

---

# Capitolo 9

---

## FONDAMENTI DI TEORIA DELLE ANTENNE

### 9.1 L'elemento di corrente elettrica

Si definisce elemento di corrente elettrica una densità di corrente impressa che sia costante e concentrata in una porzione di volume infinitesima (in pratica molto piccola rispetto a  $\lambda$ ). Ciò consente di eliminare l'integrazione nella (8.17) e scrivere semplicemente che (con  $jk = \sigma$ ):

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \mathbf{M} \frac{e^{-\sigma r}}{r} \quad (9.1)$$

con  $\mathbf{M} = \mathbf{J} dV$  per corrente volumetrica

con  $\mathbf{M} = \mathbf{J}_s dS$  per corrente superficiale

con  $\mathbf{M} = \mathbf{I} d\ell$  per corrente lineare

Valendo il principio di sovrapposizione degli effetti non si perde generalità nel supporre  $\mathbf{M}$  reale e diretto secondo  $\mathbf{i}_z$ . Si ha allora:

$$\mathbf{A} = A_z \mathbf{i}_z = \frac{\mu}{4\pi} M \mathbf{i}_z \frac{e^{-\sigma r}}{r} \quad (9.2)$$

Grazie ad una identità vettoriale si ha:

$$\nabla \times (A_z \mathbf{i}_z) = A_z \nabla \times \mathbf{i}_z + \nabla A_z \times \mathbf{i}_z$$

Ma  $\nabla \times \mathbf{i}_z \equiv 0$  ed inoltre:

$$\nabla A_z = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-\sigma r}}{r} \right) \mathbf{i}_r M = -\frac{\mu}{4\pi} M \left( \sigma + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-\sigma r}}{r} \mathbf{i}_r \quad (9.3)$$

Poichè tra i versori cartesiani e quelli sferici si ha la relazione:

$$\mathbf{i}_z = \cos \vartheta \mathbf{i}_r - \sin \vartheta \mathbf{i}_\vartheta$$

mentre  $\mathbf{i}_r \times \mathbf{i}_\vartheta = \mathbf{i}_\varphi$ , si ha:

$$\mathbf{H} = \frac{M}{4\pi} \left( \sigma + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-\sigma r}}{r} \sin \vartheta \mathbf{i}_\varphi = H_\varphi \mathbf{i}_\varphi \quad (9.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\nabla \times \mathbf{H}}{j\omega\epsilon_c} = \frac{1}{j\omega\epsilon_c} \left\{ \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta H_\varphi)}{\partial \vartheta} \mathbf{i}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} \mathbf{i}_\vartheta \right\} \\ &= \frac{1}{j\omega\epsilon_c} \frac{M}{2\pi} \left( \sigma + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-\sigma r}}{r^2} \cos \vartheta \mathbf{i}_r + \frac{1}{j\omega\epsilon_c} \frac{M}{4\pi} \left( \sigma^2 + \frac{\sigma}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \frac{e^{-\sigma r}}{r} \sin \vartheta \mathbf{i}_\vartheta = \\ &= E_r \mathbf{i}_r + E_\vartheta \mathbf{i}_\vartheta \end{aligned} \quad (9.5)$$

Con conducibilità del mezzo diverso da zero anche se piccola si ha il soddisfacimento delle condizioni di regolarità necessarie per l'unicità; ponendo  $\sigma = j\beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} = j2\pi/\lambda$  si hanno le espressioni per il mezzo senza perdite che sono più adatte per i ragionamenti successivi. Si possono ottenere espressioni approssimate del campo vicino ( $r \ll \lambda$ ) e lontano ( $r \gg \lambda$ ). Trattandosi di grandezze complesse, l'approssimazione andrebbe fatta separatamente per modulo e fase: procedendo direttamente con la conservazione dei soli termini dominanti si arriva comunque ad espressioni valide per approssimare i moduli dei campi e per individuare le direzioni dei vettori che li rappresentano. In conclusione si ha:

$$r \ll \lambda$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &\approx \frac{M}{4\pi r^2} \sin \vartheta \mathbf{i}_\varphi \\ \mathbf{E} &\approx -j\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{M\lambda}{4\pi^2 r^3} \cos \vartheta \mathbf{i}_r - j\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{M\lambda}{8\pi^2 r^3} \sin \vartheta \mathbf{i}_\vartheta \end{aligned} \quad (9.6)$$

$$r \gg \lambda$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &\approx j \frac{M}{2\lambda} \operatorname{sen} \vartheta \frac{e^{-j\beta r}}{r} \mathbf{i}_\varphi \\ \mathbf{E} &\approx +j \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{M}{2\lambda} \operatorname{sen} \vartheta \frac{e^{-j\beta r}}{r} \mathbf{i}_\vartheta \end{aligned} \quad (9.7)$$

Si può dimostrare che queste ultime espressioni valgono:

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{i}_r \times \mathbf{A} \times \mathbf{i}_r \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{i}_r \times \mathbf{E}}{\eta} \quad (9.8)$$

Sempre in assenza di perdite è utile calcolare il flusso del vettore di Poynting a partire dalle espressioni esatte attraverso una sfera di raggio  $r$  spiccata dall'origine, quindi con normale diretta secondo  $\mathbf{i}_r$ .

$$\begin{aligned} P_s + jQ_s &= \iint_S \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \cdot \mathbf{i}_r dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{E_\vartheta H_\varphi^*}{2} r^2 \operatorname{sen} \vartheta d\vartheta d\varphi = \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\pi}{3} \left(\frac{M}{\lambda}\right)^2 \left(1 - j \frac{\lambda^3}{8\pi^3 r^3}\right) \end{aligned} \quad (9.9)$$

Si ha  $P_s$  positiva (l'elemento fornisce potenza) e non dipendente da  $r$  (mezzo senza perdite);  $Q_s$  è invece fortemente decrescente con  $r$  (va con  $r^{-3}$ ). Riguardo a  $P_s$ , contano solo  $H_\varphi$  ed  $E_\vartheta$  e di questi solo gli addendi che danno prodotti in fase: in pratica solo i termini che abbiamo determinato come dominanti per  $r \gg \lambda$  danno contributo diverso da zero, poichè i restanti si elidono. Nel loro insieme quindi quei termini sono detti **campo radiativo**: in generale il campo radiativo è quello responsabile della potenza attiva che attraversa una sfera di raggio qualunque in un mezzo senza perdite. Si vedrà che comunque questo campo è calcolabile, sotto certe approssimazioni largamente verificate, attraverso le (9.7) anche per sorgenti qualunque. Si deve comunque fare attenzione, quando si calcola  $P_s$ , ad utilizzare le espressioni corrette. In particolare non è possibile utilizzare le espressioni per  $r \ll \lambda$  che difatti fornirebbe  $P_s = 0$ .

Per avere un'idea quantitativa, a 50 Hz, se  $r \ll \lambda$  significa, ad es.,  $r < 10^{-3} \lambda$ , si può arrivare con le espressioni approssimate fino a 6 km. Perciò a basse frequenze bastano questi campi. Si noti che sempre a 6 km,  $H$  è dell'ordine di  $10^{-9}$  il valore di  $M$ ; ciò mostra la scarsa estensione del campo elettromagnetico a bassa frequenza.

## 9.2 Momento equivalente di una antenna

Si sia in  $V_\infty$  in presenza di sole correnti impresse  $\mathbf{J}_i$ . Il problema della determinazione di  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  si risolve calcolando:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \mathbf{J}_i(\mathbf{r}') \frac{e^{-\sigma|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \quad (9.10)$$

L'intuizione suggerisce che per  $r \gg \lambda$  il campo generato da una qualunque sorgente possa considerarsi sotto forma di onda sferica proveniente dall'origine. Per verificare ciò si consideri il rapporto:

$$\frac{\frac{e^{-\sigma|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{\frac{e^{-\sigma r}}{r}} = \frac{r}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{-\sigma(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-r)}$$

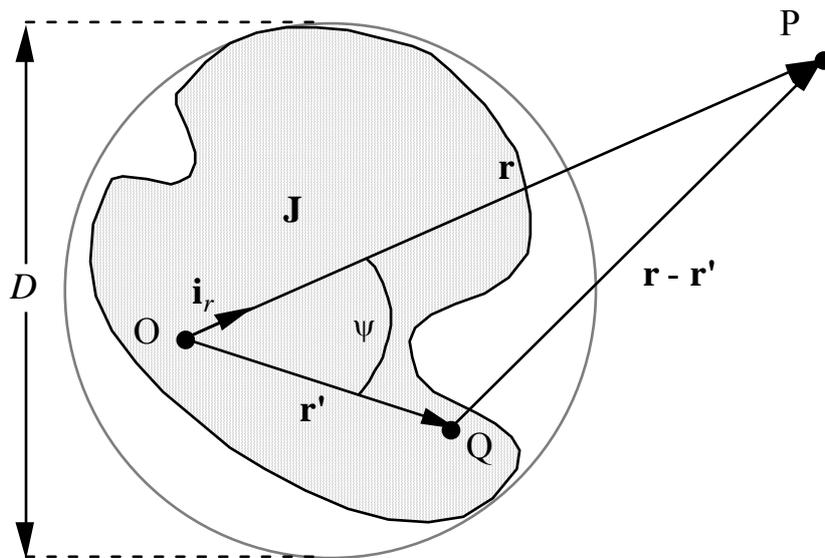


Figura 9.1 - Calcolo del momento equivalente di una sorgente

e si sostituisca per modulo e fase di questo rapporto le rispettive espressioni asintotiche per  $r \gg r'$ . Per il modulo è immediato verificare che tende ad 1. Per la fase si tende ad un valore asintotico (mai trascurabile in generale dato l'andamento di questo) che vale:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r - r' \cos \psi = r - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{i}_r$$

confondendo la differenza con la proiezione di  $\mathbf{r}'$  su  $\mathbf{i}_r$ .

