
Capitolo 8

TRACCIA PER LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA NON OMOGENEO

8.1 Generalità

Effettuando, a partire dalle equazioni di Maxwell in forma complessa, gli stessi passaggi che avevano portato alla equazione delle onde, si ottiene, in presenza di cariche e correnti elettriche:

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega \mu \nabla \times \mathbf{H} = \omega^2 \mu \varepsilon_c \mathbf{E} - j\omega \mu \mathbf{J}_i \\ \nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu \varepsilon_c \mathbf{E} &= j\omega \mu \mathbf{J}_i + \frac{\nabla \rho}{\varepsilon} = j\omega \mu \mathbf{J}_i - \frac{\nabla \nabla \cdot \mathbf{J}}{j\omega \varepsilon}\end{aligned}\quad (8.1)$$

e inoltre:

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \omega^2 \mu \varepsilon_c \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J}_i$$

Le due equazioni sono non soltanto di ordine più elevato di uno (ciò è inevitabile per disaccoppiare le equazioni iniziali), ma coinvolgono, come termine noto, le derivate di \mathbf{J}_i . Ciò può creare problemi in presenza di correnti superficiali o lineari e comunque richiedono ipotesi più restrittive sul comportamento di \mathbf{J}_i di quanto non lo fossero quelle iniziali.

Si preferisce allora seguire una via diversa che preveda l'introduzione di un vettore ausiliario \mathbf{A} detto **potenziale vettore magnetico**. Esso viene introdotto osservando che, per l'annullarsi della divergenza di \mathbf{B} , e in base alla $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, si può sempre pensare che \mathbf{H} sia ottenibile come rotazionale di un vettore. Si ha allora:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (8.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H} = -j\omega \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\mathbf{E} + j\omega \mathbf{A}) = 0$$

In un dominio semplicemente connesso un vettore a rotore nullo può sempre esprimersi come gradiente di uno scalare φ ; allora:

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} - \nabla \varphi \quad (8.3)$$

Introducendo quest'ultima nella prima delle (8.1) si ha:

$$\begin{aligned} -j\omega \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \omega^2 \mu \varepsilon_c (-j\omega \mathbf{A} - \nabla \varphi) - j\omega \mu \mathbf{J}_i \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - k^2 \mathbf{A} &= \mu \mathbf{J}_i - j\omega \mu \varepsilon_c \nabla \varphi \quad \text{con } k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_c \end{aligned} \quad (8.4)$$

Si noti poi che l'ipotesi di insieme semplicemente connesso è solitamente superabile dividendo la zona dove si vuole determinare il campo in uno o più di tali insiemi e applicando poi le condizioni di continuità alle soluzioni ivi ottenibili. Si ha inoltre:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -j\omega \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \varphi$$

Ma dalle equazioni di Maxwell (poichè $\nabla \cdot (\nabla \times ()) \equiv 0$)

$$j\omega \varepsilon_c \nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_i$$

per cui isolando $\nabla \cdot \mathbf{A}$ si ottiene:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_i}{\omega^2 \varepsilon_c} - \frac{1}{j\omega} \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_i}{j\omega \varepsilon_c} - \frac{1}{j\omega} \nabla^2 \varphi \quad (8.5)$$

che mostra come fissare φ significhi fissare $\nabla \cdot \mathbf{A}$. Ciò corrisponde ad un teorema di calcolo vettoriale (**Teorema di Helmholtz**) che indica come un vettore sia determinato una volta che ne siano fissati il rotore e la divergenza.

Dall'identità vettoriale $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, sostituita nella (8.4), si ha:

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega \mu \varepsilon_c \varphi) = -\mu \mathbf{J}_i \quad (8.6)$$

Risulta evidente da tale equazione che non esiste un'unica coppia di potenziali associata ad un certo campo elettromagnetico. Infatti qualora la coppia di funzioni \mathbf{A} e φ soddisfi la (8.6), allora è possibile dimostrare che anche le nuove funzioni $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$ e $\varphi' = \varphi - j\omega\chi$, con χ campo scalare arbitrario, soddisfano la (8.6). E' anche possibile notare che, sostituendo la precedente espressione di \mathbf{A}' nella (8.2), \mathbf{H} è ancora esprimibile come rotazionale di \mathbf{A} in quanto $\nabla\chi$ esprime un campo vettoriale irrotazionale e quindi la (8.2) continua a rimanere valida per un qualsiasi campo scalare χ ; ed analogamente, sostituendo entrambe le espressioni di \mathbf{A}' e φ' nella (8.3), si riottiene la precedente espressione in \mathbf{A} e φ , in quanto i due termini che contengono il campo scalare χ si elidono; perciò alle due coppie \mathbf{A} e φ e \mathbf{A}' e φ' corrispondono gli stessi valori di \mathbf{E} ed \mathbf{H} . Questa proprietà viene di solito indicata con il termine inglese **gauge invariance**; essa risulta utile per la possibilità che offre di imporre opportune condizioni ai potenziali. Ciò induce quindi ad identificare quale sia la via più conveniente per risolvere una certa classe di problemi. Diverse sono le scelte che sono state via via proposte; quella più seguita è stata suggerita da **Lorentz**, in quanto consente di disaccoppiare la equazione del potenziale scalare da quelle del potenziale vettore. Scegliendo infatti

