Coordinate cilindriche e sferiche (2)

Formule di trasformazione da coord. cartesiane a coord. cilindriche:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} & (0 \le \rho < +\infty) \\ \Phi = \arctan\left(\dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right) & (0 \le \Phi < 2\pi) \\ z = z \end{cases}$$

Formule di trasformazione inverse:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\Phi \\ y = \rho\sin\Phi \\ z = z \end{cases}$$

Mediante le formule inverse si possono calcolare facilmente i coefficienti metrici:

$$h_1 = 1 \qquad h_2 = \rho \qquad h_3 = 1$$

I versori fondamentali relativi al generico punto P di coord. (ρ,ϕ,z) sono quindi:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{i}}_\rho = \cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{x}} + \sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{y}} + 0\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{z}} \\ \hat{\mathbf{i}}_\Phi = -\sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{x}} + \cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{y}} + 0\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{z}} \\ \hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{z}} = \hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{z}} \end{cases}$$

Le formule di trasformazione dei versori si potevano ricavare anche mediante considerazioni geometriche, oltre che analiticamente …

Coordinate cilindriche e sferiche (3)

Formule di trasformazione inverse dei versori:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{i}}_x = \cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\rho - \sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi + 0\,\hat{\mathbf{i}}_z \\ \hat{\mathbf{i}}_y = \sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\rho + \cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi + 0\,\hat{\mathbf{i}}_z \\ \hat{\mathbf{i}}_z = \hat{\mathbf{i}}_z \end{cases}$$

Sia **u** un generico vettore espresso mediante le sue componenti cartesiane:

$$\mathbf{u} = \mathrm{u}_x\,\hat{\mathbf{i}}_x + \mathrm{u}_y\,\hat{\mathbf{i}}_y + \mathrm{u}_z\,\hat{\mathbf{i}}_z$$

Proiettando **u** lungo i versori del sistema cilindrico si ottiene:

$$\mathbf{u} = \mathrm{u}_\rho\,\hat{\mathbf{i}}_\rho + \mathrm{u}_\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi + \mathrm{u}_z\,\hat{\mathbf{i}}_z \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} u_\rho = u_x\cos\phi + u_y\sin\phi \\ u_\Phi = -u_x\sin\phi + u_y\cos\phi \\ u_z = u_z \end{cases}$$

Tutte le operazioni definite nei sistemi cartesiani, si possono facilmente estendere ai sistemi di coordinate cilindriche.

Prodotto scalare: $\Rightarrow$ $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathrm{u}_\rho \mathrm{v}_\rho + \mathrm{u}_\Phi \mathrm{v}_\Phi + \mathrm{u}_z \mathrm{v}_z$

Coordinate cilindriche e sferiche (4)

Prodotto vettoriale:

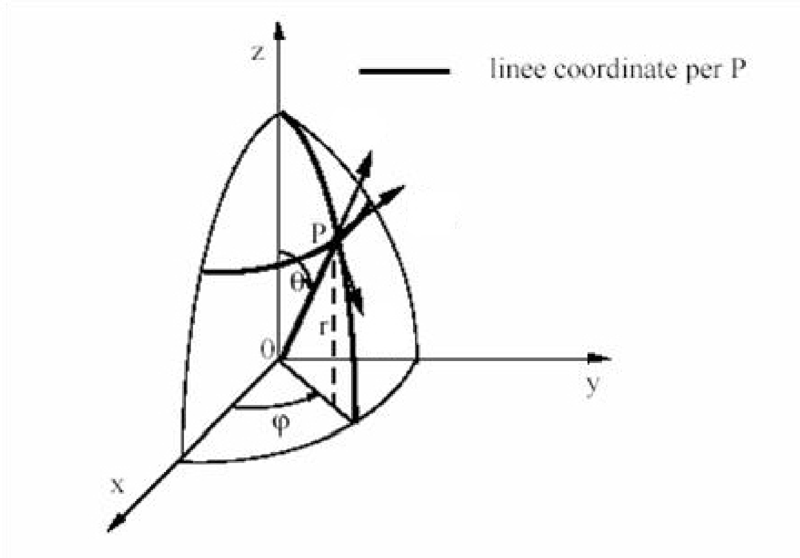
$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}}_\rho & \hat{\mathbf{i}}_\Phi & \hat{\mathbf{i}}_z\\ u_\rho & u_\Phi & u_z\\ v_\rho & v_\Phi & v_z\end{vmatrix}=(u_\Phi v_z-u_z v_\Phi)\,\hat{\mathbf{i}}_\rho+(u_z v_\rho-u_\rho v_z)\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi+(u_\rho v_\Phi-u_\Phi v_\rho)\,\hat{\mathbf{i}}_z$$

2) Coordinate sferiche (o polari nello spazio):

$$u_1=r\quad;\quad u_2=\theta\quad;\quad u_3=\phi$$

Φ è ancora la longitudine, θ è detta *colatitudine* o *elevazione*.

Le superfici coordinate sono delle sfere con centro nell'origine (r = cost), dei coni avente per asse l'asse z (θ = cost) e dei semipiani per l'asse z (ϕ = cost).



