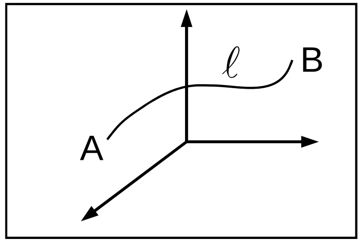
Campi vettoriali conservativi e solenoidali

Sia **V**(x,y,z) un campo vettoriale definito in una regione di spazio Ω, e sia ℓ un cammino, di estremi A e B, definito in Ω . Sia $\vec{r}(\mathrm{u})$ una parametrizzazione di ℓ, funzione della variabile scalare u.

$$\vec{r}: \quad \mathrm{u} \in [\mathrm{a,b}] \subseteq \mathbf{R} \rightarrow [\ell] \subseteq \mathbf{R}^3 \qquad \begin{cases} \mathrm{A} = \vec{r}\ (\mathrm{a}) \\ \mathrm{B} = \vec{r}\ (\mathrm{b}) \end{cases}$$

$$\vec{r}(\mathrm{u}) = \mathrm{OP(u)} = \mathrm{x(u)}\, \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{x} + \mathrm{y(u)}\, \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{y} + \mathrm{z(u)}\, \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z}$$



La seguente grandezza assume grande importanza nella descrizione delle proprietà fisiche di **V**:

$$\boxed{\mathrm{L}_\ell = {}_\ell\!\int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}}$$

– Tale grandezza è in generale dipendente dalla topologia del cammino che unisce i punti A e B, ed ha un significato fisico diverso a seconda della grandezza fisica rappresentata da **V**. Ad esempio, se **V** è un campo di forze,ha le dimensioni di un lavoro. Se **V** è il vettore campo elettrico **E**, ha le dimensioni di una tensione, ecc…

Campi vettoriali conservativi (2)

- DEFINIZIONE: Un campo vettoriale **V** si dice ***conservativo***, o esatto, se risulta, in ogni punto P di Ω:

$$\boxed{\mathbf{V}\cdot d\vec{\ell} = dU}$$

cioè se la forma differenziale $\mathbf{V}\cdot d\vec{\ell}$ è esprimibile come il differenziale esatto di un campo scalare U(x,y,z).

TEOREMA 1

Se un campo vettoriale **V** è conservativo, L_ℓ non dipende dalla topologia del cammino ℓ, ma solo dagli estremi A e B.

Dimostrazione:

$$L_\ell = \int_{\ell\,A}^{B} \mathbf{V}\cdot d\vec{\ell} = \int_{\ell\,A}^{B} dU = U(B) - U(A)$$

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (3)

COROLLARIO

Se un campo vettoriale **V** è conservativo, la sua circuitazione lungo una qualunque linea chiusa *C* è nulla.

<u>Dimostrazione:</u>

Basta prendere un arbitrario punto P di *C*, e poi si procede come nella dimostrazione precedente, osservando che $\mathrm{A} \equiv \mathrm{B} \equiv \mathrm{P}$.

$$\oint_C \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_C \mathrm{dU} = \mathrm{U(P)} - \mathrm{U(P)} = 0$$

TEOREMA 2

Se un campo vettoriale **V** è conservativo, esiste un campo scalare U tale che risulti:

$$\boxed{\mathbf{V} = \nabla\, \mathrm{U}}$$

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (4)

<u>DIMOSTRAZIONE:</u>

$$\mathbf{V}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = V_{\mathrm{x}} dx + V_y dy + V_z dz$$

Applicando la definizione di campo conservativo, e ricordando che il differenziale totale di una funzione scalare U(x,y,z) è:

$$\mathrm{dU} = \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}}\right)\mathrm{dx} + \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}}\right)\mathrm{dy} + \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{z}}\right)\mathrm{dz}$$

si ha:

$$\mathrm{V_x dx} + \mathrm{V_y dy} + \mathrm{V_z dz} = \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}}\right)\mathrm{dx} + \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}}\right)\mathrm{dy} + \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{z}}\right)\mathrm{dz}$$

Perché tale uguaglianza sia verificata deve risultare, evidentemente:

$$\mathrm{V_x} = \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}}\right) \quad \mathrm{V_y} = \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}}\right) \quad \mathrm{V_z} = \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{z}}\right)$$

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (5)

e quindi:

$$\mathbf{V} = \nabla\, \mathrm{U}$$

Il campo scalare U detto ***potenziale*** del campo vettoriale **V**. Il teorema sopra enunciato esprime il fatto che ***se un campo è conservativo, allora esso ammette potenziale***.

