

---

# Capitolo 6

---

## EQUAZIONI DELLE ONDE

### 6.1 Equazioni delle onde nel dominio del tempo

Si consideri un mezzo isotropo, lineare e stazionario in cui si ha

$$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e} \quad \mathbf{b} = \mu \mathbf{h} \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}$$

Le equazioni di Maxwell si scrivono:

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\mu \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{h} = +\varepsilon \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \sigma \mathbf{e} + \mathbf{j}_i$$

Si consideri una regione dello spazio priva di sorgenti ( $\mathbf{j}_i = 0$ ). Dalla prima equazione di Maxwell, effettuando su ambo i membri la operazione di  $\nabla \times (\bullet)$  si ha:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{h} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{e} + \sigma \nabla \times \mathbf{e}$$

dove si è fatto anche l'ipotesi che  $\varepsilon$  non dipenda dal punto. Dalla definizione dell'operatore  $\nabla^2$  su un vettore si ha:

$$\nabla^2 \mathbf{h} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{h}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) = \nabla^2 \mathbf{h} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{h} - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{h}$$

dove si è sostituito a  $\nabla \times \mathbf{e}$  l'espressione ottenuta dalle equazioni di Maxwell. Se poi anche  $\mu$  è una costante risulta:

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{h} \qquad \nabla^2 \mathbf{h} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = 0$$

Se il mezzo è senza perdite ( $\sigma = 0$ ) si ha l'equazione vettoriale delle onde:

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} = 0$$

Analogamente per  $\mathbf{e}$ , supponendo  $\varepsilon$ ,  $\mu$  costanti e in assenza di cariche libere si ha  $\nabla \cdot \mathbf{e} = 0$  e si ottiene:

$$\nabla^2 \mathbf{e} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} = 0$$

In conclusione per  $\mathbf{e}$  o  $\mathbf{h}$  vale la seguente equazione:

$$\nabla^2 \mathbf{a} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} = 0 \qquad (6.1)$$

che viene detta **equazione delle onde vettoriali** (o **equazioni di D'Alembert vettoriale**). L'equazione delle onde scalari, che differisce dalla (6.1) solo perché l'incognita  $\mathbf{a}$  è sostituita da un'incognita scalare  $\psi$ , è fra le equazioni più ampiamente indagate della fisica matematica. Le sue soluzioni, dette appunto **onde** o **funzioni d'onda**, possono avere dimensioni fisiche e significati molto diversi, a seconda del contesto. Per analogia con questo linguaggio, in uso da circa due secoli, la locuzione **onda elettromagnetica** è spesso considerata sinonimo di **campo elettromagnetico** in regime variabile, nonostante il carattere particolare dell'equazione (6.1), subordinata alle ipotesi notevolmente limitate che si sono via via introdotte per ricavarla a partire dalle equazioni di Maxwell.

Una giustificazione di questa terminologia consiste nel fatto che la (6.1) è soddisfatta da funzioni vettoriali regolari del tipo seguente, che corrispondono alla nozione intuitiva di fenomeno ondoso di propagazione:

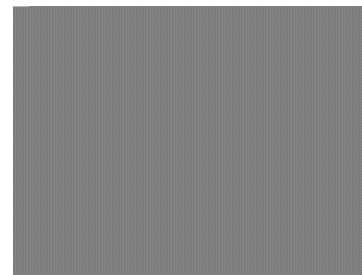


Figura 6.1

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{r} - \mathbf{i}_r ct) \quad (6.2)$$

dove  $\mathbf{r} = P - O = x \mathbf{i}_x + y \mathbf{i}_y + z \mathbf{i}_z$  indica il vettore di posizione del punto  $P(x, y, z)$ , rispetto ad un'origine arbitraria  $O$  (Figura 6.1);  $\mathbf{i}_r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$  indica il versore di  $\mathbf{r}$ . Si è posto:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \quad (6.3)$$

Questa grandezza ha le dimensioni di una velocità e, per ragioni che il lettore certamente conosce e su cui si tornerà più avanti, è detta velocità della luce nel mezzo caratterizzato dai parametri  $\varepsilon$  e  $\mu$ . In particolare, nel vuoto (si è visto al termine del paragrafo 3.3 che  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m;  $\varepsilon_0 = (1/36\pi) \cdot 10^{-9}$  F/m) si ha  $c = c_0 = 3 \cdot 10^8$  m/s. La (6.2) descrive, come sopra accennato, un fenomeno di propagazione, nella direzione di  $\mathbf{r}$ , con velocità  $c$ .

Proiettando la (6.1) in uno qualunque degli assi di un sistema di coordinate cartesiano ortogonale, si ha:

$$\nabla^2 a - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0 \quad (6.4)$$

detta **equazione delle onde scalare**.

Per funzioni di solo  $z$  e  $t$  si ha il seguente integrale generale:

$$a(z, t) = f_p(z - ct) + f_r(z + ct) \quad (6.5)$$

In effetti si ha:

$$\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{1}{c} \left[ -\frac{\partial f_p}{\partial t} + \frac{\partial f_r}{\partial t} \right] \quad \nabla^2 a = \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}$$

Consideriamo poi il caso  $a = f_p$ ; si noti che lo stesso valore di  $a$  si ottiene per due coppie di valori  $(z, t)$  soddisfacenti la

$$z_1 - c t_1 = z_2 - c t_2 \quad z_1 - z_2 = \Delta z = c(t_1 - t_2) = c \Delta t$$

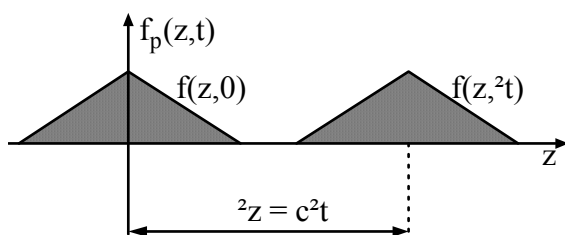


Figura 6.2

Dopo un tempo  $\Delta t$  tutti i valori di  $f_p$  si trovano traslati in avanti di  $\Delta z$ . E' come se la forma di  $f_p$  si muovesse lungo l'asse  $z$  nel verso positivo a velocità  $c$ : si parla di **onda progressiva o diretta** (Figura 6.2). Analogamente, a partire da  $f_r(z, t)$  si riconoscerebbe un moto nel verso opposto,

cioè di un'onda regressiva o riflessa. Pertanto  $c$  è detta velocità di propagazione dell'onda.

## 6.2 Funzioni d'onda

Nel prossimo paragrafo si esaminerà l'equazione delle onde nel dominio della frequenza; come si vedrà, le sue soluzioni sono caratterizzate da grandezze del tipo:

$$A = a e^{j\varphi} \quad (a, \varphi \text{ reali}) \quad (6.6)$$

a cui corrisponde la seguente funzione nel dominio del tempo:

$$A(t) = a \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.7)$$

Come visto nel paragrafo 6.1, tali funzioni rappresentano onde che si propagano, e perciò vengono dette **funzioni d'onda**. In questo paragrafo vengono introdotte le grandezze che caratterizzano il moto delle onde sinusoidali in generale e perciò non si farà alcun riferimento al loro significato fisico.

In generale, l'ampiezza e la fase riportate nella (6.6) sono funzioni della posizione ( $a = a(\mathbf{r}); \varphi = \varphi(\mathbf{r})$ ); perciò si possono enucleare delle superfici sulle quali le oscillazioni di  $A$  avvengono in fase e individuate da equazioni del tipo

$$\varphi(\mathbf{r}) = \text{costante} \quad (6.8)$$

Il luogo dei punti  $\mathbf{r}$  così identificato viene chiamato **superficie equifase**. Nella (6.7), l'argomento del coseno dipende sia dal tempo  $t$  che dal punto  $\mathbf{r}$ , quindi la **fase istantanea** è il valore che esso assume ad un dato istante, mentre il **fronte d'onda** risulta definito come il luogo dei punti nei quali la fase istantanea assume un valore costante  $\varphi_0$  (e perciò coincidente con una superficie equifase  $\varphi = \varphi_0 - \omega t$ ); quindi, al crescere di  $t$  dovrà spostarsi nel verso delle superficie equifase con fasi decrescenti, descrivendo così la **propagazione** dell'onda. Quando, su ogni superficie equifase, anche l'ampiezza è costante, l'onda viene detta **omogenea**. Qualora le superfici equifase assumano forme geometriche note (piani, sfere, cilindri), l'onda viene corrispondentemente qualificata come **piana, sferica, cilindrica**, e così via. Un'altra grandezza che caratterizza le onde è il **vettore d'onda**, definito come:

$$\mathbf{\beta} = -\nabla\varphi \quad [\text{rad} / \text{m}] \quad (6.9)$$

Dalla proprietà del gradiente, la direzione di  $\mathbf{\beta}$  deve essere perpendicolare alle superfici equifase; il segno meno consente di orientarlo nel verso di propagazione (fasi decrescenti). Tramite il modulo di tale vettore, si può calcolare un'altra importante grandezza delle onde, la **velocità di fase**  $v$ :

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad [m / s] \quad (6.10)$$

Per quanto detto prima, essa coincide con la velocità con cui si muoverebbe un ipotetico osservatore solidale con un fronte d'onda.