Matematicamente il risultato si ottiene con il teorema di Carnot:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos \psi}$$

sviluppando e conservando il termine al 1° ordine in  $\frac{r'}{r}$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{2r'}{r} \cos \psi} \approx r \left(1 - \frac{r'}{r} \cos \psi + 0 \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)$$

con  $0 \left(\frac{r'}{r}\right)^2$  infinitesimi di ordine superiore o uguale a 2 per  $\left(\frac{r'}{r}\right) \rightarrow 0$ .

Questi sono trascurabili se:

$$e^{-\sigma r O\left(\frac{r'}{r}\right)^2} \cong 1 - \sigma r O\left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \dots \cong 1$$

Esaminando il caso senza perdite deve essere:

$$\frac{2\pi r'^2}{r\lambda} \ll 1$$

cioè  $r\lambda \gg r'^2$  (che per  $r'$  grandi è un pò più restrittiva della semplice  $r \gg r'$ ).



Per fare le approssimazioni bisogna paragonare la distanza dal punto di osservazione all'estensione della sorgente, definita come il diametro  $D$  della più piccola sfera che contiene la sorgente stessa (vedi Figura 9.1). Ponendo l'origine del sistema di riferimento al centro della sfera, la distanza è grande se  $r \gg D$ . La condizione  $r \gg D$  implica  $r'/r \ll 1$ ; pertanto, in base alla precedente espressione di  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , si possono fare le seguenti approssimazioni:

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} \tag{9.11a}$$

$$e^{-jkR} \approx e^{-jkr} e^{+jkr' \cos \chi} \tag{9.11b}$$

nell'esponenziale infatti non è lecito trascurare il termine  $r' \cos \chi$ , perché la quantità  $kr' \cos \chi = r' \cos \chi 2\pi/\lambda$  (da cui dipende la fase dei contributi dei vari elementi di sorgente) non tende a zero al crescere di  $r$ . L'approssimazione (9.11a) richiede

soltanto che la distanza sia sufficientemente grande rispetto all'estensione della sorgente. Siccome l'errore che si compie nel porre  $R \approx r$  non supera  $D/2$ , l'approssimazione è migliore del 5% se:

$$r > 10 D \quad (9.12)$$

L'errore di fase  $\Delta$  che si compie nell'approssimazione (9.11b) varia al variare di  $\chi$ ; calcolandone il massimo al variare di  $\chi$ , si trova:

$$\Delta_{\max} = k \frac{r'^2}{2r} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{r'^2}{2r} \leq \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{2r} = \frac{\pi D^2}{4\lambda r}$$

Assumendo che sia ammissibile un errore di fase massimo di  $\pi/8$ , si deduce che l'approssimazione (9.11b) diviene accettabile se:

$$r > \frac{2D^2}{\lambda} \quad (9.13)$$

Se la (9.12) e (9.13) sono entrambe verificate, nella (9.10) (si veda anche le (8.29)-(8.30)) si può porre:

$$\frac{e^{-jkR}}{R} \approx \frac{e^{-jkr}}{r} e^{jk r' \cos \chi} = \frac{e^{-jkr}}{r} e^{jk \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{r}'}$$

dove  $\mathbf{i}_r$  è il versore radiale nella direzione del punto di osservazione (vedi Figura 9.1).

Con tutte le ipotesi fatte comunque si ha:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-\sigma r}}{r} \mathbf{M}(\vartheta, \psi) \quad (r > 10 D ; r > \frac{2D^2}{\lambda}) \quad (9.14)$$

con:

$$\mathbf{M}(\vartheta, \psi) = \iiint_V \mathbf{J}_i(\mathbf{r}') e^{\sigma(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{i}_r)} dV' = \iiint_V \mathbf{J}_i(\mathbf{r}') e^{j\beta r' \cos \psi} dV' \quad (9.15)$$

detto **momento equivalente della sorgente** (oppure **vettore di radiazione**), che non è più funzione di  $r$ , ma dipende solamente dalla direzione in cui è posto il punto di osservazione (individuata dalle coordinate angolari  $\vartheta, \varphi$ ). A grande distanza la sorgente è vista come puntiforme, concentrata nell'origine e con caratteristiche di

radiazione angolari fissate da  $\mathbf{M}$ . Si noti anche che  $\mathbf{M}$  dipende da dove si è scelta l'origine: cambiando questa cambia  $\mathbf{M}$ , principalmente a causa della necessità di raggustare le fasi. Si ricordi anche che  $\mathbf{M}$  è in generale complesso.

E' immediato constatare che la espressione di  $\mathbf{A}$  che si è ottenuta è una generalizzazione del caso già esaminato dell'elemento di corrente. Ora è opportuno esaminare se si ottengono, in tale versione, le medesime espressioni per il campo a grande distanza, cioè le (9.7). Si noti intanto che:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla_P \times \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \nabla_P \left( \frac{e^{-\sigma r}}{r} \right) \times \mathbf{M} + \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\sigma r}}{r} (\nabla_P \times \mathbf{M}) \quad (9.16)$$

Per il primo termine si ha immediatamente:

$$\nabla_P \left( \frac{e^{-\sigma r}}{r} \right) = \left( -\sigma - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-\sigma r}}{r} \mathbf{i}_r$$

da cui immediatamente si evince come dominante il primo termine, purché risulti

$$|\sigma| \gg \frac{1}{r} \Rightarrow \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \gg \frac{1}{r}$$

e quindi:  $r \gg \lambda$  (avendo fatto, per semplicità, l'assunzione di mezzo privo di perdite, cioè  $\alpha=0$ ).

Per quanto riguarda il secondo termine, osservando l'espressione del rotazionale di  $\mathbf{M}$  espresso in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{M}(\vartheta, \phi) &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (M_\phi \sin \vartheta) - \frac{\partial M_\vartheta}{\partial \phi} \right] \mathbf{i}_r + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial M_r}{\partial \phi} - M_\phi \sin \vartheta \right] \mathbf{i}_\vartheta + \\ &+ \frac{1}{r} \left[ M_\vartheta - \frac{\partial M_r}{\partial \vartheta} \right] \mathbf{i}_\phi \end{aligned}$$

si nota che, essendo le componenti di  $\mathbf{M}$  funzioni delle sole coordinate angolari,  $\nabla \times \mathbf{M}$  risulta proporzionale a  $1/r$ . Ne segue che il rapporto fra il secondo termine ed il primo termine a secondo membro della (9.16), che sono inversamente proporzionali, rispettivamente, a  $r^2$  e a  $\lambda r$ , risulta proporzionale a  $\lambda/r$ . Pertanto, il secondo termine può essere trascurato a patto che risulti  $\lambda/r \ll 1$ , e cioè, ancora una volta,  $r \gg \lambda$ . Il risultato allora è:

$$\mathbf{H} = -\frac{\sigma}{4\pi} \mathbf{i}_r \times \mathbf{M} \frac{e^{-\sigma r}}{r}$$

che nel caso senza perdite fornisce:

$$\mathbf{H} = -\frac{jk}{4\pi} \mathbf{i}_r \times \mathbf{M} \frac{e^{-jkr}}{r} = -\frac{jk}{\mu} \mathbf{i}_r \times \mathbf{A} \quad (9.17)$$

che corrisponde ad una delle (9.8). La seconda relazione può essere anch'essa dimostrata direttamente, per sostituzione nelle equazioni di Maxwell e fornisce ( $\eta$  è l'impedenza intrinseca del mezzo):

$$\mathbf{E} = \eta \mathbf{H} \times \mathbf{i}_r = -\frac{jk}{4\pi} \eta \mathbf{i}_r \times \mathbf{M} \times \mathbf{i}_r \frac{e^{-jkr}}{r} = -\frac{jk}{\mu} \eta \mathbf{i}_r \times \mathbf{A} \times \mathbf{i}_r \quad (9.18)$$

Si nota ora come l'ultimo membro della (9.18) coincida con la prima delle (9.8) in quanto:

$$-\frac{jk}{\mu} \eta = -j \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = -j \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = -j 2\pi \frac{c}{\lambda} = -j 2\pi f = -j\omega$$

Risulta comunque ormai intuitivo che il campo a grande distanza, o radiativo, può essere espresso attraverso le (9.8), con la generalizzazione di  $\mathbf{M}$  stabilita precedentemente. Si ricordi che per utilizzare compiutamente le espressioni si deve avere contemporaneamente  $r\lambda \gg D$  con  $D$  massima dimensione lineare dell'antenna (si veda la Figura 9.1) e  $r \gg \lambda$ .

