
Capitolo 5

LE EQUAZIONI DI MAXWELL PER GRANDEZZE SINUSOIDALI

5.1 I fasori

L'insieme di equazioni viste precedentemente sono delle equazioni differenziali che collegano variazioni temporali e spaziali delle varie quantità del campo in un punto dello spazio. Per quanto riguarda la dipendenza dal tempo, all'interno di questo corso avremo a che fare fondamentalmente con grandezze che variano in modo sinusoidale nel dominio del tempo (**campi monocromatici o armonici**). Infatti, nella maggior parte delle applicazioni delle onde radio (radiocomunicazioni, radar, ecc..) i campi sono, almeno approssimativamente, di questo tipo; in altri termini, le sorgenti del campo elettromagnetico o variano nel tempo con legge sinusoidale, oppure la banda relativa di frequenza $\Delta\omega/\omega$ (ω è la pulsazione centrale di portante) è talmente piccola che la maggior parte della informazione sulle caratteristiche dei campi può essere ottenuta considerando il comportamento di un segnale alla frequenza di centro banda. Inoltre, attraverso l'applicazione dell'analisi di Fourier (per i quali si rimanda ad altri corsi), lo studio dei campi non armonici, sia periodici che aperiodici, può essere sviluppato mediante l'analisi delle loro componenti spettrali, ciascuna delle quali oscilla con legge sinusoidale.

Come per i circuiti, anche nella teoria delle onde conviene rappresentare le grandezze che variano in modo sinusoidale tramite quantità complesse. Infatti, nell'ipotesi che le grandezze, ed in particolare i vettori, abbiano una dipendenza dal

tempo di tipo sinusoidale con una certa pulsazione ω , un generico campo vettoriale (nell'esempio $\mathbf{e}(t)$), espresso attraverso le sue componenti cartesiane, ha la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) &= E_{xM}(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \vartheta_x(\mathbf{r})] \mathbf{i}_x \\ &+ E_{yM}(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \vartheta_y(\mathbf{r})] \mathbf{i}_y \\ &+ E_{zM}(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \vartheta_z(\mathbf{r})] \mathbf{i}_z\end{aligned}\quad (5.1)$$

Nella (5.1) si è messo in evidenza quali sono le grandezze che sono costanti in tutto lo spazio e quelle che invece dipendono dalle coordinate spaziali (il punto in cui ci si è posti è individuato dal vettore di posizione \mathbf{r}); in particolare è immediato notare che le ampiezze e le fasi delle componenti sono in generale funzione della posizione, mentre la pulsazione ω , che caratterizza l'oscillazione nel tempo, è identica in ogni punto dello spazio; ciò suggerisce di riscrivere la (5.1) come segue:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) &= \left\{ E_{xM} \cos \vartheta_x \mathbf{i}_x + E_{yM} \cos \vartheta_y \mathbf{i}_y + E_{zM} \cos \vartheta_z \mathbf{i}_z \right\} \cos \omega t + \\ &- \left\{ E_{xM} \sin \vartheta_x \mathbf{i}_x + E_{yM} \sin \vartheta_y \mathbf{i}_y + E_{zM} \sin \vartheta_z \mathbf{i}_z \right\} \sin \omega t \\ &= \mathbf{E}_r \cos \omega t - \mathbf{E}_i \sin \omega t\end{aligned}\quad (5.2)$$

avendo posto:

$$\mathbf{E}_r = E_{xM} \cos \vartheta_x \mathbf{i}_x + E_{yM} \cos \vartheta_y \mathbf{i}_y + E_{zM} \cos \vartheta_z \mathbf{i}_z \quad (5.3)$$

$$\mathbf{E}_i = E_{xM} \sin \vartheta_x \mathbf{i}_x + E_{yM} \sin \vartheta_y \mathbf{i}_y + E_{zM} \sin \vartheta_z \mathbf{i}_z \quad (5.4)$$

E' immediato notare che i vettori \mathbf{E}_r ed \mathbf{E}_i sono reali ed indipendenti dal tempo, cioè hanno una orientazione ed un modulo che non variano nel tempo (anche se potranno ovviamente variare nello spazio, cioè al cambiare del vettore \mathbf{r} , come già visto nella (5.1) per le grandezze che li determinano). Si definisce **fasore**, o vettore complesso rappresentativo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_r + j \mathbf{E}_i \quad (5.5)$$

Tale vettore complesso può anche essere espresso tramite le sue componenti, anch'esse complesse, secondo gli assi coordinati x,y,z:

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i}_x + E_y \mathbf{i}_y + E_z \mathbf{i}_z \quad (5.6)$$

$$E_x = E_{xM} e^{j\theta_x} \quad E_y = E_{yM} e^{j\theta_y} \quad E_z = E_{zM} e^{j\theta_z} \quad (5.7)$$

E' bene notare, ancora una volta, che $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$, ossia che, in generale, il fasore, così come il campo elettrico, é un vettore funzione del punto; sussiste poi la seguente relazione diretta fra fasore e campo:

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right\} \quad (5.8)$$

come consegue immediatamente dalla (5.2) e dalla (5.5).