Il largo uso che si farà successivamente delle funzioni d'onda del tipo (6.6) per rappresentare le onde sinusoidali, consiglia un esame più approfondito di alcuni semplici esempi di vasta utilità.

### *Esempio 1*

Iniziamo dal caso in cui il modulo è una costante  $a$ , genericamente complessa, mentre la fase  $\varphi$  dipende in modo lineare da una sola coordinata:

$$A = a e^{-jkz} = |a| e^{j\varphi_a} e^{-jkz} \quad k > 0 \quad (6.11)$$

Poichè la fase  $\varphi = \varphi_a - kz$  risulta costante quando  $z$  è costante, le superfici equifase sono i piani perpendicolari all'asse  $z$ ; quindi la (6.11) rappresenta un'**onda piana**; lo si può verificare anche dal vettore d'onda, definito dalla (6.9) come:

$$\mathbf{\beta} = -\nabla(\varphi_a - kz) = \nabla(kz) = k \mathbf{i}_z \quad (6.12)$$

che mostra come la **direzione** di propagazione di tale onda è quella **positiva** dell'asse  $z$ . La velocità di fase, come indicato dalla (6.10) in cui  $|\mathbf{\beta}| = \beta = k$ , vale:

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (6.13)$$

La **lunghezza d'onda**, determinata dalla condizione  $\beta \lambda = 2\pi$ , è costante in tutti i punti dello spazio, poiché  $\beta$  è costante; essa rappresenta la distanza percorsa dai fronti d'onda in un periodo. Se ne ricava quindi:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{v}} = \frac{2\pi}{2\pi f} v = \frac{v}{f} = vT \quad (6.14)$$

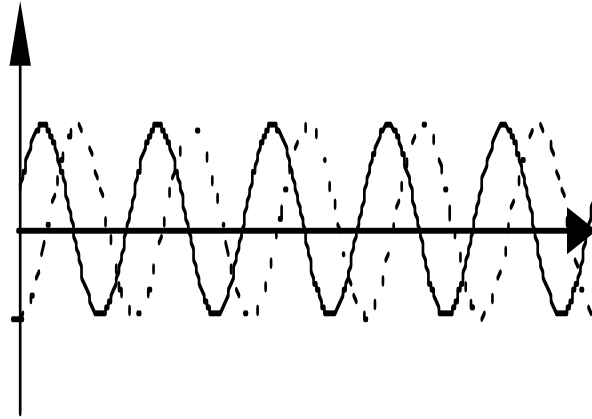


Figura 6.3

in cui si è espressa la  $\lambda$  in funzione di velocità di fase  $v$ , della frequenza  $f$ , del periodo  $T$ . La funzione d'onda nel dominio del tempo corrispondente al fasore  $A$  dato dalla (6.11) è:

$$A(t) = \text{Re} \left[ A e^{j\omega t} \right] = |a| \cos(\omega t - kz + \varphi_a) = |a| \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} + \frac{\varphi_a}{2\pi} \right) \right] \quad (6.14)$$

Essa mostra una duplice periodicità, nel tempo e nello spazio; se si fissa l'istante  $t$ , tale funzione risulta periodica in  $z$ , con periodo  $\lambda$ , mentre se ci si pone in un punto di ascissa  $z$  generica, si verifica la periodicità sinusoidale nel tempo, con periodo  $T$ . La Figura 6.3 rappresenta l'andamento spaziale di  $A(t)$  in due istanti successivi. E' immediato verificare come la (6.11) rappresenti un'onda piana **uniforme**; infatti le oscillazioni hanno ampiezza costante, pari a  $|a|$ , in tutti i punti di uno stesso piano equifase; in questo esempio, essa è addirittura uguale ovunque.

### Esempio 2

In questo esempio, vediamo l'effetto di un cambiamento di segno nella fase:

$$A = a e^{jkz} = |a| e^{j\varphi_a} e^{jkz} \quad k > 0 \quad (6.15)$$

Ripercorrendo i passaggi sviluppati precedentemente, si vede come l'unica variazione consista nell'inversione di  $z$  in  $-z$ ; si ha quindi un verso di propagazione opposto, cioè quello negativo dell'asse  $z$ .

### Esempio 3

Vediamo ora il caso in cui la fase  $\varphi$  dipende in modo lineare da una sola coordinata, ma tramite una costante complessa  $\gamma = \alpha + jk$ :

$$A = a e^{-\gamma z} = |a| e^{-\alpha z} e^{j(\varphi_a - kz)} \quad \alpha, k > 0 \quad (6.16)$$

Si tratta anche in questo caso di un'onda piana, in quanto la fase  $\varphi$  è costante se  $z$  è costante; perciò anche ora le superfici equifase sono i piani perpendicolari all'asse  $z$ . Anche in questo caso l'onda risulta essere uniforme perché sulle superfici equifase (piani  $z=\text{cost.}$ ) l'ampiezza è costante e pari a  $|a| e^{-\alpha z}$ . Si trova infine:

$$\mathbf{\beta} = k \mathbf{i}_z \quad (6.17)$$

che conferma la propagazione nel verso positivo dell'asse  $z$ , mentre la costante di fase e la velocità di fase sono date rispettivamente da:

$$\beta = k \quad (6.18)$$

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (6.19)$$

Per quanto riguarda la lunghezza d'onda, valgono le relazioni definite nella (6.14), mentre l'espressione della funzione d'onda istantanea è:

$$A(t) = \text{Re} \left[ A e^{j\omega t} \right] = |a| e^{-\alpha z} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} + \frac{\varphi_a}{2\pi} \right) \right] \quad (6.20)$$

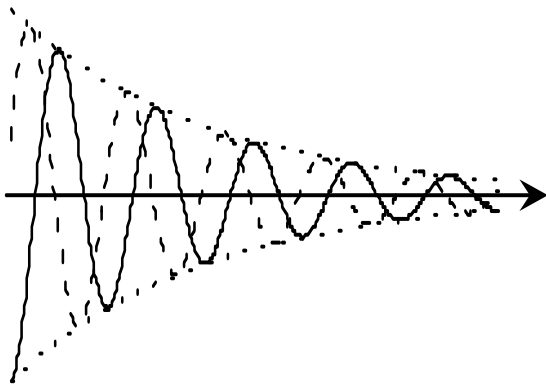


Figura 6.4

In Figura 6.4 è mostrato l'andamento di tale funzione per due istanti successivi di tempo: l'ampiezza delle oscillazioni mostra un decadimento esponenziale nel verso della propagazione, con attenuazione tanto più rapida quanto maggiore è  $\alpha$ . Perciò la costante  $\alpha$  è stata chiamata **costante di attenuazione**. Poiché di frequente la potenza associata ad un'onda è proporzionale al quadrato della sua funzione d'onda, si può definire l'**attenuazione in potenza** fra due punti come il rapporto fra le potenze associate

all'onda in quelle due posizioni; se esse sono distanti  $d$ , si ottiene la **attenuazione in potenza su di una distanza  $d$** :

$$\frac{|A(z)|^2}{|A(z+d)|^2} = \frac{e^{-2\alpha z}}{e^{-2\alpha(z+d)}} = e^{2\alpha d} \quad (6.21)$$

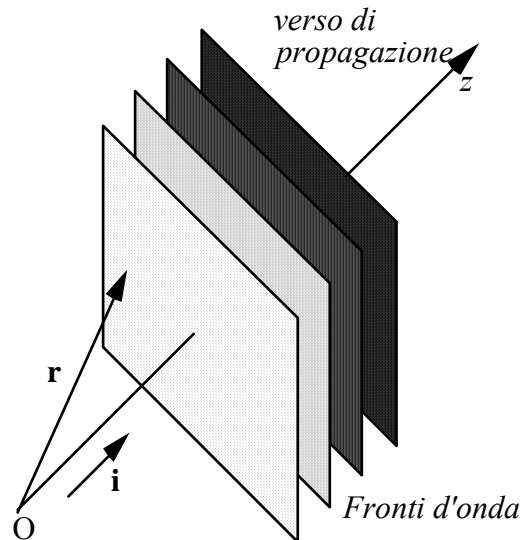


Figura 6.5

che espressa in decibel diventa:

$$10 \log \frac{|A(z)|^2}{|A(z+d)|^2} = 10 \log e^{2\alpha d} = 8.68\alpha d = \alpha_{\text{dB}} d \quad \text{con} \quad \alpha_{\text{dB}} = 8.68\alpha \quad (6.22)$$

dove si è evidenziato il fatto che l'attenuazione in dB è proporzionale alla distanza  $d$  tramite un coefficiente  $\alpha_{\text{dB}}$  (costante di attenuazione espressa in dB/m).