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega \mu \varepsilon_c \varphi \quad (8.7)$$

si ottiene sia

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_i \quad (8.8)$$

come equazione risolvente per \mathbf{A} (**equazione di Helmholtz non omogenea**), sia

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -\frac{\rho_i}{\varepsilon_c} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_i}{j\omega \varepsilon_c} \quad (8.9)$$

come equazione risolvente per φ . I potenziali \mathbf{A} e φ che soddisfano alla (8.7) vengono detti **potenziali di Lorentz**. Qualora si sia giunti alla soluzione della equazione (8.8) per il potenziale vettore, converrebbe ricavarsi la corrispondente espressione del potenziale scalare dalla (8.7), anzichè risolvere direttamente la(8.9). Si ottiene infatti immediatamente:

$$\varphi = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega \varepsilon_c \mu} \quad (8.10)$$

D'altra parte, la conoscenza di φ non è essenziale, in quanto \mathbf{H} si può ricavare dalla (8.2), qualora sia noto \mathbf{A} , mentre l'espressione (8.3) di \mathbf{E} , in cui compare φ , è

desumibile dalla conoscenza del solo potenziale vettore \mathbf{A} , sostituendo in essa l'espressione (8.10):

$$\mathbf{E} = \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}{j\omega \varepsilon_c \mu} - j\omega \mathbf{A} \quad (8.11)$$

Quindi la soluzione dell'equazione (8.8) consente di risolvere in modo univoco il calcolo di \mathbf{E} e di \mathbf{H} .

Un'altra possibile scelta è quella connessa alla soluzione $\varphi = 0$, proposta da **Coulomb** in generale, ma che è in realtà un caso particolare di scelta di Lorentz, in quanto soddisfa la (8.10) nell'ipotesi che $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$; essa comporta la semplificazione della (8.3) in:

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} \quad (8.12)$$

Non è il caso qui di insistere oltre sul **problema delle scelte** (così è definito questo argomento): ci limiteremo a discutere il caso di campo prodotto da un'antenna in una regione illimitata, omogenea e senza altre sorgenti per cui quanto qui richiamato è sufficiente. Si noti di passaggio che l'insieme delle (8.12) e (8.8) è in accordo con quanto fatto precedentemente per le onde TEM in una regione priva di sorgenti.

8.2 La soluzione in spazio libero

Poichè le equazioni di Maxwell sono lineari, in un mezzo di pari caratteristiche è possibile determinare la soluzione della (8.8) dapprima trovando \mathbf{A} per un elemento di corrente infinitesimo e poi sovrapponendo gli effetti.

Una determinazione del risultato in forma rigorosa è assai delicata sul piano matematico. La traccia per la soluzione consiste nello scegliere l'elemento di corrente \mathbf{J}_i dV diretto lungo uno degli assi di un sistema cartesiano ortogonale e posizionato sull'origine; successivamente si proietta la (8.8) su quell'asse (ad esempio l'asse z), in quanto le componenti cartesiane del laplaciano di un vettore sono uguali al laplaciano delle componenti dello stesso vettore. Sempre data la linearità questo procedimento potrà essere ripetuto tre volte sommando poi i risultati. Risulta allora sufficiente la soluzione della equazione scalare del tipo:

$$\nabla^2 A_\alpha + k^2 A_\alpha = -\mu J_\alpha \quad (\alpha = x, y, z) \quad (8.13)$$