Dalla (5.8) si evince come, fissata la pulsazione ω , esiste una corrispondenza biunivoca fra campi e fasori; per passare dal fasore complesso al campo sinusoidale nel dominio del tempo é infatti sufficiente moltiplicare il fasore per $e^{j\omega t}$ e prendere la parte reale; il passaggio inverso é dato dalle due relazioni (5.3) e (5.4). Se invece si considerano le componenti secondo gli assi coordinati, i moduli e gli argomenti dei fasori coincidono con le ampiezze e le fasi dei vettori reali, come si può vedere dalla (5.1) e dalla (5.7).

Naturalmente la rappresentazione mediante fasori è possibile non solo per i vettori (**fasori vettoriali**), ma anche per i campi sinusoidali di tipo scalare, come ad esempio la densità di carica (**fasori scalari**).

5.2 Equazioni di Maxwell nei fasori

Inserendo nelle equazioni di Maxwell nel dominio del tempo la notazione di fasore, si ha:

$$\nabla \times \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E} e^{j\omega t} \right\} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{B} e^{j\omega t} \right\} \quad (5.9)$$

$$\nabla \times \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{H} e^{j\omega t} \right\} = +\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{D} e^{j\omega t} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{J} e^{j\omega t} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{J}_i e^{j\omega t} \right\} \quad (5.10)$$

$$\nabla \cdot \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{D} e^{j\omega t} \right\} = +\operatorname{Re} \left\{ \rho e^{j\omega t} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \rho_i e^{j\omega t} \right\} \quad (5.11)$$

$$\nabla \cdot \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{B} e^{j\omega t} \right\} = 0 \quad (5.12)$$

Poiché l'operatore parte reale $\operatorname{Re}\{\}$ commuta con l'operatore di derivazione e la dipendenza dal tempo è contenuta nel solo fattore $e^{j\omega t}$, è possibile effettuare la operazione di derivata e, raccogliendo il fattore comune, si arriva dunque alle equazioni:

$$\operatorname{Re} \left\{ (\nabla \times \mathbf{E}) e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ -j\omega \mathbf{B} \right\} e^{j\omega t}$$

$$\operatorname{Re} \left\{ (\nabla \times \mathbf{H}) e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J} + \mathbf{J}_i \right\} e^{j\omega t}$$

$$\operatorname{Re} \left\{ (\nabla \cdot \mathbf{D}) e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ (\rho + \rho_i) e^{j\omega t} \right\}$$

$$\operatorname{Re} \left\{ (\nabla \cdot \mathbf{B}) e^{j\omega t} \right\} = 0$$

Il passo successivo consiste nel verificare la possibilità di eliminare l'operatore $\operatorname{Re}\{\}$: ciò è possibile se vale l'uguaglianza anche tra la parte immaginaria degli operandi delle varie equazioni. In effetti le equazioni precedenti devono valere per qualunque istante t ; quindi in particolare per $\tau = t - T/4$, dove $T = \frac{2\pi}{\omega}$ = periodo

della variazione sinusoidale di pulsazione ω . Ma, per $t = \tau$ l'esponenziale varia di $e^{-j\pi/2} = -j$ e dunque $\mathbf{A} e^{j\omega\tau} = -j\mathbf{A} e^{j\omega t}$ ossia $\operatorname{Re}\{\mathbf{A} e^{j\omega\tau}\} = \operatorname{Im}\{\mathbf{A} e^{j\omega t}\}$.

In conclusione, è lecito lasciare cadere l'operatore $\operatorname{Re}\{\}$ e scrivere (semplificando contemporaneamente anche il termine $e^{j\omega t}$):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (5.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = +j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J} + \mathbf{J}_i \quad (5.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = +\rho + \rho_i \quad (5.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.16)$$

Le **equazioni generalizzate di Maxwell nei fasori** si presentano nella forma seguente, in cui non appare più la variabile temporale:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{J}_m(\mathbf{r}) - \mathbf{J}_{mi}(\mathbf{r}) \quad (5.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = +j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_i(\mathbf{r}) \quad (5.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = +\rho(\mathbf{r}) + \rho_i(\mathbf{r}) \quad (5.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = +\rho_m(\mathbf{r}) + \rho_{mi}(\mathbf{r}) \quad (5.20)$$

avendo separato, nelle grandezze che esprimono le cariche e le correnti, la parte impressa (ascrivibile a processi di natura chimica, meccanica ecc.) da considerarsi come termine noto.