#### Esempio 4

Estendiamo ora l'esempio precedente al caso in cui la fase  $\varphi$  dipende in modo lineare da una coordinata individuata da  $\mathbf{i}$ , vettore costante che punta in una direzione qualsiasi, mentre gli altri parametri sono immutati ( $\gamma = \alpha + jk$ ):

$$A = ae^{-\gamma \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}} \quad (6.23)$$

La (6.23) può essere facilmente ricondotta alla (6.16) se si introduce la coordinata  $z = \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}$ , presa a partire dall'origine nella direzione di  $\mathbf{i}$  (vedi Figura 6.5), e si fa coincidere la direzione dell'asse  $z$  con il verso di propagazione; in tal caso, infatti, l'espressione della funzione d'onda diventa del tutto uguale alla (6.16):

$$A = ae^{-\gamma z} \quad (6.24)$$

Se ne deduce che la (6.23) rappresenta un'onda che si propaga nella direzione e nel verso di  $\mathbf{i}$ , mantenendo caratteristiche identiche a quelle viste nell'esempio 3 (velocità di fase, lunghezza d'onda e costante di attenuazione). La (6.23) risulta quindi essere



l'espressione più generale di un'onda piana uniforme. Nel caso in cui  $\gamma$  si riduca ad una costante immaginaria pura, la propagazione dell'onda si presenta priva di attenuazione.

### Esempio 5

Vediamo ora un esempio in coordinate sferiche  $r, \vartheta, \varphi$ ; anche in questo caso, la fase  $\varphi$  dipende in modo lineare da una delle coordinate, in particolare quella radiale  $r$ , tramite una costante reale  $k$  positiva; il modulo è reale, ma non è costante (dipende infatti dalle due coordinate angolari  $\vartheta$  e  $\varphi$ , tramite la funzione  $a(\vartheta, \varphi)$ , ed è inoltre inversamente proporzionale alla coordinata radiale  $r$ ):

$$A = a(\vartheta, \varphi) \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (6.25)$$

In questo caso le superfici equifase sono definite dalla relazione  $kr = \text{costante}$ ; poichè  $k$  è una costante reale positiva, coincidono con le superfici sferiche aventi centro nell'origine; perciò l'onda rappresentata dalla (6.25) risulta essere un'onda **sferica**. Si possono inoltre ricavare le altre grandezze caratteristiche, in particolare il vettore d'onda  $\mathbf{\beta}$ , che indica chiaramente come la propagazione avvenga secondo la direzione radiale, normale alle superfici sferiche equifase, e nel verso centrifugo:

$$\mathbf{\beta} = \nabla(-kr) = k \mathbf{i}_r \quad \beta = k \quad v = \frac{\omega}{k} \quad (6.26)$$

L'andamento dell'onda è mostrato in Figura 6.6, dove si è evidenziato ciò che accade in due generiche direzioni ed in due istanti successivi. Si nota come sia possibile definire anche in questo caso una lunghezza d'onda  $\lambda$ , data dalla solita espressione (6.14); stavolta però essa rappresenta la distanza percorsa in senso radiale dai fronti d'onda in un periodo. Non possiamo però affermare che si tratti di un'onda uniforme, in quanto l'ampiezza delle oscillazioni - che è data da  $a(\vartheta, \varphi)/r$  - varia con la direzione e quindi sulla superficie sferica equifase essa non è costante. Qualora la funzione  $a(\vartheta, \varphi)$  si riduca ad una costante  $a$ , essa risulterebbe invece uniforme, perché l'ampiezza - ora pari a  $a/r$  - risulterebbe costante sulle superfici sferiche equifase. In entrambi i casi, permane uno smorzamento via via che l'onda si allontana dall'origine; esso però non segue una legge esponenziale, come nel precedente esempio 3, bensì risulta essere inversamente proporzionale alla distanza,  $r$ , dall'origine.

### 6.3 Equazioni delle onde nel dominio della frequenza

Se si torna a considerare il termine  $-\mu\sigma \partial \mathbf{a} / \partial t$ , si può intuire che si tratta di un termine di smorzamento della grandezza che si propaga, man mano che avanza.

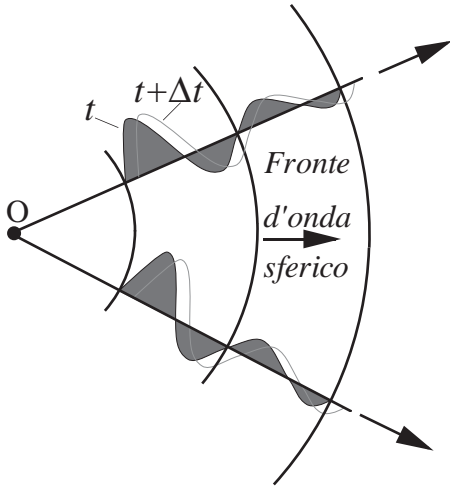


Figura 6.6

Il caso con perdite è però più chiaro se si ricorre alle equazioni di Maxwell nei fasori. Con la formale sostituzione di  $\partial / \partial t$  con  $j\omega$  si ha infatti:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} - j\omega \mu \sigma \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{H} - j\omega \mu \sigma \mathbf{H} = 0 \quad (6.27)$$

Con l'introduzione di  $\epsilon_c = \epsilon - j\sigma / \omega$  si hanno le equazioni:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu \epsilon_c \mathbf{E} = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{H} + \omega^2 \mu \epsilon_c \mathbf{H} = 0 \quad (6.28)$$

note come equazioni di Helmholtz. Ponendo:

$$k^2 = +\omega^2 \mu \epsilon_c$$

le equazioni precedenti si scrivono:

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0$$

dove al vettore  $\mathbf{A}$  può essere indifferentemente sostituito  $\mathbf{E}$  o  $\mathbf{H}$ , data la identità formale delle due equazioni. Considerando il caso in cui  $\mathbf{A}$  dipende solo da  $z$ , proiettando la equazione vettoriale lungo  $z$  e ponendo  $A = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_z$  si ha:

$$\frac{d^2 A}{dz^2} + k^2 A = 0$$

il cui integrale generale<sup>1</sup> é:

$$A(z) = a e^{-jkz} + b e^{+jkz} \quad (6.29)$$

<sup>1</sup> NOTA BENE: Un campo elettromagnetico ha  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  che devono soddisfare, in assenza di sorgenti, alle equazioni di Helmholtz: poichè però esse sono ottenute innalzando l'ordine di derivazione, una coppia di soluzioni  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  preso a caso, non è in generale un campo elettromagnetico. Conviene trovare solo un campo dalle equazioni di Helmholtz e il gemello dalle equazioni di Maxwell. Ciò vale evidentemente anche nel dominio del tempo.

Ponendo  $jk = \alpha + j\beta$ , chiaramente se  $\sigma = 0$  si ha  $\alpha = 0$  e  $\beta = k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ . La situazione delle varie grandezze si presenta come in Figura 6.7.