Nello studio della radiazione, le (8.13) sono definite in tutto lo spazio. Le correnti differiscono da zero solo in una regione limitata. Poichè si usa chiamare la soluzione

della (8.13) per corrente infinitesima **funzione di Green** ed indicarla con G , nel seguito si seguirà questa notazione. La (8.13) può agevolmente trovare soluzione nei punti diversi dall'origine. Innanzitutto la funzione G , data la simmetria sferica del problema sarà funzione della sola variabile r di un sistema di coordinate sferico. Risolvendo la (8.13) dove è $J_x \neq 0$ si ottiene:

$$G(r) = a \frac{e^{-jkr}}{r} J_x dV \quad (8.14)$$

La determinazione della costante a è la parte più delicata del procedimento. Ricorrendo a ragionamenti al limite per $r \rightarrow 0$ si può dimostrare che:

$$G(r) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} J_x dV \quad (8.15)$$

La (8.15) è generalizzabile per un elemento posto qualunque rispetto all'origine. Se infatti \mathbf{r}' è il vettore del punto dove genericamente è posizionato l'elemento di sorgente ed \mathbf{r} il vettore di posizione del generico punto P dove si vuole il campo, si ha in generale:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} J_x dV \quad (8.16)$$

per sola variazione del sistema di riferimento. La (8.16) consente di applicare il principio di sovrapposizione degli effetti per $J_x(\mathbf{r}')$ distribuito su un volume V . Sovrapponendo anche le componenti sugli assi si ha infine:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \mathbf{J}_i(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \quad (8.17)$$

dove gli apici ricordano che si fa variare le coordinate del punto variabile sulla sorgente.

8.3 Potenziale vettore di un elemento di corrente elettrica

Si definisce **elemento di corrente elettrica** una densità di corrente impressa che sia **costante** e concentrata in una **porzione di volume infinitesima** (in pratica molto piccola rispetto a λ). Nella Figura 8.1 è mostrato un filamento sottile e corto posto

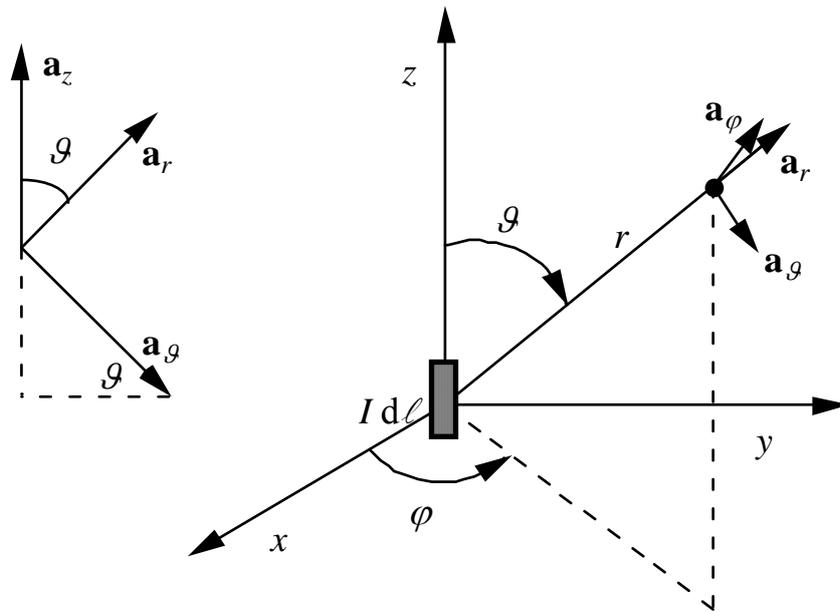


Figura 8.1

nell'origine ed orientato secondo l'asse z . Dal punto di vista matematico questo tipo di sorgente è il limite di una densità J_z concentrata in un volume ΔV quando $\Delta V \rightarrow 0$ (dV) in modo che $J_z \Delta V$ mantenga valore finito.

Si osservi che $J_z dV$ può pensarsi come il prodotto di una corrente, I , per la lunghezza del tratto, $d\ell$, in cui essa fluisce: infatti $I = J_z dS$, (dS area della sezione del filamento); da cui si ottiene:

$$J_z dV = J_z dS d\ell = I d\ell.$$

Tale elemento si chiama **dipolo elettrico**; il prodotto $I d\ell$ è detto **momento elettrico del dipolo**.

Per questo tipo di sorgente, $\mathbf{J} = J_z \mathbf{i}_z$, il potenziale vettore ha solo una componente lungo z : $\mathbf{A} = A_z \mathbf{i}_z$ e A_z è una soluzione dell'equazione, analoga alla (8.13):

$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu J_z \quad (8.18)$$

Il volume $dV = dS d\ell$ occupato dalla corrente è di dimensione infinitesima, così che il termine relativo alla corrente impressa può essere considerato come localizzato in un punto. Si può riconoscere una **simmetria sferica** nella distribuzione della sorgente, per cui A_z sarà funzione solamente della distanza in senso radiale, r , dalla sorgente; non sarà invece funzione delle altre due coordinate polari φ , ϑ , mostrate in Figura 8.1.