Prima di concludere, si può osservare che quanto detto per un  $\mathbf{M} = \mathbf{I} d\ell$  vale anche per alcune delle cosiddette antenne a dipolo: in effetti se  $d\ell$  è un  $\Delta\ell$  finito, quanto determinato vale per una antenna filiforme sulla quale la corrente sia costante nell'elemento  $\Delta\ell$  (se  $\mathbf{I}$  è in direzione dell'asse  $z$ , in un elemento di linea disposto lungo tale asse). Per ciò è necessario che  $\Delta\ell$  sia molto piccolo rispetto a  $\lambda$  (antenna corta) e che vi siano agli estremi due serbatoi di carica elettrica, con valori  $Q = I/j\omega$  per la equazione di continuità applicata ad una superficie chiusa che separi a metà  $\Delta\ell$ , lasciando i due serbatoi di carica l'uno dentro e l'altro fuori.

La determinazione di  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  può risultare facilitata se il gradiente, il rotore e la divergenza sono calcolati in un sistema di coordinate sferiche. In tale sistema,  $\mathbf{M}$  è funzione delle sole coordinate  $\vartheta$  e  $\varphi$  del punto di osservazione e le componenti di  $\mathbf{A}$  sono:

$$A_r = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} M_r(\vartheta, \varphi) \quad (9.19a)$$

$$A_{\vartheta} = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} M_{\vartheta}(\vartheta, \varphi) \quad (9.19b)$$

$$A_{\varphi} = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} M_{\varphi}(\vartheta, \varphi) \quad (9.19c)$$

Mediante le espressioni del gradiente, del rotore e della divergenza in un sistema di coordinate sferiche, si trova che le componenti in coordinate sferiche di  $\mathbf{E}$  e di  $\mathbf{H}$  consistono nella somma di termini proporzionali a  $1/\lambda r$ ,  $1/r^2$  e  $\lambda/r^3$ . Qualora la distanza  $r$ , oltre a verificare le precedenti ineguaglianze, è anche molto maggiore di  $\lambda$ , per esempio:

$$r > 10 \lambda \quad (9.20)$$

i termini proporzionali a  $1/\lambda r$  dominano sugli altri ed in definitiva si ha:

$$\mathbf{E} \approx -j\eta \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \left( M_{\vartheta}(\vartheta, \varphi) \mathbf{i}_{\vartheta} + M_{\varphi}(\vartheta, \varphi) \mathbf{i}_{\varphi} \right) \quad (9.21a)$$

$$\mathbf{H} \approx -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} \left( -M_{\varphi}(\vartheta, \varphi) \mathbf{i}_{\vartheta} + M_{\vartheta}(\vartheta, \varphi) \mathbf{i}_{\varphi} \right) \quad (9.21b)$$

dove sono presenti solo i termini dominanti e  $\eta$  è l'impedenza intrinseca del mezzo.

I vincoli imposti alla distanza dalle tre disuguaglianze (9.12), (9.13), (9.20) possono venire ben evidenziati tramite il diagramma logaritmico di Figura 9.2, in cui sono riportate le rette corrispondenti (ciascuna delle condizioni è verificata nella regione al di sopra di una di queste rette):

$$r = 10 D, \quad r = 2 D^2/\lambda, \quad r = 10 \lambda \quad (9.22)$$

Si possono distinguere le seguenti zone:

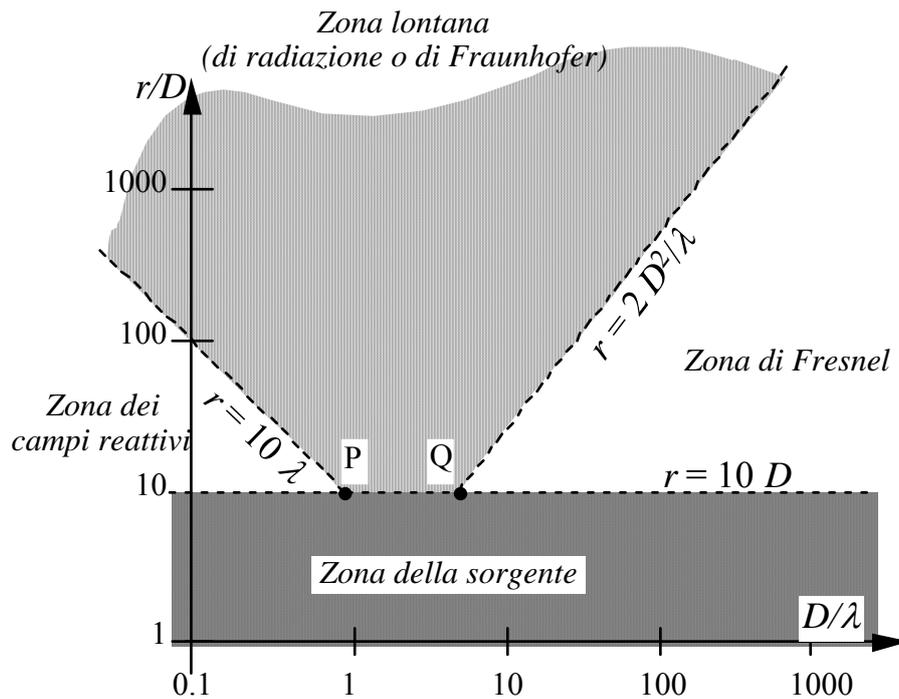


Figura 9.2

#### ZONA LONTANA (O DI RADIAZIONE O DI FRAUNHOFER)

E' la zona in cui sono verificate le tre condizioni (9.22). Tale zona è individuata dalla regione ombreggiata superiore. Si nota che il valore di  $D$  che segna l'inizio della zona lontana dipende dal valore del rapporto  $D/\lambda$ . Quando la sorgente è grande rispetto alla lunghezza d'onda, la zona lontana inizia a distanze che possono essere molto maggiori di  $10D$ . Il calcolo del campo nella zona lontana è abbastanza semplice, richiedendo solo la determinazione di  $\mathbf{M}$  e l'uso delle formule (9.21). Il campo nella zona lontana si chiama **campo lontano** ovvero **campo di radiazione**. Il campo nella zona rimanente viene detto **campo vicino**.

#### ZONA DI FRESNEL

E' la zona in cui sono verificate le condizioni  $r > 10D$ ,  $r > 10\lambda$ , ma non è verificata la condizione  $r > 2D^2/\lambda$ . Tale zona cessa di esistere alla sinistra del punto Q, la cui ascissa è  $D/\lambda = 5$ . Quindi la zona di Fresnel esiste solo nel caso di sorgenti estese più di alcune lunghezze d'onda. In questa categoria rientrano quasi sempre le sorgenti ottiche e la maggior parte delle antenne a microonde e a onde millimetriche. Nella zona di Fresnel è lecita l'approssimazione (9.11a), ma non (9.11b); pertanto nell'approssimare la funzione  $\exp(-jk r)$ , è necessario tenere in conto un ulteriore termine dello sviluppo di  $R$ ,  $\exp[-jk (r' \sin\chi)^2/2r]$ . Poichè la fase è funzione sia di  $r$

che di  $r'$ , nella zona di Fresnel non è possibile esplicitare la dipendenza da  $r$  attraverso il fattore  $\exp(-jk r)/r$ .

#### ZONA DEI CAMPI REATTIVI

E' la zona in cui vale la condizione  $r > 10 D$ , mentre non è verificata la condizione  $r > 10 \lambda$ . (zona chiara alla sinistra del punto P). Tale zona esiste solo nel caso di sorgenti più piccole della lunghezza d'onda, e si estende da  $10 D$  a  $10 \lambda$ . Nella zona dei campi reattivi è lecito approssimare il potenziale mediante la (9.14), ma non è possibile utilizzare le (9.21). Il nome attribuito a questa zona verrà giustificato più avanti.

#### ZONA DELLA SORGENTE

E' la zona in cui non è verificata la condizione  $r > 10 D$ . In questa zona nessuna approssimazione è possibile ed il calcolo analitico del potenziale e del campo diviene in genere un'impresa disperata. E' necessario procedere numericamente con l'ausilio di un calcolatore.