La prima soluzione può essere scritta nella forma:

$$A(z) = a e^{-(\alpha + j\beta)z}$$

Supponendo per semplicità che  $a$  sia reale, la componente sinusoidale che corrisponde ad  $A(z)$  vale:

$$\begin{aligned} A(z, t) &= \operatorname{Re} \left\{ a e^{-(\alpha + j\beta)z} e^{j\omega t} \right\} = a e^{-\alpha z} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega t - j\beta z} \right\} \\ &= a e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

Si tratta di una particolare soluzione del caso precedente (cosinusoidale, come imposto dalla partenza); si riconosce che in tal caso si ha ancora un'onda viaggiante con velocità:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}$$

detta **velocità di fase**, perché determina il movimento dell'argomento (fase) della funzione cosinusoidale. E' poi presente anche lo **smorzamento**, determinato da  $\alpha$ . Se  $\sigma = 0$  si ritrova:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = c \quad (6.30)$$

Considerando poi che si tratta di una funzione periodica con periodo  $2\pi$ , uno stesso valore si ripete, fissato un tempo  $t = t_0$  (fotografia del fenomeno in movimento) ad una distanza  $\Delta z$  pari a:

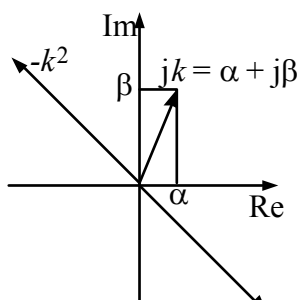


Figura 6.7

$$\beta \Delta z = 2\pi \quad \Delta z = \frac{2\pi}{\beta}$$

Questa distanza si indica con  $\lambda$  ed è la **lunghezza d'onda**. Evidentemente per mezzi senza perdite si ha:

$$\underbrace{\beta = \frac{2\pi}{\Delta z} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}}_{\text{sempre valida}} = \underbrace{\frac{c}{f} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}}_{\text{Solo per mezzi senza perdite}}$$

con  $f = \omega / 2\pi$  frequenza dell'oscillazione sinusoidale. Ponendo:

$$k = k_o \sqrt{\frac{\epsilon_c}{\epsilon}} = k_o \sqrt{1 - jR} \quad \text{con } R = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \text{ e } k_o = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

Si ricava:

$$\alpha = \frac{k_o}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + R^2} - 1} \quad \beta = \frac{k_o}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + R^2} + 1} \quad (6.32)$$

Si vede che, per  $\sigma/\omega\epsilon \ll 1$ ,  $\beta$  continua a mantenere praticamente il valore assunto in assenza di perdite, mentre, seppure piccola, viene a determinarsi una attenuazione  $\alpha$ . La condizione:

$$R = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1$$

definisce i **buoni dielettrici**. Ad esempio, fino a 18 Ghz, un materiale come l'allumina, materiale ceramico utilizzato come substrato per circuiti, dà valori di  $\alpha$  dell'ordine di 0.05 dB/m che è del tutto accettabile per le dimensioni (cm) dei microcircuiti elettronici, ma non sarebbe adatto (50 dB/Km) per collegamenti a grande distanza.

Un **buon conduttore** è invece un mezzo per cui  $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$ ; risulta in tal caso:

$$\sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \approx \alpha = \frac{1}{\delta} \quad (6.33)$$

In questo caso  $\delta$  è detto **spessore di penetrazione**: per un percorso  $z = \delta$  l'onda si riduce di  $e^{-1}$  che corrisponde a 8,7 dB; fornisce quindi una valutazione approssimata di quanto l'onda penetra all'interno del materiale conduttore. A titolo di esempio, per il rame alla frequenza di 1 GHz,  $\delta$  vale circa 2  $\mu\text{m}$ . Si ottiene quindi:

$$k = \frac{1-j}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \frac{1}{\delta}$$

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{\omega \mu_0}{k} = R_s (1+j)$$

dove si è introdotta la quantità  $R_s$ , che ha le dimensioni di un'impedenza e per i buoni conduttori risulta essere dell'ordine dei  $\text{m}\Omega$  anche per frequenze elevate (si ricorda che nel vuoto l'impedenza intrinseca è invece pari a  $120 \pi \Omega$ ). Dalle (6.30) e (6.31) si deduce anche:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \omega \delta \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 \pi \delta$$

con valori solitamente molto inferiori a quelli tipici dei dielettrici. Ad esempio, nel caso del rame visto precedentemente, la lunghezza d'onda a 1 GHz sarebbe pari a circa  $12.5 \mu\text{m}$ , molto minore della  $\lambda$  ( $\sim 0.3 \text{ m}$ ) che la stessa onda avrebbe nel vuoto; analogamente, nelle stesse condizioni, la velocità di fase assume un valore pari a  $12.5 \text{ km/s}$ , decisamente inferiore rispetto a quanto accadrebbe nel vuoto (dove sarebbe pari a  $c$ , cioè circa  $300000 \text{ km/s}$ ).

## 6.4 Un esempio di onda elettromagnetica nello spazio libero isotropo: l'onda piana TEM uniforme

Si assuma che l'intero spazio sia caratterizzato da una unica coppia di valori reali  $\epsilon$ ,  $\mu$ ; in assenza di sorgenti per il fasore  $\mathbf{E}$  del campo elettrico vale l'equazione di Helmholtz:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} = 0$$

Cerchiamo soluzioni per cui si abbia  $E_y = E_z = 0$  ed  $E_x$  funzione della sola  $z$ . Proiettando l'equazione precedente sull'asse  $x$  si ha:

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + \omega^2 \mu \epsilon E_x = 0$$

L'equazione che risulta è quella ben nota del moto armonico il cui integrale generale può esprimersi come:

$$E_x(z) = A e^{-j\omega\sqrt{\mu\epsilon}z} + B e^{+j\omega\sqrt{\mu\epsilon}z}$$

Posto  $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$  si ha l'espressione in funzione della costante di fase  $\beta$ :

$$E_x(z) = A e^{-j\beta z} + B e^{+j\beta z}$$

Separatamente le due soluzioni sono l'una un'onda **diretta** (A) e la seconda un'onda **regressiva** (B). Assumendo per semplicità A e B reali e tornando nel dominio del tempo:

$$\begin{aligned} e_x(z, t) &= \text{Re} \left\{ A e^{j\omega t - j\beta z} + B e^{j\omega t + j\beta z} \right\} = \\ &= A \cos(\omega t - \beta z) + B \cos(\omega t + \beta z) \end{aligned} \quad (6.34)$$

Questa è una classica soluzione di onda elettromagnetica. Se  $B = 0$  si parla di regime di **pura onda progressiva**, se  $A = 0$  di **pura onda regressiva**.

Se  $A$  e  $B$  sono diversi da zero si parla di presenza di **onda stazionaria**. In regime di pura onda diretta o riflessa (sinonimi della nomenclatura precedente) il valore del modulo di  $E_x(z)$  rimane costante e varia solo la fase. Non così in presenza di onda stazionaria. In particolare se  $A = B$  si ha ampiezza  $2A$  per  $z = 0$  e ampiezza  $0$  per  $\beta z = \pi/2$  cioè per  $z = \pi/2\beta = \lambda/4$  dove  $\lambda = 2\pi/\beta$  è la lunghezza d'onda, cioè il periodo spaziale di una singola onda diretta e riflessa.

In presenza di pura onda progressiva esistono superficie equifase che sono piani  $z = \text{costante}$  che geometricamente si muovono con la velocità:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = c$$

in tale situazione per la funzione  $e_x(z, t)$  si ha la relazione:

$$e_x(z, t) = e_x(z - ct)$$

tipica soluzione dell'equazione delle onde.

La relazione  $\omega = \omega(\beta)$  che qui assume la forma assai semplice  $\omega = c\beta$  è detta **relazione di dispersione**. Quando tale relazione è **lineare** il mezzo è detto **non dispersivo** perché la forma d'onda non varia durante la propagazione nel tempo. Il campo  $\mathbf{H}$  è poi facilmente determinabile dalle equazioni di Maxwell:

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E}$$

Nel nostro caso per l'onda diretta (per la riflessa le considerazioni sono analoghe):

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \mathbf{i}_y = \frac{\partial}{\partial z} A e^{-j\beta z} \mathbf{i}_y = -j\beta A e^{-j\beta z} \mathbf{i}_y$$

$$\mathbf{H} = \frac{\beta}{\omega\mu} A e^{-j\beta z} \mathbf{i}_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A e^{-j\beta z} \mathbf{i}_y = H_y \mathbf{i}_y$$

Poiché si ha  $\mathbf{i}_y = \mathbf{i}_z \times \mathbf{i}_x$  e la scelta degli assi è arbitraria, si può scrivere, in generale (con  $\mathbf{i}$  versore ortogonale ad  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  nella direzione di propagazione)

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \mathbf{i} \times \mathbf{E} \quad (6.35)$$

dove si é definita la **impedenza intrinseca del mezzo**

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (6.36)$$

La lunghezza d'onda e l'impedenza caratteristica del vuoto vengono indicate con  $\lambda_0$  e  $\eta_0$ . Si ha:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f}, \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 120 \pi \Omega \approx 377 \Omega$$

La  $\lambda_0$  può risultare di un certa utilità, in quanto lo spettro delle onde elettromagnetiche viene talora descritto proprio tramite la lunghezza d'onda  $\lambda_0$ , in luogo della frequenza<sup>2</sup>. Questa soluzione riempie uniformemente l'intero piano ortogonale a  $z$ . La mancanza, a rigore, di significato fisico di un'onda siffatta è compensata dal fatto che essa può ben approssimare localmente una soluzione reale, e, inoltre, attraverso la sovrapposizione di più onde piane si può giungere ad un campo fisicamente valido.