Per quanto detto sopra, risulta sempre verificata la seguente proprietà:

$$\boxed{{}_{\ell}\int_{A}^{B} \nabla\, \mathrm{U} \cdot d\vec{\ell} = U(B) - U(A)}$$

e in particolare:

$$\boxed{\oint_{C} \nabla\, \mathrm{U} \cdot d\vec{\ell} = 0}$$

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (6)

Il potenziale è una grandezza definita a meno di una costante additiva arbitraria. Infatti, se k è uno scalare che non dipende da x, y, z, per definizione di gradiente risulta:

$$\nabla (U + k) = \nabla U$$

Tale arbitrarietà si elimina quando si calcola la differenza di potenziale fra 2 punti. Si è visto che se un campo è conservativo coincide con la differenza di potenziale fra i 2 punti A e B: se U e U’ sono due diversi potenziali per **V**, con U’ = U + c, si ha:

$$\int_A^B dU = U'(B) - U'(A) = U(B) + c - U'(A) - c = U(B) - U(A)$$

Le *superfici di livello* del potenziale U, cioè i punti dello spazio per i quali risulta:

$$U(x, y, z) = U_0 = \text{cost.}$$

sono dette superfici equipotenziali del campo vettoriale **V**.

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (7)

In ogni punto del campo, il vettore **V** è perpendicolare alla superficie equipotenziale che passa per quel punto. Infatti:

$$U = \cos t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{dU} = \mathbf{V} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

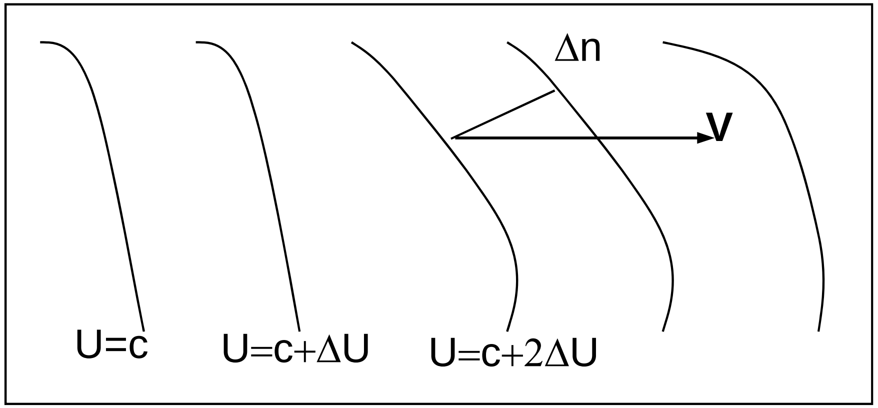
perciò o **V** è nullo o è perpendicolare al piano tangente alla superficie equipotenziale nel punto P. In altri termini, le linee di flusso sono sempre ortogonali, in ogni punto, alle superfici equipotenziali.

Risolvendo l'equazione differenziale scritta sopra si possono inoltre ricavare le equazioni delle superfici (o delle linee) equipotenziali.

– Esercizio Determinare sul piano xy l'espressione analitica delle linee equipotenziali del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme q_0 posta nell'origine, e verificare che tali linee sono sempre perpendicolari alle linee di flusso del campo **E**.

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (8)

Le linee equipotenziali sono un metodo alternativo alle linee vettoriali per la rappresentazione del campo: si disegnano un certo numero di superfici equipotenziali scelte in modo tale che il potenziale varii di una quantità *costante* ΔU passando da una superficie alla successiva.



Se Δn è la distanza tra 2 superfici successive, si può stimare il valore del vettore **V** come:

$$\mathbf{V} \cong \frac{\Delta U}{\Delta n}$$

Anche in questo caso, tanto minore è la distanza geometrica Δn tra 2 superfici successive, tanto maggiore è l'intensità del campo **V** in quella porzione di spazio.