Per valori di r diversi da zero, A_z soddisferà all'equazione:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial A_z}{\partial r} + k^2 A_z = 0 \quad (8.19)$$

ottenuta dall'espressione dell'operatore Laplaciano in coordinate sferiche:

$$\nabla^2 A_z = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial A_z}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2}$$

qualora A_z dipenda solo da r e di conseguenza tutte le derivate rispetto a ϑ , φ siano nulle. Se facciamo la sostituzione $A_z = \psi/r$ nella (8.19), si ha:

$$\frac{dA_z}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{1}{r^2} \psi \quad (8.20)$$

e l'equazione per ψ che si ottiene dalla (8.19) diventa:

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + k^2 \psi = 0 \quad (8.21)$$

Questa è la semplice equazione del moto armonico, le cui soluzioni sono del tipo:

$$C_1 e^{-jkr} \quad C_2 e^{jkr}$$

dove C_1 e C_2 sono delle costanti. Se scegliamo la prima soluzione e reinseriamo il fattore temporale, otteniamo:

$$\psi(r, t) = C_1 e^{-jkr + j\omega t} = C_1 e^{j\omega \left(t - \frac{r}{v} \right)} \quad (8.22)$$

Questa è una soluzione corrispondente ad un'onda sferica che si propaga verso l'esterno, dal momento che la fase è ritardata di un fattore kr , mentre il corrispondente ritardo è pari a r/v , con v velocità dell'onda nel mezzo, essendo $k = \omega/v$. L'altra soluzione con costante C_2 corrisponde ad un'onda sferica che si propaga verso l'interno e non è presente come parte della soluzione per la radiazione da un elemento di corrente posto in $r = 0$. La nostra soluzione per A_z è ora del tipo:

$$A_z = C_1 \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (8.23)$$

Per poter mettere in relazione la costante C_1 con l'intensità della sorgente, integriamo ambo i membri della (8.18) su di un piccolo volume sferico di raggio r_0 . Notiamo che $\nabla^2 A_z = \nabla \cdot \nabla A_z$, cosicchè tramite il teorema della divergenza si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_V \nabla^2 A_z dV &= \int_V \nabla \cdot \nabla A_z dV = \oint_S \nabla A_z \cdot \mathbf{i}_r r_0^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \\
&= -k^2 \int_V A_z dV - \mu \int_V J_z dV
\end{aligned} \tag{8.24}$$

Ora $dV = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr$ mentre A_z varia come $1/r$; quindi, se scegliamo r_0 sempre più piccolo, l'integrale di volume di A_z , che è proporzionale a r_0^2 , tende a zero. L'integrale di volume di J_z fornisce $J_z dV = J_z dS d\ell = I d\ell$, che è l'intensità totale della sorgente e si è visto coincidere con il momento elettrico del dipolo. Infine:

$$\nabla A_z \cdot \mathbf{i}_r = \frac{\partial A_z}{\partial r} = -(1 + jkr) C_1 \frac{e^{-jkr}}{r^2} \tag{8.25}$$

cosicchè si ottiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{r_0 \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -(1 + jkr_0) C_1 \frac{e^{-jkr_0}}{r_0^2} r_0^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi &= \lim_{r_0 \rightarrow 0} -(1 + jkr_0) C_1 e^{-jkr_0} 4\pi = \\
&= -4\pi C_1 = -\mu I d\ell
\end{aligned} \tag{8.26}$$

La soluzione per il potenziale vettore nella sua forma finale è quindi:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} I d\ell \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{i}_z = \frac{\mu \mathbf{J} dV}{4\pi r} e^{-jkr} \tag{8.27}$$

Come visto nell'esempio 5 del paragrafo 6.2, il potenziale vettore è un'onda sferica che si propaga nel verso uscente con un'ampiezza che decresce in modo inversamente proporzionale alla distanza. Le superfici a fase costante o a ritardo costante sono delle sfere di raggio r centrate sulla sorgente. Nel caso del vuoto, la velocità di fase coincide con la velocità della luce nel vuoto, cioè 3×10^8 m/s.