Le soluzioni qui trovate sono dette **TEM uniformi (Trasverso Elettro Magnetico)**, poiché ambedue i componenti del campo  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$ , appartengono al piano trasverso alla direzione di propagazione (normale ai piani equifase). Uniformi significa che l'ampiezza del campo è sempre la medesima (su ogni piano ortogonale alla direzione di propagazione).

Si noti che è possibile definire un vettore  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S} \triangleq \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} = \frac{|\mathbf{E}|^2}{2\eta} \mathbf{i} = \frac{\eta}{2} |\mathbf{H}|^2 \mathbf{i} \quad (6.37)$$

nella direzione di propagazione, il cui modulo è sufficiente per individuare il modulo di  $\mathbf{E}$  o di  $\mathbf{H}$ . Tale vettore è detto **vettore di Poynting** e, come si vedrà, il suo modulo ha il significato di densità di potenza irradiata.

---

Qualora il mezzo considerato abbia valori di  $\mu$  ed  $\varepsilon$  complessi, l'impedenza caratteristica del mezzo è sempre definita tramite la (6.36), mentre il vettore di Poynting può essere generalizzato come segue:

<sup>2</sup> Quest'uso è particolarmente diffuso in Ottica, perché nella regione dell'infrarosso e del visibile la lunghezza d'onda può essere misurata molto più facilmente della frequenza.

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} = \begin{cases} \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{2\eta^*} \mathbf{i} = \frac{|E|^2}{2\eta^*} \mathbf{i} \\ \frac{\eta \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*}{2} \mathbf{i} = \frac{\eta |H|^2}{2} \mathbf{i} \end{cases} \quad (6.38)$$

e quindi la parte reale della sua componente nel verso di propagazione, che come si vedrà al capitolo 7 coincide con la potenza che attraversa una superficie unitaria perpendicolare a  $\mathbf{i}$ , risulta essere data da:

$$W = \text{Re}\{\mathbf{S} \cdot \mathbf{i}\} = \begin{cases} \text{Re}\left\{\frac{1}{\eta^*}\right\} \frac{|E|^2}{2} \\ \text{Re}\{\eta\} \frac{|H|^2}{2} \end{cases} \quad [\text{W/m}^2] \quad (6.39)$$

Verificato poi che l'argomento di  $\eta = \mu_c / \epsilon_c$  è sempre compreso fra  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ , ne consegue che la parte reale dell'impedenza caratteristica di un mezzo passivo è sempre positiva o nulla e quindi risulta sempre  $W \geq 0$ . Il corrispondente significato fisico è che le onde piane uniformi trasportano energia nella direzione e nel verso di propagazione.

## 6.5 L'onda piana TEM uniforme: polarizzazione

L'onda piana TEM non ha un reale significato fisico. Essa può essere utile in molte applicazioni, in quanto consente talora di approssimare localmente una soluzione reale, talaltra di esprimere un campo fisicamente valido tramite la sovrapposizione di più onde piane. D'altra parte, accanto all'approccio deduttivo utilizzato al paragrafo precedente, in cui si è esaminato il problema generale in tutto lo spazio, è possibile utilizzare un approccio opposto, di tipo induttivo, restringendo l'analisi solo ad una regione limitata, in cui valgano le stesse ipotesi iniziali di assenza di sorgenti e mezzo isotropo ed omogeneo, e verificare se, e sotto quali condizioni, le equazioni di Maxwell ammettono, come soluzioni particolari, le onde piane uniformi, nella forma generica vista nell'esempio 4 del paragrafo 6.2. Ipotizziamo perciò che  $\mathbf{E}$  possa essere posto nella forma:

$$\mathbf{E} = \mathbf{p}A \quad (6.40)$$



essendo  $\mathbf{p}$  un generico vettore di polarizzazione costante, mentre assumiamo che  $A$  rappresenti un'onda piana uniforme che si propaga nella direzione del versore  $\mathbf{i}$ , con la velocità di fase  $v=\omega/\beta$  e sia perciò esprimibile tramite una funzione d'onda del tipo (6.23). Iniziamo con il calcolare il primo membro dell'equazione di Maxwell (5.13):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{p} a \times \nabla \left( e^{-\gamma \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}} \right) = -\mathbf{p} a \times (-\gamma \mathbf{i}) e^{-\gamma \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}} = -\gamma \mathbf{i} \times \mathbf{p} A \quad (6.41)$$

Eguagliamo la (6.41) al secondo membro della (5.13), ottenendo:

$$\mathbf{H} = \mathbf{i} \times \mathbf{p} \frac{A}{\eta} \quad (6.42)$$

in cui si è introdotta la quantità

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (6.43)$$

Confrontando le due espressioni di  $\mathbf{E}$  e di  $\mathbf{H}$ , si nota come esse siano del tutto analoghe se si sostituisce il vettore di polarizzazione  $\mathbf{p}$  con  $\mathbf{i} \times \mathbf{p}$ , ed il fasore  $A$  con  $A/\eta$ . E' immediato quindi ricavare il primo membro dell'altra equazione di Maxwell, la (5.14), ricalcando i passaggi analitici sviluppati per la (6.41):

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\gamma \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{p}) \frac{A}{\eta} = -\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{p}) \frac{\gamma^2}{j\omega\mu} A \quad (6.44)$$

La sostituzione nella relativa equazione, consente di ottenere, dopo le opportune semplificazioni:

$$\omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{p} = \gamma^2 \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{p}) \quad (6.45)$$

E' immediato notare come il vettore di polarizzazione deve essere ortogonale alla direzione di propagazione, in quanto il secondo membro è ortogonale a  $\mathbf{i}$  (a causa del prodotto vettoriale); perciò  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{p} = 0$ . Da ciò si ricava immediatamente che  $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{p}) = -\mathbf{p}$  e per sostituzione nella (6.45) si ha:

$$\omega^2 \mu \varepsilon = -\gamma^2 \quad (6.46)$$

e deve quindi aversi:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu} = jk = \alpha + j\beta \quad (6.47)$$

Per sostituzione diretta nella (6.43) dei primi due termini della (6.46), si ottiene, per la grandezza  $\eta$  ivi introdotta, la relazione  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ , che mostra come essa coincida proprio con l'impedenza caratteristica del mezzo, già introdotta nella (6.36). Sostituendo quindi nella (6.23) il terzo membro della (6.47) e riportando tale risultato nelle (6.40) e (6.42), otteniamo le seguenti soluzioni particolari delle equazioni di Maxwell:

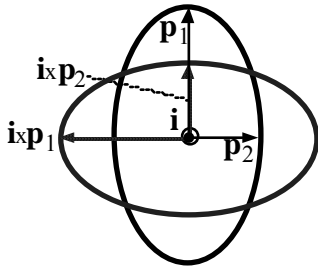


Figura 6.8a

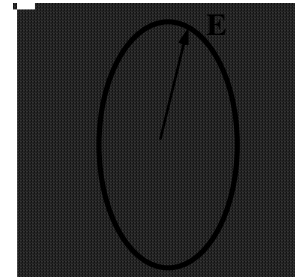


Figura 6.8b

$$\mathbf{E} = \mathbf{p} a e^{-jk\mathbf{i}\cdot\mathbf{r}} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{i} \times \mathbf{p} \frac{a}{\eta} e^{-jk\mathbf{i}\cdot\mathbf{r}} \qquad (6.48)$$

Vale la pena ricordare che tali espressioni per il campo elettrico e magnetico rappresentano onde piane uniformi che si propagano nella direzione individuata dal versore  $\mathbf{i}$ . Esse risultano quindi completamente definite dalle tre grandezze  $a$ ,  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{p}$  che identificano rispettivamente l'ampiezza, costante, la direzione di propagazione ed il vettore di polarizzazione; se si eccettua il fatto che  $\mathbf{p}$  deve giacere nel piano ortogonale ad  $\mathbf{i}$ , tali grandezze risultano del tutto generiche. Il vettore complesso  $\mathbf{i} \times \mathbf{p}$ , che evidentemente è un versore ortogonale ad  $\mathbf{i}$  ed a  $\mathbf{p}$ , è il vettore di polarizzazione di  $\mathbf{H}$  e deve giacere anch'esso nel piano ortogonale ad  $\mathbf{i}$ . Poichè entrambi i componenti del campo,  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$ , appartengono al piano trasverso alla direzione di propagazione e sono fra loro ortogonali, tale soluzione rappresenta un'onda TEM. Le costanti  $\alpha$  e  $\beta$  introdotte nel quarto membro (6.47) rappresentano dunque rispettivamente le costanti di attenuazione e di fase di tali onde piane uniformi. Consideriamo ora la polarizzazione di tali onde: come ovvio per le (6.48), l'ellisse di polarizzazione di  $\mathbf{E}$  è completamente individuata da  $\mathbf{p}$  ed analogamente l'ellisse di polarizzazione di  $\mathbf{H}$  da  $\mathbf{i} \times \mathbf{p}$ .