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (9)

DEFINIZIONE: Un campo vettoriale **V** si dice ***irrotazionale*** se risulta, in ogni punto P di Ω:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{V} = 0}$$

TEOREMA 3

Se un campo vettoriale **V** è conservativo, esso è irrotazionale

$$\mathbf{V}\ \text{conservativo} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{V} = 0 \quad \text{per ogni punto } \mathrm{P} \in \Omega$$

<u>Dimostrazione</u>:

Dal teorema precedente, se **V** è esatto esiste un campo scalare U tale che . Per le note proprietà degli operatori differenziali, si ha sempre:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times \nabla\, \mathrm{U} \equiv 0 \qquad \forall\, \mathrm{P}$$

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (10)

Si può dimostrare il seguente :

TEOREMA 4

Se un campo vettoriale **V** definito su un dominio Ω *a connessione lineare semplice* è irrotazionale, esso è conservativo.

Il teorema sopra enunciato esprime il fatto che mentre un campo conservativo è necessariamente irrotazionale, l’implicazione contraria non è vera in generale, cioè esistono campi che sono irrotazionali ma non conservativi.

- Esempio. Il campo di Biot e Savart $\mathbf{V} = \frac{-y}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{i}}_x + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{i}}_y$, di cui si è già parlato, è ovviamente un esempio di campo irrotazionale ma non conservativo. Si e’ visto infatti che risulta $\nabla \times \mathbf{V} \equiv 0$, ma anche che la circuitazione di **V** è in generale una quantità non nulla, per cui tale campo non è conservativo.

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (12)

Nelle applicazioni che si vedranno nel seguito, le ipotesi di validità del teorema 4 possono ritenersi sempre verificate, pertanto d'ora in poi i termini irrotazionale e conservativo saranno considerati come sinonimi.

DEFINIZIONE:

Un campo vettoriale **V** si dice ***solenoidale*** in un dominio Ω se il suo flusso attraverso una arbitraria superficie *chiusa* S contenuta in Ω è nullo. In altri termini:

$$\boxed{\oiint_S \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS = 0}$$

TEOREMA 5

Un campo vettoriale **V** solenoidale in Ω soddisfa la seguente proprietà:

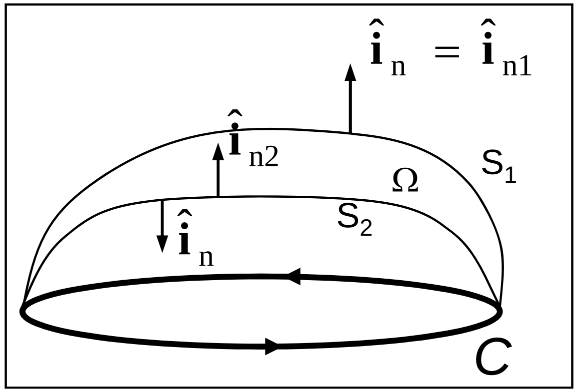
$$\iint_{S_1} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS = \iint_{S_2} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS$$

per ogni coppia di superfici S_1 e S_2 contenute in Ω e con il medesimo contorno *C*.

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (13)

Dimostrazione:

Si considerino due superfici S_1 ed S_2 aventi per contorno la medesima linea. L'unione delle 2 superfici S_1 ed S_2 costituisce una superficie chiusa, che racchiude il volume Ω.



Essendo il campo **V** solenoidale, si ha:

$$\oiint_{S_1+S_2} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS = 0$$

La normale alla superficie chiusa $S_1 + S_2$ usata per calcolare il flusso è sempre diretta verso l'esterno, ma in questo modo, lungo S_2, $\hat{\mathbf{i}}_n$ è diretta in senso opposto rispetto alla normale di S_2 (regola della vite). Si ha quindi:

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (13)

$$\oiint_{S_1+S_2} \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_n \, dS = \iint_{S_1} \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{n1} \, dS - \iint_{S_2} \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{n2} \, dS = 0$$

e infine:

$$\iint_{S_1} \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{n1} \, dS = \iint_{S_2} \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{n2} \, dS$$

cioè:

$$\Psi_{S1} = \Psi_{S2} = \Psi$$

dove con Ψ si è indicato il *flusso concatenato* con la linea *C*.

Il teorema 5 esprime il fatto che il flusso di un campo solenoidale attraverso una superficie aperta dipende solo dal suo contorno *C*, e non dalla topologia della superficie stessa. Il flusso di un campo solenoidale attraverso una superficie aperta di orlo *C* viene anche detto *flusso concatenato* con la linea chiusa *C*.