### 9.3 Grandezze caratteristiche della radiazione in un mezzo omogeneo senza perdite

Si rammenta che, verificandosi contemporaneamente:

$$r \gg D \qquad r \gg \lambda$$

il campo a grande distanza può calcolarsi a partire dal potenziale vettore e dal momento equivalente:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-\sigma r}}{r} \mathbf{M}(\vartheta, \psi)$$

$$\mathbf{M}(\vartheta, \psi) = \iiint_V \mathbf{J}_i(\mathbf{r}') e^{-\sigma(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{i}_r)} dV'$$

valide per valutazioni in  $V_\infty$  sede di dielettrico omogeneo. Evidenziando che in presenza di perdite per ogni componente di campo si deve considerare un ulteriore fattore del tipo  $e^{-\alpha r}$ , nel seguito si supporrà il mezzo senza perdite.

In un mezzo senza perdite, il campo lontano è dato dalle (9.21). Se si escludono certe distribuzioni di sorgente del tutto eccezionali (per le quali  $M_\vartheta$  e  $M_\varphi$  sono nulli) il campo lontano differisce da zero e, al crescere della distanza, decresce come  $1/r$ . Inoltre  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  sono trasversali rispetto al versore radiale  $\mathbf{i}_r$ , con approssimazione tanto migliore quanto maggiore è la distanza. Considerando una componente del campo, ad esempio

$$E_\vartheta \approx -j\eta \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} M_\vartheta(\vartheta, \varphi) \quad (9.23)$$

si nota che la fase è data da  $-kr + \text{Arg}(M_\vartheta) - \pi/2$ . Poichè  $\text{Arg}(M_\vartheta)$  dipende solo da  $\vartheta$  e  $\varphi$ , il vettore d'onda è:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta} &= -\nabla[-kr + \text{Arg}(M_\vartheta)] = k\mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \text{Arg}(M_\vartheta) \mathbf{i}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{Arg}(M_\vartheta) \mathbf{i}_\varphi \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \left( \mathbf{i}_r + \frac{\lambda}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \text{Arg}(M_\vartheta) \mathbf{i}_\vartheta + \frac{\lambda}{2\pi r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{Arg}(M_\vartheta) \mathbf{i}_\varphi \right) \end{aligned} \quad (9.24)$$

Poichè  $r$  è molto maggiore di  $\lambda$  si ha:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{i}_r \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (9.25)$$

Questo risultato, valido per tutte le componenti di  $\mathbf{E}$  e di  $\mathbf{H}$ , mostra che nella zona lontana l'onda elettromagnetica tende a divenire sferica e che essa ha lunghezza d'onda e velocità di fase pari a quelle delle onde piane uniformi. Siccome i campi a grande distanza tendono a divenire trasversali, l'onda tende a divenire di tipo TEM. Essa non è uniforme perché  $M_\vartheta$  e  $M_\varphi$  dipendono dalla direzione. Per le (9.21), il campo elettrico ed il campo magnetico soddisfano le relazioni

$$\mathbf{H} \approx \frac{\mathbf{i}_r \times \mathbf{E}}{\eta} \quad \mathbf{E} \approx \eta \mathbf{H} \times \mathbf{i}_r \quad (9.26)$$

Poichè  $\eta$  è reale, relazioni analoghe sono valide per i campi istantanei, cosicchè  $\mathbf{e}$  ed  $\mathbf{h}$  sono perpendicolari fra loro e soddisfano la regola del cavatappi, come in un'onda piana uniforme.

Con le premesse sopra indicate si ha per il vettore di Poynting a grande distanza:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{2\eta} \mathbf{i}_r = \frac{|\mathbf{E}|^2}{2\eta} \mathbf{i}_r \quad (9.27)$$

dove si è sfruttata l'identità:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

e il fatto che  $\mathbf{E}$  è ortogonale ad  $\mathbf{i}_r$ . Data l'espressione del potenziale vettore si ha:

$$\mathbf{E} = \frac{e^{-j\beta r}}{r} \hat{\mathbf{E}}(\vartheta, \varphi)$$

e quindi:

$$\mathbf{S} = \frac{|\hat{\mathbf{E}}(\vartheta, \varphi)|^2}{2\eta r^2} \mathbf{i}_r \quad (9.28)$$

Poichè nelle (9.21) si sono trascurati i termini che decrescono come  $1/r^2$ , la (9.28) è valida a meno di termini che decrescono come  $1/r^3$ . Nella zona lontana il vettore di Poynting è reale ed è diretto radialmente nel verso centrifugo. Dunque a grande distanza dalla sorgente, si ha un trasporto di energia verso l'infinito. Poichè il mezzo è senza perdite, alla potenza trasmessa verso l'infinito (**potenza irradiata**) corrisponde un'uguale potenza erogata dalla sorgente.

La potenza attiva, o irradiata, può calcolarsi come flusso del vettore di Poynting su una sfera di raggio  $R$  e vale:

$$P_S = \iint_{S_R} \frac{|\hat{\mathbf{E}}(\vartheta, \varphi)|^2}{2\eta r^2} dS$$

Poichè l'elemento  $dS$  di sfera vale  $dS = r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ , in assenza di perdite  $P_S$  è indipendente dalla distanza e vale:

$$P_{irr} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{|\hat{\mathbf{E}}(\vartheta, \varphi)|^2}{2\eta} \sin \vartheta d\vartheta = \int_0^{4\pi} \frac{|\hat{\mathbf{E}}(\vartheta, \varphi)|^2}{2\eta} d\Omega \quad (9.29)$$

Poiché tale potenza non dipende, in assenza di perdite, dalla superficie  $S$  considerata, sarà indicata nel seguito con il simbolo  $P_{irr}$ .

La (9.28) deriva dalle (9.21), in cui sono stati trascurati i termini che decrescono più rapidamente di  $1/r$ . Dunque l'irraggiamento dipende solo dalla parte del campo che decresce come  $1/r$ . E' questa la ragione per cui il campo rappresentato dalle (9.21) viene detto **campo di radiazione**.

Risulta inoltre indipendente da  $r$  la seguente quantità che indicheremo con  $I_r(\vartheta, \varphi)$  (**intensità di radiazione**):

$$I_r(\vartheta, \varphi) = |\mathbf{S}(\mathbf{r})| r^2 = \frac{|\hat{\mathbf{E}}(\vartheta, \varphi)|^2}{2\eta} \quad (9.30)$$

il cui significato, se utilizzata negli integrali su superficie chiusa, è di **potenza irradiata per unità di angolo solido**. Risulta:

$$P_{irr} = \int_{4\pi} I_r(\vartheta, \varphi) d\Omega \quad (9.31)$$

Considerando, invece, l'elemento infinitesimo  $dS$  posto a distanza  $r$  nella direzione  $\vartheta, \varphi$ , la (9.31) può essere posta nella seguente forma differenziale:

$$dP = \mathbf{S} \cdot \mathbf{i}_r dS = \frac{I_r(\vartheta, \varphi)}{r^2} dS = I_r(\vartheta, \varphi) d\Omega \quad (9.32)$$

Dunque tutte le sezioni trasversali che sottendono lo stesso angolo solido  $d\Omega$  sono attraversate dalla stessa potenza. Ciò significa che nella zona di radiazione la potenza elettromagnetica è - per così dire - incanalata dentro le regioni angolari infinitesime in cui può essere suddiviso tutto lo spazio intorno alla sorgente. Dalla (9.32) si ha:

$$I_r(\vartheta, \varphi) = \frac{dP}{d\Omega} \quad [ \text{W/Sterad} ] \quad (9.33)$$

che illustra come l'intensità di radiazione rappresenti la potenza irradiata per unità di angolo solido.

Indicando ora attraverso il punto generico P la direzione del punto potenziato e attraverso M una direzione di riferimento si può normalizzare  $I_r$ , ottenendo  $i_r(\vartheta, \varphi)$ :

$$i_r(\vartheta, \varphi) = \frac{I_r(P)}{I_r(M)} = \frac{|\hat{\mathbf{E}}(P)|^2}{|\hat{\mathbf{E}}(M)|^2} \quad (9.34)$$

Salvo avviso contrario M è assunto come la direzione dove  $|\hat{\mathbf{E}}|$  assume il massimo assoluto e in tali casi risulta  $i_r \leq 1$ . Essa fornisce un'immagine visiva di come la potenza irradiata dalla sorgente viene distribuita nelle varie direzioni. Per questa ragione esso viene detto **diagramma di radiazione**. La grandezza:

$$f(\vartheta, \varphi) = \sqrt{i_r(\vartheta, \varphi)} \quad (9.35)$$

risulta proporzionale ai moduli dei campi anziché al loro quadrato ed è detta **funzione di radiazione** della sorgente. Essa rappresenta la maniera più completa per rappresentare le proprietà di irradiazione della sorgente dipendenti dalla direzione.

In un sistema di coordinate sferiche l'equazione:

$$r = f(\vartheta, \varphi)$$

definisce una superficie chiusa che è detta **superficie di radiazione** e costituisce la rappresentazione geometrica della funzione  $f$ .