Tali stati di polarizzazione sono uguali in ogni punto dello spazio, in quanto abbiamo assunto che  $\mathbf{p}$  sia costante. Esprimendo  $\mathbf{p}$  tramite i due vettori reali  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$  (si ricordi che è sempre possibile esprimere  $\mathbf{p}$  come  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1 + j\mathbf{p}_2) e^{-i\delta}$ ) che rappresentano i semiassi dell'ellissi di polarizzazione di  $\mathbf{p}$  (vedi Figura 6.8a), è immediato ottenere i semiassi dell'ellissi di polarizzazione di  $\mathbf{i} \times \mathbf{p}$  come  $\mathbf{i} \times \mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{i} \times \mathbf{p}_2$ ; ciò mostra, come evidenziato nella Figura 6.8a qui a lato, come quest'ultima ellisse differisca da quella precedente per una rotazione di  $90^\circ$ , come dettato dalle regole del prodotto vettoriale.

Dunque  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$ , se si eccettua tale rotazione di  $90^\circ$ , risultano avere lo stesso tipo di polarizzazione (Figura 6.8b). Effettuando le seguenti posizioni:

$$\eta = |\eta| e^{j\varphi} \quad a = |a| e^{j\varphi_a} \quad \chi = \delta + \varphi_a$$

nonché ricordando la (6.47) assieme alla definizione di lunghezza d'onda ( $\lambda=2\pi/\beta$ ) e definendo l'ascissa  $z = \mathbf{i} \cdot \mathbf{p}$  (come visto in Figura 6.5), dalle (6.48) si possono facilmente desumere le espressioni dei campi istantanei:

$$\mathbf{E} = |a| e^{-\alpha z} \left( \mathbf{p}_1 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} + \chi\right) - \mathbf{p}_2 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} + \chi\right) \right) \quad (6.49)$$

$$\mathbf{H} = \frac{|a| e^{-\alpha z}}{|\eta|} \left( \mathbf{i} \times \mathbf{p}_1 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} + \chi - \varphi\right) - \mathbf{i} \times \mathbf{p}_2 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} + \chi - \varphi\right) \right) \quad (6.50)$$

Se assumiamo il campo elettrico ed il campo magnetico polarizzati linearmente (quindi ognuno di essi oscilla secondo direzioni ortogonali a quella di propagazione), è facile descrivere graficamente l'andamento spaziale del campo, attenuantesi lungo una certa direzione  $z$ , in un istante dato, così come mostrato in Figura 6.9. Estendendo le considerazioni energetiche svolte al termine del paragrafo 6.4, dalla prima delle espressioni (6.48) si ha:

$$|E|^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}^* a e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} a^* e^{-\alpha z} e^{j\beta z} = |a|^2 e^{-2\alpha z} \quad (6.51)$$

L'espressione della densità di potenza  $W$  fornita dalla prima delle (6.39), consente di dedurre facilmente la dipendenza funzionale dall'ascissa  $z$ :

$$W(z) = W(0) e^{-2\alpha z} \quad (6.52)$$

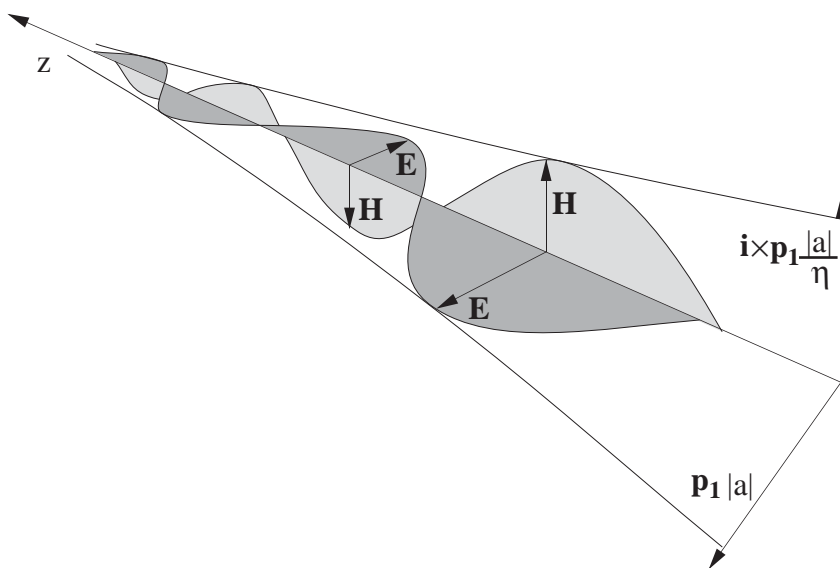


Figura 6.9

da cui si evince come la potenza decresca con legge esponenziale, qualora la costante di attenuazione  $\alpha$  non sia nulla. Come già sviluppato in precedenza, l'attenuazione subita da un fronte d'onda che si sia propagato per una distanza  $d$  è data da:

$$\frac{W(z)}{W(z+d)} = e^{2\alpha d}$$

linearmente dipendente dalla distanza qualora essa venga espressa in dB, come già visto nella (6.22) (Attenuazione in dB =  $\alpha_{db} d$  [dB]).

## 6.6 Onde piane: nomenclatura e classificazioni

Consideriamo un fasore del tipo:

$$A = a e^{-(\alpha \mathbf{i} + j\beta \mathbf{i}') \cdot \mathbf{r}} = a e^{-\alpha \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}} e^{-j\beta \mathbf{i}' \cdot \mathbf{r}} = a e^{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}} e^{-j\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}} \quad (6.54)$$

dove  $a$  è una costante (che qui supporremo reale per semplicità, ma che generalmente è complessa),  $\alpha$  e  $\beta$  sono costanti scalari non negative;  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{i}'$  sono versori reali costanti e non coincidenti, mentre  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sono due vettori definiti come modulo e direzione rispettivamente da  $\alpha, \mathbf{i}$  e  $\beta, \mathbf{i}'$ . Il fasore  $A$  presenta caratteristiche diverse da quelle considerate nel paragrafo 6.2: innanzitutto è un'onda piana, perché le superfici equifase coincidono con i piani ortogonali alla direzione individuata da  $\mathbf{i}$ ; inoltre essa si propaga nella direzione  $\mathbf{i}$  con la velocità  $v = \omega/\beta$ , come si può verificare calcolando il vettore d'onda  $\mathbf{B}$  associato; infine l'ampiezza è costante sui piani ortogonali ad  $\mathbf{i}'$ , e quindi l'onda si attenua nella direzione  $\mathbf{i}'$  con la costante di attenuazione  $\alpha$  (vedi Figura 6.10). Poiché i due vettori  $\mathbf{i}$  ed  $\mathbf{i}'$  non sono coincidenti, è immediato notare che l'ampiezza dell'onda non è costante sui piani equifase e pertanto l'onda considerata non è uniforme.