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (14)

- Si osservi l'analogia fra campi conservativi e campi solenoidali: in un campo conservativo, l'integrale di linea non dipende dalla forma della linea, ma solo dai suoi estremi; in un campo solenoidale, il flusso attraverso una superficie non dipende dalla forma della superficie, ma solo dal suo contorno…

Si può dimostrare il seguente

TEOREMA 6

Se un campo vettoriale **V** definito in un dominio Ω è solenoidale, allora esiste un campo vettoriale **G** definito nello stesso dominio tale che:

$$\iint_{S_C} \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{n}}\, dS = \oint_{C} \mathbf{G}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{\ell}\, d\ell$$

dove C è una qualsiasi linea chiusa contenuta in Ω e S_C è una qualsiasi superficie contenuta in Ω che abbia per contorno C.

Il campo **G** che compare nel teorema 6 viene detto ***potenziale vettore*** associato al campo **V**.

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (15)

COROLLARIO:

Un campo vettoriale **V** è solenoidale se e solo se esso è esprimibile come il rotazionale di un potenziale vettore **G**, cioè in modo tale che risulti:

$$\boxed{\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{G}}$$

<u>Dimostrazione</u>:

Applicando il teorema di Stokes all'equazione formulata nel teorema 2 si ottiene:

$$\iint_{S_C} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS = \oint_C \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell d\ell = \iint_{S_C} \nabla \times \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS$$

e quindi, poiché per ipotesi la superficie concatenata S_C è arbitraria, il primo ed il terzo integrale coincidono se e solo risulta $\mathbf{V} \equiv \nabla \times \mathbf{G}$ in ogni punto P del dominio Ω.

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (16)

Si osservi che il potenziale vettore **G** è definito a meno del gradiente di un campo scalare ψ qualsiasi, essendo, per le proprietà degli operatori differenziali:

$$\nabla \times (\mathbf{G} + \nabla \psi) = \nabla \times \mathbf{G} + \nabla \times \nabla \psi = \nabla \times \mathbf{G}$$

Pertanto, comunemente si effettua una opportuna scelta (gauge) del campo vettoriale **G** (e quindi del campo scalare ψ), al fine di eliminare tale arbitrarietà. Tale scelta non ha alcuna influenza, chiaramente, sul campo vettoriale solenoidale **V**.

DEFINIZIONE: Un campo vettoriale **V** si dice ***indivergente*** se risulta, in ogni punto P di Ω:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{V} = 0}$$

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (17)

TEOREMA 7

Se un campo vettoriale **V** è solenoidale, esso è indivergente. In formule:

$$\mathbf{V} \text{ solenoidale} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{per ogni punto } \mathrm{P} \in \Omega$$

<u>Dimostrazione</u>:

Applicando il teorema precedente e ricordando le proprietà degli operatori differenziali si ha:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{G} \equiv 0$$

Si può dimostrare il seguente :

TEOREMA 8

Se un campo vettoriale **V** definito su un dominio Ω *a connessione superficiale semplice* è indivergente, esso è solenoidale.

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (18)

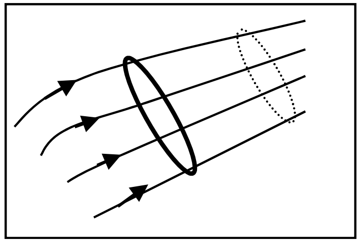
Il teorema 8 esprime il fatto che mentre un campo solenoidale è necessariamente indivergente, l'implicazione contraria non è vera in generale, cioè esistono campi che sono indivergenti ma non solenoidali.

Nelle applicazioni che si vedranno nel seguito, le ipotesi di validità di questo teorema possono ritenersi sempre verificate, pertanto d'ora in poi i termini *indivergente* e *solenoidale* saranno considerati come sinonimi.

I campi solenoidali godono di alcune importanti proprietà.