L'intersezione di tale superficie con il generico piano  $\pi$ , passante per l'origine è detta diagramma di radiazione della sorgente nel piano  $\pi$ . Si veda un esempio in Figura 9.3, nella cui parte b è mostrata anche la rappresentazione cartesiana dello stesso diagramma. Quando la sorgente da' luogo ad un campo che nella direzione di massimo ha campi  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  polarizzati rettilinearmente, si definiscono diagramma di radiazione nel piano  $\mathbf{E}$  quello relativo al piano, passante per l'origine, dove si trova  $\mathbf{E}$ . Analogamente per  $\mathbf{H}$ .

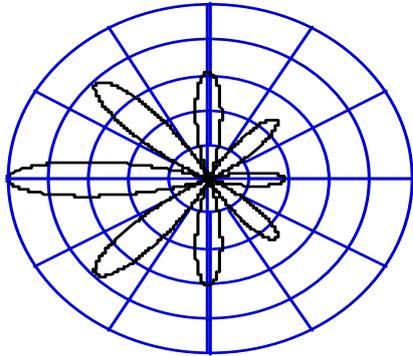


Figura 9.3a

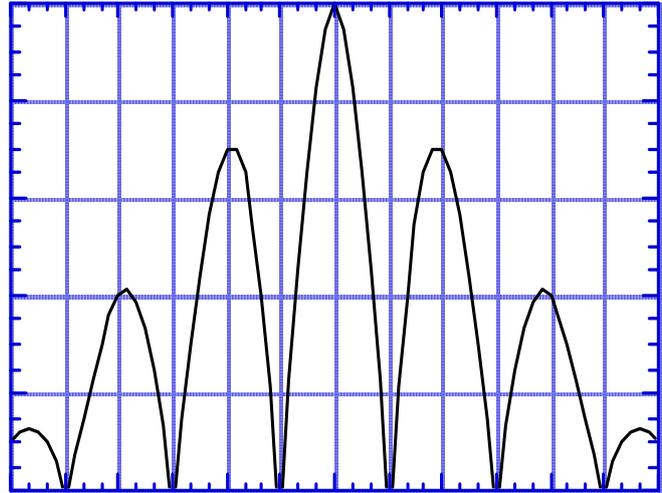


Figura 9.3b

Figura 9.3 - Diagramma di radiazione di una antenna: a - diagramma polare; b - diagramma cartesiano

Dalla (9.21) si deduce che l'ampiezza ed il vettore di polarizzazione del campo elettrico nella zona di radiazione sono dati rispettivamente da:

$$|\mathbf{E}| = \frac{\eta}{2\lambda r} \sqrt{|M_{\vartheta}|^2 + |M_{\varphi}|^2} \quad (9.36)$$

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|} e^{j\chi} = -j \frac{M_{\vartheta} \mathbf{i}_{\vartheta} + M_{\varphi} \mathbf{i}_{\varphi}}{\sqrt{|M_{\vartheta}|^2 + |M_{\varphi}|^2}} e^{j(\chi - kr)} \quad (9.37)$$

Poichè nella definizione del vettore di polarizzazione la fase  $\chi$  può essere scelta arbitrariamente, è lecito porre  $\chi = kr$  e quindi:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\vartheta, \varphi) = -j \frac{M_{\vartheta} \mathbf{i}_{\vartheta} + M_{\varphi} \mathbf{i}_{\varphi}}{\sqrt{|M_{\vartheta}|^2 + |M_{\varphi}|^2}} \quad (9.38)$$

ed inoltre:

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{p} |\mathbf{E}| e^{-jkr} \quad \mathbf{H} \approx \mathbf{i}_r \times \mathbf{p} \frac{|\mathbf{E}|}{\eta} e^{-jkr} \quad (9.39)$$

Si noti che, nella zona di radiazione, la polarizzazione è identica in tutti i punti di una stessa semiretta radiale.

Quando la sorgente dà luogo ad un campo che nella direzione di massimo ha campi  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  polarizzati rettilinearmente, si definiscono diagramma di radiazione nel piano  $\mathbf{E}$  quello relativo al piano, passante per l'origine, dove si trova  $\mathbf{E}$ . Analogamente per  $\mathbf{H}$ .

Mediante la (9.30), l'ampiezza del campo elettrico può essere espressa in funzione dell'intensità di radiazione e del vettore di polarizzazione nelle varie direzioni:

$$\mathbf{E} = \mathbf{p} \sqrt{2 \eta I_r(\vartheta, \varphi)} \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (9.40a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{i}_r \times \mathbf{p} \sqrt{\frac{2 I_r(\vartheta, \varphi)}{\eta}} \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (9.40b)$$

Infine, è possibile mostrare che il campo generato da una sorgente qualsiasi (anche estesa) a distanze molto maggiori della lunghezza d'onda è indipendente dalla struttura "fine" della sorgente. Un'ulteriore considerazione, collegata alla precedente, è che la sola osservazione dell'onda irradiata da una sorgente monocromatica non fornisce informazioni sufficienti per riconoscerne dettagli strutturali a livelli di definizione più piccoli della lunghezza d'onda.

Una sorgente si dice **omnidirezionale** in un particolare piano  $\pi$ , se il suo diagramma di radiazione in  $\pi$  è una circonferenza; l'interesse tecnico delle antenne omnidirezionali è prevalente in quelle applicazioni che richiedono la diffusione di un segnale su un'intera area. Al contrario, in tutte le applicazioni in cui si vuole effettuare un collegamento fra due punti fissi, presentano interesse antenne altamente direttive. E' bene sottolineare che anche sulla carta, cioè pur prescindendo dalle difficoltà di natura tecnologica, qualsiasi sorgente fisicamente realizzabile può avere  $f(\vartheta, \varphi) = 0$  solo per valori discreti di  $\vartheta$  e  $\varphi$  (cioè può avere delle **direzioni di zero**); non esistono sorgenti che abbiano  $f(\vartheta, \varphi) = 0$  su intervalli di valori di  $\vartheta$  e  $\varphi$ . Questo fatto è un corollario del teorema del prolungamento analitico delle funzioni di variabile complessa, o del teorema di equivalenza attraverso il quale si può stabilire che  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  sono identicamente nulli in tutto lo spazio se lo sono su un intervallo finito di  $\vartheta$  e di  $\varphi$ .

La parte di un diagramma di radiazione che è compresa fra due direzioni di zero consecutive si chiama **lobo di radiazione**; vengono detti **principali** quei lobi il cui massimo relativo vale 1; secondari quelli il cui massimo relativo è minore di 1. Si

definisce **rapporto fra i lobi** di un'antenna il rapporto  $1/a$  fra il massimo assoluto di  $f(\vartheta, \varphi)$  [che vale 1] ed il più grande,  $a$ , fra gli altri massimi relativi (vedi Figura 9.3). Per caratterizzare con una quantità adimensionale le proprietà direzionali di un'antenna, integrate su tutte le direzioni dello spazio, si fa correntemente uso dell'inverso del valor medio dell'intensità di radiazione normalizzata:

$$d = \frac{1}{\frac{1}{4\pi} \int_0 i_r d\Omega} \quad (9.41)$$

ove  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  indica l'angolo solido elementare; la quantità  $d$  è detta guadagno in direttività (talvolta semplicemente **direttività**) dell'antenna.

Di questa grandezza si può dare una interpretazione significativa calcolando dapprima la potenza  $P_o$  per una antenna che irradiasse in tutte le direzioni con identica intensità  $I_r(M)$ , pari cioè a quella massima dell'antenna in oggetto. Si ha pertanto:

$$P_o = \int_{4\pi} I_r(M) d\Omega$$

Tale antenna è detta isotropa e in effetti,  $d$  esprime il guadagno in potenza che l'antenna in oggetto ha, a parità di massima intensità di radiazione, rispetto appunto all'antenna isotropa. Infatti si ha:

$$\frac{P_o}{P_{irr}} = \frac{4\pi I_r(M)}{\int_{4\pi} I_r(P) d\Omega} = \frac{1}{\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} i_r d\Omega} = d \quad (9.42)$$

A volte, ma meno frequentemente, si trovano delle direttività riferite ad altre antenne, diverse dalle isotrope (ad esempio il dipolo elementare). Molto più di frequente si introduce invece il **guadagno in potenza**  $G$ , definito come:

$$G = \frac{P_o}{P_a} \quad (9.43)$$

dove  $P_a$  è l'intera potenza assorbita dalla antenna, vista come carico di un dato generatore. Esso differisce da  $P_{irr}$  a causa delle perdite  $P_d$  dovute a dissipazione dell'antenna:  $P_a = P_{irr} + P_d$ . Il rapporto (talvolta indicato con  $\eta$ , ma da non confondersi con la impedenza del mezzo):

$$\eta = \frac{P_{irr}}{P_a} = \frac{P_{irr}}{P_{irr} + P_d} \leq 1 \quad (9.44)$$

è detto **rendimento dell'antenna** ed è di importanza fondamentale in sede di trasmissione.