Coordinate cilindriche e sferiche (5)

Le formule per il cambiamento di coordinate sono:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & (0 \le \mathrm{r} < +\infty) \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{\mathrm{x}^2 + y^2}}{z}\right) & (0 \le \theta \le \pi) \\ \Phi = \arctan\left(\dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right) & (0 \le \Phi < 2\pi) \end{cases}$$

Valgono poi le formule inverse:

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\Phi \\ y = r \sin\theta \sin\Phi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

Mediante le formule inverse si possono calcolare facilmente i coefficienti metrici:

$$h_1 = 1 \qquad h_2 = r \qquad h_3 = r \sin\theta$$

I versori fondamentali relativi al generico punto P di coord. (r,θ,ϕ) sono quindi:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{i}}_r = \sin\theta \cos\Phi\, \hat{\mathbf{i}}_x + \sin\theta \sin\Phi\, \hat{\mathbf{i}}_y + \cos\theta\, \hat{\mathbf{i}}_z \\ \hat{\mathbf{i}}_\theta = \cos\theta \cos\Phi\, \hat{\mathbf{i}}_x + \cos\theta \sin\Phi\, \hat{\mathbf{i}}_y - \sin\theta\, \hat{\mathbf{i}}_z \\ \hat{\mathbf{i}}_\Phi = -\sin\Phi\, \hat{\mathbf{i}}_x + \cos\Phi\, \hat{\mathbf{i}}_y + 0\, \hat{\mathbf{i}}_z \end{cases}$$

Le formule di trasformazione dei versori si potevano ricavare anche mediante considerazioni geometriche, oltre che analiticamente …

Coordinate cilindriche e sferiche (6)

Formule di trasformazione inverse dei versori:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{i}}_x = \sin\theta\cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_r + \cos\theta\cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\theta - \sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi \\ \hat{\mathbf{i}}_y = \sin\theta\sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_r + \cos\theta\sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\theta + \cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi \\ \hat{\mathbf{i}}_z = \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}}_r - \sin\theta\,\hat{\mathbf{i}}_\theta + 0\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi \end{cases}$$

Vettori in componenti sferiche:

$$\mathbf{u} = \mathrm{u}_r\,\hat{\mathbf{i}}_r + \mathrm{u}_\theta\,\hat{\mathbf{i}}_\theta + \mathrm{u}_\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi \quad \text{con} \quad \begin{cases} u_r = u_x \sin\vartheta\cos\phi + u_y \sin\vartheta\sin\phi + u_z\cos\vartheta \\ u_\theta = u_x\cos\vartheta\cos\phi + u_y\cos\vartheta\sin\phi - u_z\sin\vartheta \\ u_\phi = -u_x\sin\phi + u_y\cos\phi \end{cases}$$

Prodotto scalare:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathrm{u}_r\mathrm{v}_r + \mathrm{u}_\theta\mathrm{v}_\theta + \mathrm{u}_\Phi\mathrm{v}_\Phi$$

Prodotto vettoriale:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}}_r & \hat{\mathbf{i}}_\theta & \hat{\mathbf{i}}_\Phi \\ \mathrm{u}_r & \mathrm{u}_\theta & \mathrm{u}_\Phi \\ \mathrm{v}_r & \mathrm{v}_\theta & \mathrm{v}_\Phi \end{vmatrix} = (\mathrm{u}_\theta\mathrm{v}_\Phi - \mathrm{u}_\Phi\mathrm{v}_\theta)\,\hat{\mathbf{i}}_r + (\mathrm{u}_\Phi\mathrm{v}_r - \mathrm{u}_r\mathrm{v}_\Phi)\,\hat{\mathbf{i}}_\theta + (\mathrm{u}_r\mathrm{v}_\theta - \mathrm{u}_\theta\mathrm{v}_r)\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi$$

Sistemi di riferimento curvilinei: considerazioni conclusive (1)

- E' importante non fare confusione fra le coordinate di un punto in un sistema di coordinate curvilineo, e le componenti di un vettore nel medesimo sistema di riferimento!
  - Esempio: le coordinate curvilinee possono essere coordinate angolari (es. θ e ϕ dei sistemi sferico e cilindrico), mentre le componenti di un vettore per definizione sono sempre delle lunghezze!)

- In un sistema cartesiano direzione e verso dei versori fondamentali non variano con il punto, pertanto per comodità essi possono essere pensati fissi ed applicati nell'origine. Ma in generale, in un riferimento curvilineo, <u>tanto i versori fondamentali quanto le componenti del vettore sono funzione del punto di applicazione P = (u_1,u_2,u_3) del vettore stesso</u>! In formule:

$$\mathbf{v} = v_1(u_1,u_2,u_3)\,\hat{\mathbf{u}}_1(u_1,u_2,u_3) + v_2(u_1,u_2,u_3)\,\hat{\mathbf{u}}_2(u_1,u_2,u_3) + v_3(u_1,u_2,u_3)\,\hat{\mathbf{u}}_3(u_1,u_2,u_3)$$

Ad esempio, nel riferimento cilindrico si ha: $\mathbf{v} = v_\rho(\rho,\phi,z)\hat{\mathbf{i}}_\rho(\phi) + v_\Phi(\rho,\phi,z)\hat{\mathbf{i}}_\Phi(\phi) + v_z(\rho,\phi,z)\hat{\mathbf{i}}_z(\phi)$

e nel sistema di riferimento sferico: $\mathbf{v} = v_r(r,\theta,\phi)\,\hat{\mathbf{i}}_r(\theta,\phi) + v_\theta(r,\theta,\phi)\,\hat{\mathbf{i}}_\theta(\theta,\phi) + v_\Phi(r,\theta,\phi)\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi(\phi)$

Sistemi di riferimento curvilinei: considerazioni conclusive (2)

- Si osservi che sia le coordinate cilindriche sia quelle sferiche non sono definite sull'asse z, e in particolare *non sono definite nell'origine* (poiché gli angoli θ e ϕ sono indeterminati): come conseguenza, nemmeno i versori fondamentali sono definiti, per cui in questi sistemi non ha senso pensare i vettori applicati nell'origine.