Proprietà 1

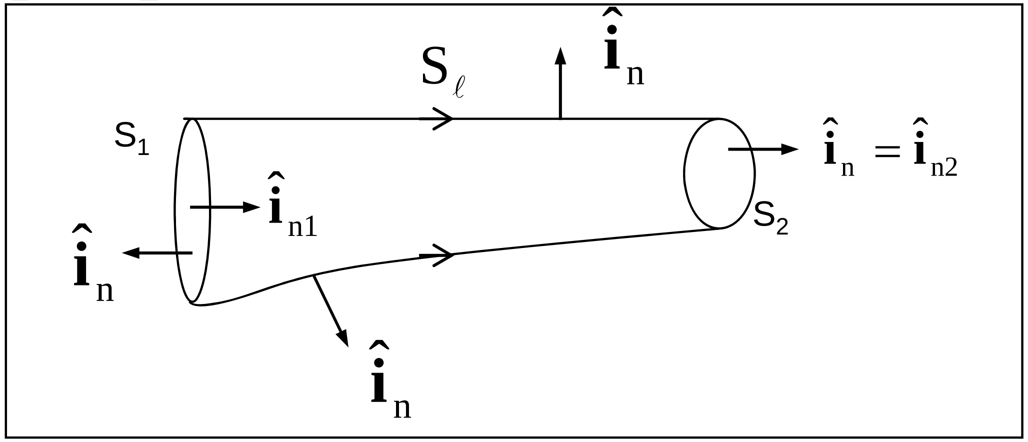
Il flusso di un campo solenoidale attraverso una generica sezione di un tubo di flusso è ***costante***, al variare della sezione stessa.



Campi vettoriali conservativi e solenoidali (19)

Dimostrazione:

Si consideri una porzione di tubo di flusso delimitata da due linee chiuse C_1 e C_2. Siano S_1 ed S_2 le superfici piane aventi per contorno rispettivamente C_1 e C_2.



Si consideri ora la superficie chiusa formata da S_1, S_2 e dalla superficie laterale S_ℓ della porzione di tubo di flusso. Risulta:

$$\oiint_{S_1+S_2+S_\ell} \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_n\, dS = \iint_{S_1} \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_n dS + \iint_{S_2} \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_n dS + \iint_{S_\ell} \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_n dS = 0$$

Campi vettoriali conservativi e sinusoidali (20)

Il flusso attraverso S_ℓ è evidentemente nullo, poiché il campo non può avere componenti in direzione normale alle linee di flusso. La normale alla superficie chiusa si trova ad essere discorde, lungo S_1, con il verso positivo della normale ad S_1 stabilito dall'orientazione delle linee vettoriali. Si ha dunque:

$$-\iint_{S_1} \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{n1}\mathrm{dS} + \iint_{S_2} \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_{n2}\mathrm{dS} = 0$$

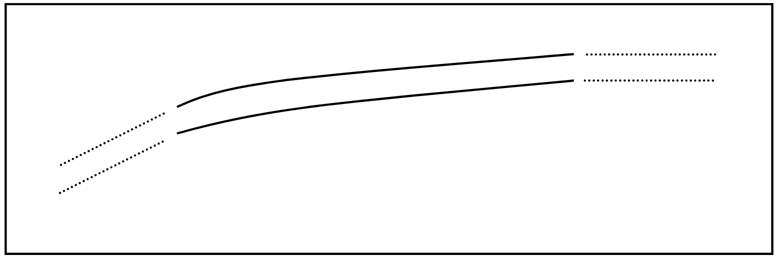
e quindi:

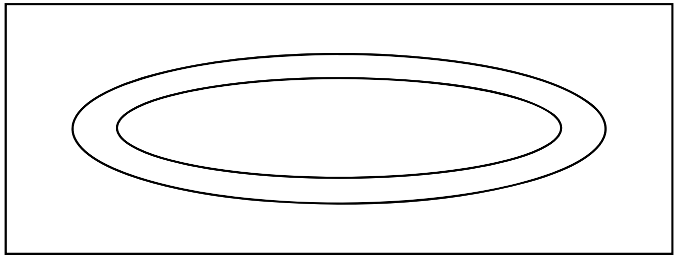
$$\Psi_{S1} = \Psi_{S2} = \Psi$$

<u>Proprietà 2</u>

<u>I tubi di flusso di un campo solenoidale non possono avere un inizio e una fine, nella porzione di spazio in cui è definito il campo: ***o si estendono indefinitamente, oppure sono chiusi***</u>.

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (21)

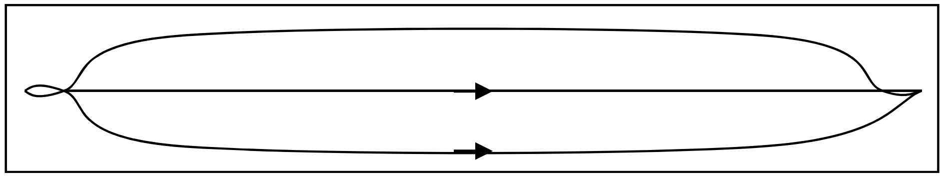




Spesso si dice solamente che i tubi di flusso del campo solenoidale sono chiusi, classificando il caso di tubi estesi indefinitamente come caso degenere (tubi che "si chiudono all'infinito").