Le considerazioni fin qui svolte, ed in particolare l'espressione (8.27) del potenziale vettore, potrebbero rapidamente condurci, tramite le (8.2) ed (8.11), alla determinazione del campo elettrico e magnetico irradiato da un elemento di corrente elettrica; in questo momento invece noi posponiamo tali considerazioni (verranno riprese successivamente con un respiro più ampio) ed utilizziamo invece la (8.27) per determinare il potenziale vettore magnetico per una generica distribuzione di correnti impresse di tipo elettrico.

8.4 Potenziale vettore per una distribuzione di corrente elettrica arbitraria

Consideriamo un volume V con una distribuzione di corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$, come mostrato in Figura 8.2. Il generico elemento di corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r}') dV$, situato nel punto individuato dal vettore \mathbf{r}' , fornirà al potenziale vettore totale un contributo pari a:

$$\frac{\mu \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV'}{4\pi R} e^{-jkR}$$

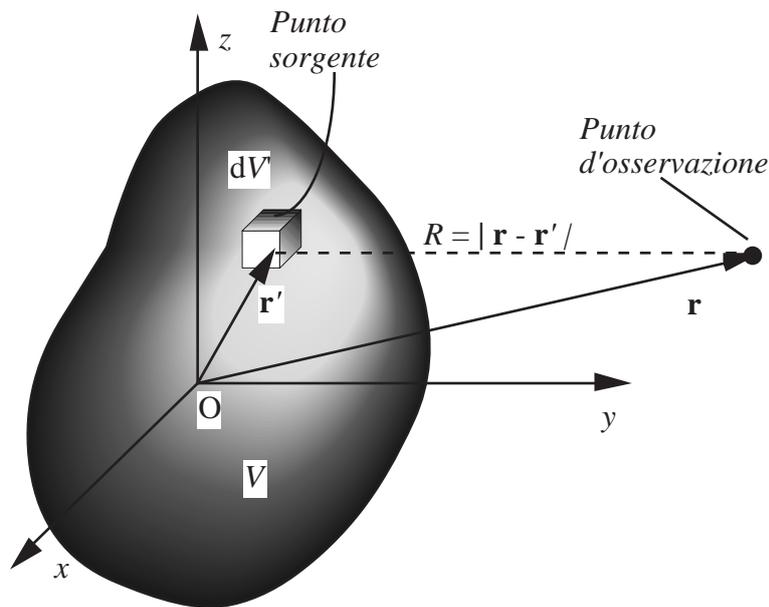


Figura 8.2

dove si è indicato con R la distanza del **punto sorgente** dal **punto d'osservazione**, cioè $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Per ottenere l'espressione globale del potenziale vettore, basta quindi sommare tutti i contributi dei singoli dipoli elementari, ottenendo:

$$A_{\alpha}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V J_{\alpha}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dV' \quad (\alpha = x, y, z) \quad (8.28)$$

Le variabili di integrazione sono le coordinate del punto \mathbf{r}' . Poichè l'espressione (8.28) è identica per le tre componenti di \mathbf{A} , si può anche scrivere:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dV' = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-\alpha R} e^{-j\beta R}}{R} dV' \quad (8.29)$$

Questa espressione rappresenta il potenziale vettore generato in un mezzo omogeneo, isotropo ed illimitato da sorgenti elettriche localizzate nella regione V : è

la sovrapposizione di infiniti contributi elementari del tipo (8.27). Nella (8.29) sono state inoltre evidenziate le costanti di fase, $\beta = \text{Re}[k]$, e di attenuazione, $\alpha = \text{Im}[k]$, delle onde piane uniformi nel mezzo considerato. Evidentemente ciascun contributo elementare è un'onda sferica che si propaga dal punto sorgente verso l'infinito, con la stessa velocità di fase delle onde piane uniformi. Però la funzione d'onda (8.29), ottenuta per sovrapposizione delle onde elementari, generalmente non rappresenta un'onda sferica, nè ha velocità di fase uguale in tutti i punti.

La (8.29) vale nel caso di sorgente distribuita nel volume V . Molto spesso, però, bisogna considerare situazioni in cui le sorgenti sono correnti superficiali. Indicata con S la superficie su cui è concentrata la corrente e con \mathbf{J}_S la densità della corrente superficiale, appare spontaneo estrapolare dalla (8.29) l'espressione da usare in questo caso rimpiazzando gli elementi di sorgente volumetrici con elementi superficiali, mediante la sostituzione:

$$\mathbf{J} dV \rightarrow \mathbf{J}_S dS$$

Così si ottiene:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dS' = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \frac{e^{-\alpha R} e^{-j\beta R}}{R} dS' \quad (8.30)$$

Il procedimento, pur non rigoroso, dà luogo ad una espressione esatta.