Il guadagno di un'antenna è spesso incorporato in un parametro detto EIRP (Effective Isotropic Radiated Power), che è il prodotto della potenza d'ingresso e del guadagno. Il suo significato consiste nel fatto che un'antenna con un guadagno pari a 10 ed una potenza d'ingresso di 1 W produce gli stessi effetti di un'antenna con guadagno pari a 2 e potenza d'ingresso di 5 W: entrambe hanno lo stesso valore di EIRP, pari a 10 W. Quindi la potenza d'ingresso può essere ridotta usando un'antenna con un guadagno maggiore.

Il guadagno, il diagramma di radiazione e la polarizzazione sono i parametri che caratterizzano completamente le proprietà di radiazione di un'antenna: questi sono i dati principali di cui è necessario disporre per caratterizzare le antenne come componenti di un sistema.

## 9.4 Impedenza d'ingresso di un'antenna

Quando l'antenna si può schematizzare all'ingresso con una coppia di morsetti sui quali è definita una tensione  $V$  e una corrente  $I$ , causate dalla connessione di un generatore ai morsetti medesimi, si può definire una impedenza di ingresso:

$$Z_i = R_i + jX_i = \frac{V}{I} \quad (9.45)$$

Circuitalmente, l'antenna può essere sostituita da una impedenza  $Z_i$  senza che le condizioni di carico del generatore vengano a cambiare. In assenza di perdite (nell'antenna e nel mezzo), è agevole calcolare  $R_i$  attraverso la relazione:

$$\frac{1}{2} R_i |I|^2 = P_{irr} \quad (9.46)$$

In tal caso essa coincide con la resistenza di radiazione  $R_{irr}$  dell'antenna, cui più precisamente va riservata la relazione precedente. In presenza di perdite il circuito equivalente dell'antenna consta di due resistenze in serie:  $R_i = R_{irr} + R_d$ , dove  $R_{irr}$  si ottiene dalla formula precedente, mentre  $R_d$  è responsabile della potenza perduta  $P_d$ .

Risulta poi sfruttando il circuito equivalente di Figura 9.4:

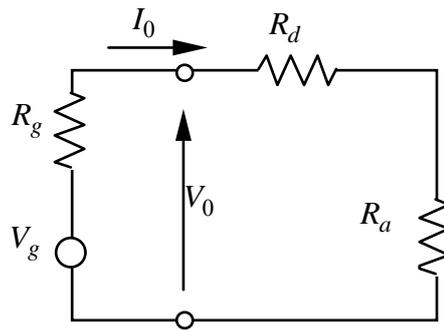


Figura 9.4 - Circuito equivalente di una antenna trasmittente

$$\eta = \frac{R_{irr}}{R_{irr} + R_d} \quad (9.47)$$

In effetti è necessario completare il circuito con  $X_i$ , per il calcolo della quale entra in gioco la condizione al contorno e di campo vicino dell'antenna.

Tale parametro può però spesso eliminarsi, se si opera opportunamente un adattamento introducendo in serie una reattanza eguale ed opposta. In particolare, applicando il bilancio delle potenze attive e reattive per la regione esterna ai morsetti del generatore, si trova la seguente relazione:

$$X_i = \frac{4\omega(u_m - u_e)}{|I|^2} \quad (9.48)$$

dove  $u_m - u_e$  rappresenta lo scarto fra le energie magnetica ed elettrica medie accumulate in tale regione. Nella zona di radiazione tali densità sono uguali. Si ha infatti:

$$\frac{\mu |\mathbf{H}|^2}{4} = \frac{\mu (|\mathbf{E}| / \eta)^2}{4} = \frac{\varepsilon |\mathbf{E}|^2}{4} \quad (9.49)$$

Pertanto la differenza  $u_m - u_e$  dipende solo dal campo vicino che ha caratteristiche diverse nelle varie antenne. La reattanza d'ingresso è induttiva (capacitiva) se nel campo vicino l'energia magnetica (elettrica) supera quella dell'altro tipo. Se l'energia elettrica e magnetica si bilanciano la reattanza è nulla e l'antenna viene detta **risonante**. Poichè l'andamento del campo dipende dalla frequenza, la condizione di risonanza viene verificata solo a certe frequenze.

Il calcolo della reattanza richiederebbe l'esatta conoscenza del campo vicino, che raramente è noto. Per questa ragione l'importanza dell'espressione di  $X_i$  è prevalentemente concettuale poichè tale parametro può spesso venire annullato con un opportuno adattamento, introducendo in serie una reattanza eguale ed opposta.

## 9.5 Comportamento in ricezione

All'antenna trasmittente si contrappone quella ricevente, secondo lo schema riportato in Figura 9.5. L'antenna ricevente è connessa al carico  $Z_L$ , quella trasmittente al generatore.

Mentre per l'antenna emittente è possibile con buona approssimazione arrivare ad una corrente impressa come termine noto forzante, ciò non è opportuno e possibile per la ricevente, poichè in essa le correnti dipendono dal campo.

Anche fissandone le caratteristiche, rimarrebbero comunque almeno delle costanti incognite. Per la funzione ricevente conviene trattare l'antenna come un due porte, alimentato da un lato da un generatore dipendente dal campo incidente e chiuso sull'altra porta su un carico. La potenza trasferita dipende dunque da generatore (campo elettromagnetico) e carico. Con riferimento alla Figura 9.5, in un mezzo omogeneo e con antenne a grande distanza, la funzione ricevente può essere collegata al campo elettromagnetico che è presente nella zona dove si situa l'antenna ricevente, ma calcolato in assenza di essa.

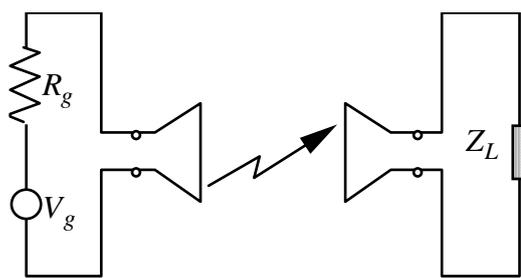


Figura 9.5 Circuito equivalente di un radiocollegamento

La potenza attiva trasferita dall'antenna ricevente al carico  $Z_L$  (potenza ricevuta), per una data antenna ricevente  $R$ , dipende da:

- l'impedenza di carico,  $Z_L$
- la direzione in cui è puntata  $R$ ;
- la polarizzazione del campo che investe  $R$ .

Si indichi con  $P_R$  il valore che la potenza ricevuta assume in condizioni di massimo rispetto a tutte le tre variabili ora menzionate; cioè: con carico adattato; con R puntata nella direzione in cui da un'assegnata trasmittente essa riceve il massimo livello possibile di segnale; con la polarizzazione ottimale (che verrà precisata fra breve). Si definisce allora area efficace dell'antenna R la quantità:

$$A_{eff} = \frac{P_R}{\frac{|\mathbf{E}|^2}{2\eta}} \quad (9.50)$$

ove  $\mathbf{E}$  indica il campo elettrico irradiato dalla antenna trasmittente, misurato in assenza dell'antenna ricevente R laddove poi la si installerà; dato che si suppone l'antenna ricevente molto lontano dalla trasmittente, a distanza  $\ell \gg \lambda$ , il campo in questa regione è assimilabile ad un'onda piana uniforme e pertanto  $|\mathbf{E}|^2$  può ritenersi praticamente costante nella intera regione che poi verrà occupato da R. Di fatto la presenza di R modificherà il campo elettromagnetico, ma ciò non è precisabile a priori e tutto viene conglobato nel termine  $A_{eff}$ .

## 9.6 Il dipolo corto

Si consideri un conduttore rettilineo di lunghezza  $L \ll \lambda$  come quello rappresentato in Figura 9.6.

Date le dimensioni ridotte si può ritenere che se in esso la corrente sia costante (di valore  $I$ ), il suo momento equivalente  $\mathbf{M}$  valga  $\mathbf{M} = I L \mathbf{i}_z$ . Utilizzando le formule già stabilite si ha a grande distanza:

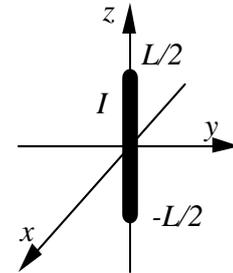


Figura 9.6 - Dipolo corto

$$\mathbf{E} = j\eta \frac{IL}{2\lambda} \sin\vartheta \frac{e^{j\beta r}}{r} \mathbf{i}_\vartheta \quad (9.51)$$

Dalla definizione di intensità di radiazione:

$$I_r(\vartheta, \varphi) = \frac{|\hat{\mathbf{E}}|^2}{2\eta} = \frac{\eta}{8} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 |I|^2 \sin^2 \vartheta \quad (9.52)$$

Il valore massimo si ha per  $\vartheta = \pi/2$ , cioè per una direzione qualunque del piano  $xy$ , e la intensità di radiazione normalizzata vale:

$$i_r(\vartheta, \varphi) = \sin^2 \vartheta \quad (9.53)$$

La funzione di radiazione risulta

$$f(\vartheta, \varphi) = |\sin \vartheta| \quad (9.54)$$

Il dipolo corto non risente della coordinata  $\varphi$ ; è dunque omnidirezionale nel piano  $xy$ . In qualsiasi piano passante per l'asse  $z$  ha il diagramma di radiazione di Figura 9.7 con direzioni di zero  $\vartheta = 0, \pi$ .