Dimostrazione (per assurdo):

Se i tubi di flusso avessero un inizio e una fine, essi dovrebbero "chiudersi" in un punto (cioè una sorgente o un pozzo), nelle sezioni di inizio e di fine. Attraverso le sezioni di inizio e fine, il flusso di **V** risulterebbe perciò nullo.



Campi vettoriali conservativi e solenoidali (22)

Ma per la proprietà 1 dimostrata prima, dovrebbe essere anche:

$$\Psi_i = \Psi_e = \Psi = 0$$

e quindi il flusso del campo vettoriale sarebbe nullo su ogni sezione, il che è assurdo, per come è definito il tubo di flusso.

- Senza ricorrere al concetto di tubo di flusso, a volte si dice semplicemente che "*le linee di flusso del campo solenoidale sono chiuse*" (non vi sono, cioè, né sorgenti né pozzi).

Proprietà 3

Poiché il campo solenoidale ha necessariamente un potenziale vettore, se S_i è una generica sezione del tubo di flusso si ottiene, applicando il teorema di Stokes:

$$\iint_{S_i} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \mathrm{d}S = \iint_{S_i} \nabla \times \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \mathrm{d}S = \oint_{\ell_i} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

cioè il flusso di **V** attraverso un tubo di flusso è uguale alla circuitazione del relativo potenziale vettore lungo una linea che "avvolge" il tubo di flusso.

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (23)

CAMPI CONSERVATIVI E CAMPI SOLENOIDALI: SCHEMA RIASSUNTIVO

Campi conservativi	Campi solenoidali
$\nabla \times \mathbf{V} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$
L'integrale di **V** lungo una curva aperta dipende solo dagli estremi di integrazione. $\int_{\gamma\,A}^{B} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell d\ell = \mathrm{U(B)} - \mathrm{U(A)}$	Il flusso di **V** attraverso una superficie aperta dipende solo dal contorno della superficie. $\int_{S_{1\gamma}} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n} dS = \int_{S_{2\gamma}} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n} dS$
La circuitazione di **V** lungo una curva chiusa è nulla. $\oint_\gamma \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell d\ell = 0$	Il flusso di **V** attraverso una superficie chiusa è nullo. $\oiint_S \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{n}\, dS = 0$
$\mathbf{V} = \nabla U$	$\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{G}$
La funzione U è un potenziale scalare definito a meno di una costante: $U = U^* + \mathrm{cost.}$ cioè a meno di una funzione a gradiente nullo.	La funzione **G** è un potenziale vettore definito a meno di un gradiente: $\mathbf{G} = \mathbf{G}^* + \nabla \psi$ cioè a meno di una funzione a rotore nullo.
U viene determinato in ogni punto fissando ad arbitrio il suo valore in un punto di riferimento arbitrario.	**G** viene determinato in ogni punto imponendo una opportuna condizione di compatibilità (gauge), ad esempio $\nabla \psi = 0$ o $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$.

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (24)

DEFINIZIONE:

Un campo vettoriale che sia contemporaneamente conservativo e solenoidale si dirà *armonico*. Il potenziale Φ di un campo armonico deve soddisfare l'equazione di Laplace scalare:

$$\boxed{\nabla^2 U = 0}$$

Infatti, essendo il campo conservativo, deve essere $\mathbf{V} = \nabla U$; ma **V** è anche solenoidale, perciò risulta:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \nabla U = \nabla^2 U = 0$$

Campi vettoriali conservativi e solenoidali (25)

Inoltre, essendo il campo **V** anche solenoidale, esso può essere espresso come rotazionale di un potenziale vettore **G**; ma **V** è anche conservativo e quindi irrotazionale, perciò risulta:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) = -\nabla^2 \mathbf{G} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{G}) = 0$$

avendo sfruttato la ben nota relazione differenziale:

$$\nabla \times (\nabla \times [\ ]) = -\nabla^2 [\ ] + \nabla(\nabla \cdot [\ ])$$

Poiché **G** è determinato a meno di un gradiente, è possibile scegliere un potenziale vettore che soddisfi la condizione (scelta di Coulomb):

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$$

Operando tale scelta, si ha che il potenziale vettore di un campo armonico soddisfa *l'equazione di Laplace vettoriale*:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{G} = 0}$$