Seguendo gli stessi ragionamenti sviluppati nel paragrafo 6.5, possiamo assumere per ipotesi che il campo elettrico  $\mathbf{E}$  sia esprimibile come

$$\mathbf{E} = \mathbf{p} A \quad (6.55)$$

e verificare se e sotto quali condizioni esso soddisfi alle equazioni di Maxwell. Innanzitutto è immediato verificare che una tale formulazione è formalmente analoga alla (6.23), utilizzata nel caso delle onde piane uniformi; ovviamente i due fasori  $A$  che compaiono nella (6.40) e nella (6.55) sono diversi; in particolare il primo è

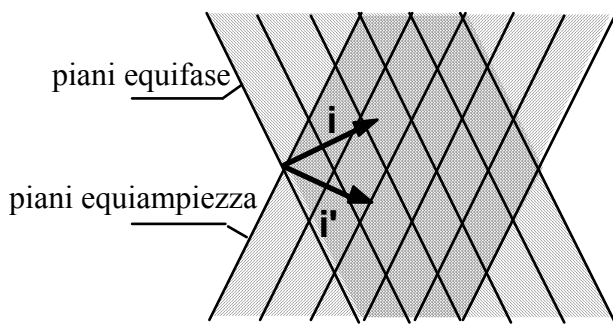


Figura 6.10

espresso dalla (6.23), il secondo dalla (6.54). Si può notare però che l'unica differenza è nel vettore che c'è all'esponente: per l'onda piana uniforme si tratta di un vettore costante  $\boldsymbol{\gamma} \mathbf{i} = \alpha \mathbf{i} + j\beta \mathbf{i}$ , mentre in questo caso si ha un vettore costante  $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{i}' + j\beta \mathbf{i} = \mathbf{a} + j\mathbf{b}$ ,

determinato dalla composizione dei due vettori  $\mathbf{a}$ , detto vettore di attenuazione, e  $\mathbf{b}$ , detto vettore di fase. Pertanto si possono ripetere in modo del tutto analogo gli stessi passaggi analitici sviluppati all'inizio del paragrafo 6.5 e che hanno portato a stabilire le condizioni sotto le quali la generica onda piana uniforme soddisfa le equazioni di Maxwell. Nel caso dell'onda piana rappresentata dalla (6.54), si trovano le seguenti condizioni:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{p} = 0 \quad k^2 \mathbf{p} = \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{p}) \quad k^2 = \omega^2 \varepsilon_c \mu \quad (6.56a,b,c)$$

Per la (6.56a), la (6.56b) diventa  $(\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{p})) = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{p}$ :

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2j\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -k^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon_c \quad (6.57)$$

mentre l'espressione del campo elettrico diventa:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}} e^{-j\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}} \quad (6.58)$$

con  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{p} a..$  Poiché, come visto nel paragrafo 6.5,  $\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{E}$ , per il campo magnetico si ha:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{E}}{j\omega\mu} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{E}_0}{j\omega\mu} e^{-\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{H}_0 e^{-\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{H}_0 e^{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}} e^{-j\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}} \quad (6.59)$$

con  $\mathbf{H}_0$  dato da:

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{E}_0}{j\omega\mu} \quad (6.60)$$

Osservando le equazioni (6.58) e (6.59), si nota immediatamente che i luoghi dei punti in cui è  $|\mathbf{E}| = \text{costante}$  (e anche  $|\mathbf{H}| = \text{costante}$ ), sono individuati dalla famiglia di equazioni:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = \text{costante} \quad (6.61)$$

e pertanto sono i piani perpendicolari al vettore d'attenuazione  $\mathbf{a}$ , giustificando così la denominazione di **piani equiampiezza** dell'onda.

Parimenti si constata che i luoghi dei punti in cui la fase delle varie componenti di  $\mathbf{E}$  (o  $\mathbf{H}$ ) risulta costante sono individuati dalla famiglia di equazioni:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{r} = \text{costante} \quad (6.62)$$

e pertanto sono i piani perpendicolari al vettore di fase  $\mathbf{b}$ , da cui il nome di **piani equifase** dell'onda, o anche **fronti** dell'onda stessa. Si è già visto in apertura di questo capitolo che, per il fatto che i suoi fronti d'onda sono piani, un'onda di questo tipo è detta onda piana.

La (6.55a) non è, come potrebbe sembrare a prima vista, una condizione di ortogonalità, in quanto  $\mathbf{E}$  (parallelo a  $\mathbf{p}$ ) e  $\mathbf{u}$ , essendo vettori complessi, la loro ortogonalità sarebbe espressa dalla condizione:  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}^* = 0$ . In conclusione, un campo del tipo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{p} a e^{-\alpha \mathbf{i}' \cdot \mathbf{r}} e^{-j\beta \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}} \quad (6.63)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{p}}{j\omega\mu} a e^{-\alpha \mathbf{i}' \cdot \mathbf{r}} e^{-j\beta \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}} \quad (6.64)$$

è soluzione delle equazioni di Maxwell se  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  soddisfano le (6.57) e se  $\mathbf{p}$  soddisfa la (6.55a), cioè giace in un piano ortogonale al vettore costante  $\mathbf{u}$ . La polarizzazione di  $\mathbf{E}$ , che è definita da  $\mathbf{p}$ , non è in questo caso uguale a quella di  $\mathbf{H}$ ; infatti, come si nota dalla (6.64), la polarizzazione di  $\mathbf{H}$  è determinata da  $\mathbf{u} \times \mathbf{p}$  ed  $\mathbf{u}$  è un vettore complesso, che altera quindi lo stato di polarizzazione<sup>3</sup>. Questo comporta che l'onda (6.63)-(6.64) non può mai essere un'onda TEM perché ciò richiederebbe che  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  siano entrambi ortogonali ad  $\mathbf{i}$ , mentre essi risultano entrambi ortogonali ad  $\mathbf{u}$  ( $\mathbf{E}$  per la (6.55a),  $\mathbf{H}$  perché parallelo ad  $\mathbf{u} \times \mathbf{p}$ ). Possono esistere invece onde TE (Trasversali Elettriche, in cui solo  $\mathbf{E}$  è ortogonale ad  $\mathbf{i}$ ) oppure onde TM (Trasversali Magnetiche, in cui solo  $\mathbf{H}$  è trasversale ad  $\mathbf{i}$ ).

In analogia alla relazione definita dai primi due membri della (6.59), introducendo l'espressione di  $\mathbf{H}$  nell'altra equazione di Maxwell, si ottiene l'analogo relazione per il campo  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = \frac{\nabla \times \mathbf{H}}{j\omega\epsilon} = -\frac{\mathbf{u} \times \mathbf{H}}{j\omega\epsilon} = \frac{\mathbf{H} \times \mathbf{u}}{j\omega\epsilon} \quad (6.65)$$

Come già accennato, se i vettori  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{u}$  fossero reali, le relazioni precedenti permetterebbero di affermare che  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{u}$  formano una terna trirettangola di vettori ortogonali; ciò peraltro non è vero (in generale), poiché si tratta di vettori complessi. In due casi particolari la affermazione precedente risulta comunque verificata:

<sup>3</sup> Ad esempio, nel caso delle onde TE, il vettore  $\mathbf{E}$  ha polarizzazione rettilinea, in quanto è ortogonale al piano definito da  $\mathbf{i}$  ed  $\mathbf{i}'$ , mentre il vettore  $\mathbf{H}$  ha polarizzazione definita dai due vettori in quadratura  $\mathbf{i} \times \mathbf{p}$  ed  $\mathbf{i}' \times \mathbf{p}$  e perciò è ellittica nel piano ortogonale a  $\mathbf{p}$ , cioè quello definito da  $\mathbf{i}$  ed  $\mathbf{i}'$ .

- 1) se  $\mathbf{u} = -\mathbf{u}^*$ , cioè se il vettore di propagazione è immaginario puro, l'ortogonalità è assicurata: ciò si verifica per un mezzo senza perdite;
- 2) se  $\mathbf{u}$  è parallelo ad  $\mathbf{u}^*$ ; se i vettori  $\mathbf{u} = \mathbf{a} + j \mathbf{b}$  e  $\mathbf{u}^* = \mathbf{a} - j \mathbf{b}$  hanno la stessa direzione ciò comporta che  $\mathbf{a}$  è parallelo a  $\mathbf{b}$  e quindi ricadiamo nel caso già esaminato con la (6.23) e la (6.40) di onda piana uniforme (piani equifase coincidenti con quelli equiampiezza).

Si noti, ad ogni buon conto, che le relazioni che intercorrono tra  $\mathbf{u}$  e il campo elettromagnetico  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  sono tali da togliere una parte di arbitrarietà alle soluzioni determinate.

Di grande importanza è la distinzione fra il caso in cui  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sono paralleli, e perciò i piani equifase ed i piani equiampiezza coincidono, e quello in cui ciò non avviene. Si stabilisca di indicare con  $\alpha + j\beta$  quella radice di  $-\omega^2\mu\varepsilon_c$  che cade nel primo quadrante del piano complesso, ossia tale per cui  $\beta > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ , ove l'uguaglianza vale nel caso di mezzo privo di perdite. Si è già notato a proposito delle onde piane TEM che le quantità indicate con  $\alpha$  e  $\beta$  vengono dette, rispettivamente, costante d'attenuazione intrinseca del mezzo e costante di fase intrinseca del mezzo. La (6.57) può allora riscriversi separando le parti reali e immaginarie:

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon \quad (6.66)$$

$$2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \omega \mu \sigma \quad (6.67)$$

Dal confronto fra i segni dei termini della (6.66) segue  $\beta^2 > \alpha^2$  e quindi, in particolare,  $\beta$  strettamente maggiore di zero ( $\beta > 0$ ): non possono esistere soluzioni del tipo (6.63)-(6.64) in cui la fase sia costante nello spazio ( $\beta = 0$ ).