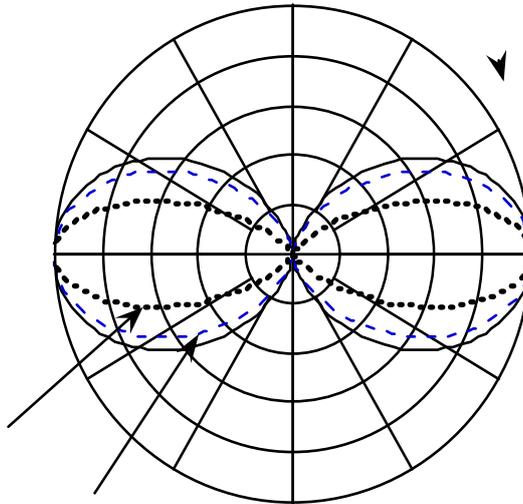


Figura 9.7 - Diagramma di radiazione di alcuni dipoli.

La sua direttività vale:

$$d = \frac{4\pi}{\int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^3 \vartheta} = \frac{3}{2} \quad (9.55)$$

Utilizzando poi la definizione:

$$\frac{1}{2} R_{irr} |I_0|^2 = \int_{4\pi} I_r(P) d\Omega = \int_{4\pi} \frac{\eta}{8} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 |I|^2 \sin^2 \vartheta d\Omega \quad (9.56)$$

nell'ipotesi di  $|I_0| = |I|$  si ha:

$$R_{irr} = \frac{2\pi}{3} \eta \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \quad (9.57)$$

Per trovare l'area efficace, si effettuerà esplicitamente il calcolo della potenza trasferita al carico adattato. La tensione a vuoto fra gli estremi di un segmento lungo  $L (\ll \lambda)$  è massima quando il campo elettrico è polarizzato rettilineamente e parallelo al segmento stesso; se l'antenna non perturba il campo essa vale  $V_o = -EL$ . Questa è la tensione a vuoto del generatore equivalente all'antenna ricevente (vedi Figura 9.5), la cui impedenza interna ha parte reale<sup>1</sup> data dalla (9.57); la parte immaginaria di detta impedenza è ininfluenza nel presente problema, in quanto il carico deve essere adattato in potenza. Si ha dunque:

$$P_{irr} = \frac{|V_o|^2}{8R_{irr}} = \frac{3}{16\pi} |\mathbf{E}|^2 \frac{\lambda^2}{\eta} \quad (9.58)$$

per cui dalla definizione di area efficace si ottiene:

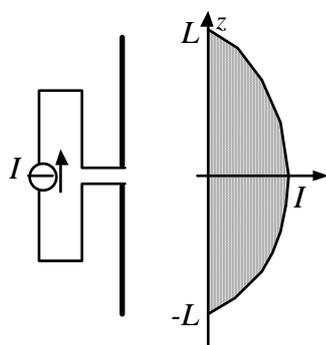
$$A_{eff} = \frac{3}{8\pi} \lambda^2 \quad (9.59)$$

Si può notare una relazione interessante:

$$\frac{A_{eff}}{d} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \quad (9.60)$$

Si vedrà che per ogni antenna il rapporto tra area efficace e direttività è una costante: si è pertanto qui determinato il valore della costante; nel seguito sarà dunque sufficiente valutare  $d$  o  $A_{eff}$  per ogni antenna.

## 9.7 Antenne rettilinee



Nella Figura 9.8 è rappresentato uno schema di antenna rettilinea di lunghezza  $2L$  alimentata al centro da un generatore di corrente. La distribuzione di corrente  $I(z)$ , secondo un sistema di riferimento che abbia l'asse  $z$  sull'asse dell'antenna, presenta certamente uno zero per  $z = \pm L$ .

Il suo valore in  $z = 0$  vale  $I_o$ . In tali condizioni è ragionevole approssimazione<sup>2</sup> supporre che l'andamento

Figura 9.8 - Distribuzione di corrente su una antenna rettilinea.

<sup>1</sup> Si può dimostrare nel seguito che il generatore equivalente ha proprio  $R_{irr}$  come resistenza interna.

<sup>2</sup> Lo si può dimostrare con un procedimento che presuppone la risoluzione di una equazione integrale per passi successivi.

della corrente sia di tipo sinusoidale, come se si trattasse di una linea di trasmissione in regime di onda stazionaria.

Si può dunque assumere che sia:

$$I(z) = I_M \operatorname{sen}[k(L-|z|)] \quad \text{con } k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad (9.61)$$

ove  $\mu, \varepsilon$  si riferiscono al mezzo nel quale è immersa l'antenna. Poichè  $I(0)=I_o$  si ha:

$$I_M = \frac{I_o}{\operatorname{sen} kL} \quad (9.62)$$

per cui:

$$I(z) = I_o \frac{\operatorname{sen}(k|L-z|)}{\operatorname{sen} kL} \quad (9.63)$$

Quando  $\operatorname{sen} kL = 1$ , cioè  $kL = \pi/2$ , cui corrisponde  $L = \lambda/4$ , per una lunghezza totale di dipolo  $2L$  pari a  $\lambda/2$ , si ha il caso particolare di dipolo a mezz'onda: per esso  $I_o = I_M$ .

Consideriamo ora i risultati sia per  $L$  generico che per  $L = \lambda/4$ . Si ha:

$$I_r = \frac{\eta |I_M|^2}{8\pi^2} \left[ \frac{\cos(kL \cos \vartheta) - \cos kL}{\operatorname{sen} \vartheta} \right]^2 \quad (L \text{ generica}) \quad (9.64)$$

$$I_r = \frac{\eta |I_M|^2}{8\pi^2} \left[ \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\operatorname{sen} \vartheta} \right]^2 \quad (L = \lambda/4) \quad (9.65)$$

L'intensità di radiazione normalizzata (rispetto al valore massimo, che, per qualsiasi  $L$ , si ha per  $\vartheta = \pi/2$  vale:

$$i_r = \left[ \frac{\cos(kL \cos \vartheta) - \cos kL}{\operatorname{sen} \vartheta} \right]^2 \quad (L \text{ generica}) \quad (9.66)$$

$$i_r = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\operatorname{sen}^2 \vartheta} \quad (L = \lambda/4) \quad (9.67)$$

Nella determinazione dei risultati è utile la seguente identità:

$$\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx+c) dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a \operatorname{sen}(bx+c) - b \cos(bx+c)] \quad (9.68)$$

Pertanto qualsiasi dipolo rettilineo (sede di una corrente stazionaria) è omnidirezionale nel piano  $x,y$ . Il diagramma di radiazione nel generico piano passante per l'asse  $z$  è illustrato in Figura 9.7 (*curva b*) per  $L = \lambda/4$ ; per  $L < \lambda/4$  esso è compreso fra le due curve a, b di detta figura.

Il calcolo della direttività e quello della resistenza di radiazione richiedono la valutazione del seguente integrale:

$$\int_0^\pi \frac{(\cos(kL \cos \vartheta) - \cos kL)^2}{\sin \vartheta} d\vartheta \quad (9.69)$$

Sfruttando opportuni cambiamenti di variabile e calcoli numerici, i risultati sono stati tabulati o graficati per qualsiasi lunghezza  $L$  e sono reperibili in letteratura.

In particolare, può essere utile riportare i valori che si hanno per  $2L = \lambda/2$  ( $\eta$  indica al solito l'impedenza intrinseca del mezzo circostante l'antenna):

$$R_{irr(\lambda/2)} \approx 2.44 \frac{\eta}{4\pi} \approx 73 \Omega \quad \text{nel vuoto,} \quad (9.70)$$

$$d_{\lambda/2} \approx 1.64 \quad (9.71)$$

Alle frequenze per cui la terra può essere assimilata a un conduttore perfetto, i precedenti risultati (validi per un'antenna lunga  $2L$ , alimentata al centro e posta in un mezzo omogeneo) possono applicarsi al caso di un'antenna lunga  $L$ , alimentata al capo inferiore e posta verticalmente sopra il terreno (**antenna Marconi**).