La (6.67) fornisce informazioni diverse, a seconda che si tratti di un mezzo privo di perdite ( $\sigma = 0$ ), oppure con perdite ( $\sigma \neq 0$ ); è dunque opportuno mantenere distinti questi due casi.

*A) Mezzo privo di perdite*

La (6.67) dà luogo all'eguaglianza seguente:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (6.68)$$

che è soddisfatta per:

$$\mathbf{a} = 0 \quad \text{e quindi } \beta = k \quad \text{oppure per}^4: \quad (6.69)$$

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \quad \text{con } \mathbf{a} \neq 0 \quad \text{e quindi } \beta > k \quad (6.70)$$

ove il simbolo  $\perp$  indica che i vettori  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  sono perpendicolari fra loro.

Quando vale la (6.69), si ha  $|\mathbf{E}| = \text{costante}$  e  $|\mathbf{H}| = \text{costante}$  in tutto lo spazio; dunque qualsiasi piano è un piano equiampiezza per l'onda considerata. Nulla vieta (anche per analogia con il seguente caso con perdite) di assumere convenzionalmente che i piani equiampiezza coincidano con i piani equifase. Un'onda siffatta è la solita onda piana uniforme che si propaga senza attenuazione nella direzione di  $\mathbf{i}$ .

Quando invece vale la (6.70), i **piani equifase** sono **ortogonali ai piani equiampiezza**. Un'onda piana siffatta viene chiamata **evanescente** (Figura 6.11) in quanto la sua ampiezza decresce esponenzialmente secondo piani ortogonali alla direzione di propagazione. Nei paragrafi successivi si illustrerà l'importanza fisica di queste onde, che a prima vista potrebbero sembrare pure curiosità matematiche. Poiché esse hanno  $\beta = \sqrt{\alpha^2 + k^2} > k$ , il valore assunto dalla velocità di fase  $v$  ( $v = \omega/\beta$ ) e dalla lunghezza d'onda  $\lambda$  ( $\lambda = 2\pi/\beta$ ) è sempre inferiore a quello delle onde piane uniformi ( $v = \omega/k$  e  $\lambda = 2\pi/k$ ).

In particolare le onde evanescenti sono necessarie per descrivere i fenomeni di propagazione guidata con confinamento di energia in una regione limitata dello spazio. Se si calcola il vettore di Poynting<sup>5</sup> nella direzione di  $\mathbf{a}$  si verifica infatti che esso è immaginario puro: non c'è dunque flusso di energia in questa direzione. Ciò giustifica il termine **confinamento**.

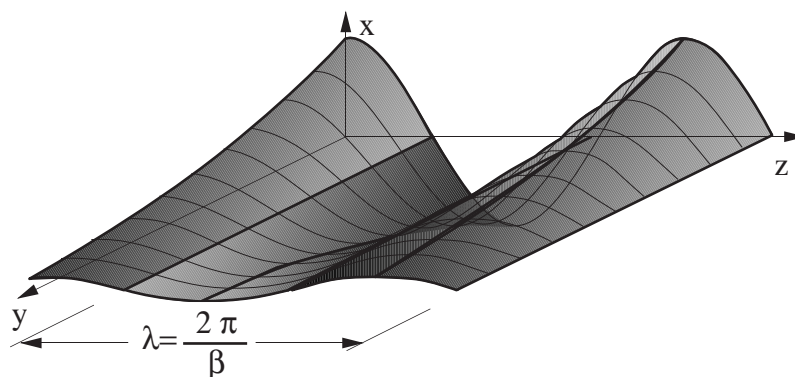


Figura 6.11 Esempio di onda evanescente

<sup>4</sup> In effetti un vettore nullo può considerarsi perpendicolare ad un qualunque altro vettore, e dunque la soluzione (6.69) potrebbe considerarsi un caso particolare della (6.70): purtuttavia è utile distinguere il caso particolare  $\mathbf{a} = 0$ , per il suo importante significato fisico.

<sup>5</sup> Rammentiamo nuovamente che la sua parte reale ci fornisce una misura della quantità di energia che viene trasportata nel verso indicato dal vettore, come sarà illustrato più accuratamente nel Capitolo 7.



## B) Mezzo con perdite

La (6.67) dà luogo alla disuguaglianza:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0 \quad (6.71)$$

che indica che inevitabilmente il vettore  $\mathbf{a}$  non è nullo, ed inoltre che esso forma con il vettore  $\mathbf{b}$  un angolo minore (in senso stretto) di  $\pi/2$ . Nel caso particolare in cui  $\mathbf{a}$  sia parallelo a  $\mathbf{b}$  (piani equifase coincidenti con i piani equiampiezza), l'onda si dice ancora **piana uniforme**; invece quando  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  formano un angolo non nullo, l'onda si dice **piana dissociata**.

## ESERCIZI

- 1 Verificare che in coordinate sferiche e qualora la funzione,  $a(r,t)$ , non dipenda dalle coordinate  $\varphi$  e  $\vartheta$  l'espressione (6.4) diventa la seguente:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial a}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0$$

- 2 Mostrare che la precedente equazione ha soluzioni del tipo:

$$\frac{1}{r} f(r - ct) \quad \frac{1}{r} f(r + ct)$$

- 3 Calcolare la lunghezza d'onda  $\lambda$ , la velocità di fase  $v$ , il coefficiente d'attenuazione  $\alpha$  e l'impedenza intrinseca del mezzo  $\eta$  per i materiali di tabella 5.1 e per valori di frequenza pari a 10 Hz, 1 MHz ed 1 GHz.
- 4\* In un mezzo con perdite, il campo elettrico ed il campo magnetico possono essere in fase fra loro?
- 5 Fornire l'espressione di un'onda piana (polarizzata linearmente secondo  $z$ ) che si propaga secondo una direzione appartenente al piano  $xy$  e formante un angolo di  $30^\circ$  con l'asse  $x$ , nel caso di propagazione nel vuoto e in acqua di mare.
- 6\* La costante dielettrica  $\epsilon$  dell'acqua è circa pari ad 80 volte quella dell'aria, mentre la permeabilità magnetica è praticamente uguale ad 1 per entrambi i mezzi. Dire se la velocità di propagazione di un'onda elettromagnetica è maggiore nell'acqua o nell'aria.

Qual è il suo valore nei due mezzi? Se un'onda piana si propaga nei due mezzi con lo stesso valore di campo elettrico  $\mathbf{E}$ , il corrispondente campo magnetico  $\mathbf{H}$  avrà modulo maggiore nell'aria o nell'acqua? Cosa si può dire circa il modulo del vettore di Poynting?

- 7 Siano dati tre differenti mezzi di propagazione, aventi  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$  mentre si abbia  $\sigma = 0$ ,  $\sigma = 10^{-8} \omega \varepsilon$  e  $\sigma = 10^{-8} \omega^2 \varepsilon$  per quanto riguarda la conducibilità di ognuno.
- determinare per ognuno di essi la costante di fase, la costante di propagazione e la velocità di fase.
  - dire per quali intervalli di frequenza essi sono buoni dielettrici oppure buoni conduttori.
- 8 Sia data l'antenna 1 posta nell'origine del riferimento cartesiano Oxyz, come mostrato in figura. L'antenna 2, di pari altezza, è posta nel punto di ascissa  $x=d$ . L'onda emessa dall'antenna 1 è polarizzata linearmente nella direzione di  $\mathbf{i}_y$  e ad una frequenza di 100 KHz. Sapendo che le costanti elettromagnetiche valgono  $\varepsilon = 80 \varepsilon_0$ ;  $\mu = \mu_0$ ;  $\sigma = 1 \text{ S/m}$ , trovare:
- il valore di  $\alpha$  e di  $\beta$ , nonché quello dell'impedenza intrinseca  $\eta$ .
  - la lunghezza d'onda  $\lambda$ ;
  - l'espressione di  $\mathbf{E}$  e di  $\mathbf{H}$  per l'onda che incide su 2.
  - inoltre il valore massimo di  $\mathbf{E}$  e di  $\mathbf{H}$ , sapendo che ad 1 km di distanza il modulo di  $\mathbf{E}$  vale  $10 \text{ dB}\mu\text{V/m}$  e che  $d$  è pari a 10 km.
  - come i punti c e d, per l'antenna 3, posta alla stessa distanza  $d$ .