In tal caso infatti il piano metallico agisce come **specchio** dell'elemento superiore, generando un'antenna immagine fittizia di caratteristiche analoghe alla antenna superiore. E' il **principio delle immagini**, valido per l'elettrostatica, che si può dimostrare anche per le cariche in movimento, ovvero per distribuzioni di correnti impresse  $\mathbf{J}(\mathbf{Q})$ .

## 9.8 Riassunto dei risultati

La trattazione precedente sfrutta la proprietà dell'induzione magnetica:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

valida poichè non vi sono in natura cariche magnetiche. Essa consente di impostare la soluzione in termini di un potenziale vettore magnetico  $\mathbf{A}$  legato alle correnti impresse  $\mathbf{J}_i$  e di un potenziale scalare  $\varphi$ . Si è già però affermato l'interesse ad

introdurre opportune densità di correnti magnetiche impresse  $\mathbf{J}_{mi}$ : in tal caso (in presenza di cariche magnetiche di densità  $\rho_m$ ) si verifica:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$$

Data la linearità del problema e del modello matematico, si può tuttavia pensare di risolvere separatamente i due casi:

- 1)  $\mathbf{J}_i \neq 0$  e  $\mathbf{J}_{mi} = 0$
- 2)  $\mathbf{J}_i = 0$  e  $\mathbf{J}_{mi} \neq 0$ .

La soluzione completa si otterrà come sovrapposizione dei risultati. La trattazione precedente può dunque vedersi come la soluzione del primo problema: occorre ora considerare la soluzione del problema duale, ottenibile mediante le sostituzioni:

$$\begin{array}{llllll} \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E} & \mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{H} & \mathbf{J}_i \rightarrow -\mathbf{J}_{mi} & \mu \rightarrow \varepsilon_c & \varepsilon_c \rightarrow \mu & \\ \mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{F} & \phi \rightarrow -\varphi. & & & & \end{array}$$

dove si è introdotto il potenziale vettore elettrico  $\mathbf{F}$  come duale di quello magnetico  $\mathbf{A}$ . Come si deduce in modo ovvio dalle definizioni, applicando la dualità  $k$  rimane invariato, mentre  $\eta$  viene trasformato in  $1/\eta$ . La Tabella 1 mostra le espressioni del campo generato dalle sorgenti magnetiche (colonna destra) dedotte da quelle della colonna sinistra facendo le sostituzioni suddette.

La Tabella 2 riporta le espressioni del campo nella zona di radiazione e delle altre grandezze connesse. Le espressioni relative al caso delle sorgenti magnetiche sono ottenute per dualità da quelle trovate nei paragrafi precedenti per le sorgenti elettriche. Nel caso delle sorgenti magnetiche, il vettore di radiazione elettrico o momento equivalente  $\mathbf{M}$  viene sostituito dal vettore di radiazione magnetico  $\mathbf{N}$ .

Tabella 1 - Campo generato da sorgenti elettriche o magnetiche

Sorgenti Elettriche	Sorgenti Magnetiche
$\mathbf{E} = \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}{j\omega\epsilon_c\mu} - j\omega \mathbf{A}$	$\mathbf{H} = \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})}{j\omega\epsilon_c\mu} - j\omega \mathbf{F}$
$\mathbf{H} = \frac{\nabla \times \mathbf{A}}{\mu}$	$\mathbf{E} = -\frac{\nabla \times \mathbf{F}}{\epsilon}$
$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dV'$	$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon}{4\pi} \int_V \mathbf{J}_{mi}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dV'$

Tabella 2 - Campo di radiazione

Sorgenti Elettriche	Sorgenti Magnetiche
$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-jk\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{r}'} dV' \quad (3)$	$\mathbf{N}(\mathbf{r}) = \int_V \mathbf{J}_m(\mathbf{r}') e^{-jk\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{r}'} dV' \quad (3)$
$\mathbf{E} \approx -j\eta \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (M_\vartheta \mathbf{i}_\vartheta + M_\varphi \mathbf{i}_\varphi)$	$\mathbf{H} \approx -j \frac{e^{-jkr}}{2\eta\lambda r} (N_\vartheta \mathbf{i}_\vartheta + N_\varphi \mathbf{i}_\varphi)$
$\mathbf{H} \approx -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (M_\vartheta \mathbf{i}_\varphi - M_\varphi \mathbf{i}_\vartheta)$	$\mathbf{E} \approx j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (N_\vartheta \mathbf{i}_\varphi - N_\varphi \mathbf{i}_\vartheta)$
$I_r = \frac{\eta}{8\lambda^2} ( M_\vartheta ^2 +  M_\varphi ^2)$	$I_r = \frac{1}{8\eta\lambda^2} ( N_\vartheta ^2 +  N_\varphi ^2)$
$\mathbf{p} = -j \frac{M_\vartheta \mathbf{i}_\vartheta + M_\varphi \mathbf{i}_\varphi}{\sqrt{ M_\vartheta ^2 +  M_\varphi ^2}} \quad (4)$	$\mathbf{p} = -j \frac{N_\vartheta \mathbf{i}_\vartheta - N_\varphi \mathbf{i}_\varphi}{\sqrt{ N_\vartheta ^2 +  N_\varphi ^2}} \quad (4)$
$\mathbf{S} = \frac{I_r(\vartheta, \varphi)}{r^2} \mathbf{i}_r$	$\mathbf{E} = \mathbf{p} \sqrt{2\eta I_r(\vartheta, \varphi)} \frac{e^{-jkr}}{r} \quad \mathbf{H} = \mathbf{i}_r \times \mathbf{p} \sqrt{\frac{2 I_r(\vartheta, \varphi)}{\eta}} \frac{e^{-jkr}}{r}$

<sup>3</sup> Le espressioni di  $\mathbf{M}$  e di  $\mathbf{N}$  si riferiscono al caso di sorgenti distribuite nei volumi. Nel caso di sorgenti superficiali gli integrali di volume sono sostituiti da analoghi integrali di superficie.

<sup>4</sup> Le due espressioni di  $\mathbf{p}$  non sono duali perché  $\mathbf{p}$  rappresenta il vettore di polarizzazione del campo elettrico in entrambi i casi.

## ESERCIZI

- 1\*** Si considerino due dipoli corti verticali (cioè diretti secondo l'asse  $z$ ) di lunghezza  $L$  posizionati sull'asse  $z$  alle coordinate  $+d$  e  $-d$  ed alimentati con correnti pari rispettivamente a  $I_0 e^{j\delta b}$  e  $I_0 e^{-j\delta b}$ .  
Si calcolino i singoli potenziali vettori ed il potenziale vettore dell'antenna composta. Si calcoli inoltre il campo elettrico dell'antenna composta.
- 2\*** Si considerino ora due dipoli corti verticali posizionati sull'asse  $y$  alle coordinate  $+d$  e  $-d$  ed alimentati con correnti pari rispettivamente a  $I_0 e^{j\delta e}$  e  $I_0 e^{-j\delta e}$ .  
Facendo riferimento al solo piano di osservazione  $yz$  (cioè il vettore  $\mathbf{r}$  appartiene a tale piano) si calcolino le stesse grandezze richieste all'esercizio **1**.
- 3\*** Facendo nuovamente riferimento al solo piano di osservazione  $yz$ , si calcoli il campo elettrico prodotto da una antenna composta da tutte le quattro antenne di cui agli esercizi **1** e **2**.  
Si determini la coppia di valori  $(\delta_b, \delta_e)$  che sposta il massimo del campo elettrico nella direzione  $\vartheta$  dell'asse  $y$ . Si calcoli infine l'intensità di radiazione normalizzata dell'antenna composta utilizzando i valori  $(\delta_b, \delta_e)$  relativi al primo caso.
- 4** Si considerino tre dipoli corti verticali posizionati sull'asse  $x$  alle coordinate  $+d$ ,  $0$  e  $-d$  ed alimentati con corrente di intensità  $I_0/2$  e fase  $\delta$  il primo, intensità  $I_0$  e fase  $0$  quello centrale ed intensità  $I_0/2$  e fase  $-\delta$  il terzo.  
Si calcolino i singoli potenziali vettori ed il potenziale vettore dell'antenna composta.  
Si calcoli inoltre il campo elettrico e magnetico dell'antenna composta.  
Facendo riferimento al solo piano di osservazione  $xy$ , si calcolino i valori di  $d$  e  $\delta$  che determinano l'annullarsi del diagramma di radiazione nella direzione positiva dell'asse  $x$  ed il massimo nella direzione opposta ( $-x$ ).  
Si determini infine di quanti dB è maggiore il campo elettrico massimo dell'antenna composta rispetto a quello del singolo dipolo (es. centrale).
- 5** Si risolva il problema **4** nel caso di dipoli alimentati in fase con la stessa corrente  $I$ .
- 6** Si calcoli l'energia magnetica e l'energia elettrica nel caso di dipolo corto alimentato con una corrente  $I$ . In particolare si valuti la differenza fra di esse nella regione di campo vicino e di campo lontano. Dare una spiegazione fisica dei risultati.