Le **equazioni di continuità** della corrente **elettrica** e di quella **magnetica** diventano

$$\nabla \cdot [\mathbf{J}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_i(\mathbf{r})] + j\omega[\rho(\mathbf{r}) + \rho_i(\mathbf{r})] = 0 \quad (5.21)$$

$$\nabla \cdot [\mathbf{J}_m(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_{mi}(\mathbf{r})] + j\omega[\rho_m(\mathbf{r}) + \rho_{mi}(\mathbf{r})] = 0 \quad (5.22)$$

5.3 Potenza complessa corrispondente a sorgenti impresse

La **densità di potenza istantanea** per unità di volume fornita dalle sorgenti impresse è data da:

$$p(t) = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_i \quad (5.23)$$

Se il vettore densità di corrente impressa \mathbf{j}_i e il vettore campo elettrico \mathbf{e} sono sinusoidali, la densità di energia fornita tra $t = -\infty$ e $t = +\infty$ risulta infinita; conviene allora riferirsi alla **densità di potenza media** p_i in un periodo $T = 2\pi/\omega$, che è invece una quantità finita:

$$p_i = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt.$$

Ricordando che $u = \operatorname{Re}\{z\} = \operatorname{Re}\{u + jv\} = \frac{z + z^*}{2}$, si ha:

$$\mathbf{j}_i = \operatorname{Re}\{\mathbf{J}_i e^{j\omega t}\} = \frac{\mathbf{J}_i e^{j\omega t} + \mathbf{J}_i^* e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\mathbf{e} = \operatorname{Re}\{\mathbf{E} e^{j\omega t}\} = \frac{\mathbf{E} e^{j\omega t} + \mathbf{E}^* e^{-j\omega t}}{2}$$

La densità di potenza media [W/m³] fornita al campo da generatori di tipo elettrico è:

$$\begin{aligned}
p_e &= -\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_i \, dt = \\
&= -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{(\mathbf{E} e^{j\omega t} + \mathbf{E}^* e^{-j\omega t})(\mathbf{J}_i e^{j\omega t} + \mathbf{J}_i^* e^{-j\omega t})}{4} \, dt = \\
&= -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i^* + \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{J}_i)}{4} \, dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i e^{2j\omega t} + \mathbf{J}_i^* \cdot \mathbf{E}^* e^{-2j\omega t})}{4} \, dt
\end{aligned}$$

L'integrale delle due funzioni $e^{2j\omega t}$ e $e^{-2j\omega t}$ risulta nullo e pertanto:

$$p_e = -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i^* + \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{J}_i)}{4} \, dt = \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i^* + \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{J}_i)}{4} = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i^*}{2} \right\} \quad (5.24)$$

Il termine

$$-\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i^*}{2}$$

è detto **densità di potenza complessa** competente alle **sorgenti impresse**, mentre la sua parte reale è detta **densità di potenza media attiva**.

Integrando sul volume occupato dalle sorgenti elettriche abbiamo la potenza complessa che compete a tali sorgenti:

$$P_c = P + jQ = -\iiint_V \left\{ \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i^*}{2} \right\} \, dV \quad (5.25)$$

Analogamente, la densità di potenza complessa fornita al campo da **generatori di tipo magnetico** è data da:

$$-\frac{\mathbf{J}_{mi} \cdot \mathbf{H}^*}{2} \quad (5.26)$$

e la **densità di potenza media attiva** è la sua parte reale:

$$p_m = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{\mathbf{J}_{mi} \cdot \mathbf{H}^*}{2} \right\} \quad (5.27)$$

La parte immaginaria delle densità di potenze complesse sono le cosiddette **densità di potenza media reattive**.

Integrando sul volume occupato dalle sorgenti elettriche e magnetiche abbiamo la potenza complessa che compete a tali sorgenti:

$$P_c = P + jQ = - \iiint_V \left\{ \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i^*}{2} + \frac{\mathbf{J}_{mi} \cdot \mathbf{H}^*}{2} \right\} dV \quad (5.28)$$

5.4 Relazione costitutiva per un mezzo conduttore

Un mezzo si dice **conduttore** se la relazione tra la densità di corrente (eccitata dal campo elettrico applicato) e il campo è la seguente:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} \quad (5.29)$$

Con σ costante risulta $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$; pertanto le relazioni costitutive, introdotte nel capitolo 3 e riprese nella (4.54), si traducono nella seguente forma per i fasori:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (5.30)$$

Di conseguenza, il secondo membro della (5.14) può essere espresso nel seguente modo:

$$j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J} = j\omega \varepsilon \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E} = j\omega \left(\varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E}$$

Ponendo

$$\varepsilon_c = \varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega}, \quad (5.31)$$

la seconda equazione di Maxwell si scrive, in assenza di sorgenti,

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \varepsilon_c \mathbf{E} \quad (5.32)$$

Pertanto per un mezzo conduttore nel dominio della frequenza vale la relazione costitutiva,

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon_c(\omega) \mathbf{E}(\omega) \quad (5.33)$$

\mathbf{D} è una **induzione generalizzata**, non coincidente con quella che appare nelle equazioni di partenza: infatti contiene anche il contributo della corrente di conduzione. La divergenza di questa induzione è nulla ed esprime l'equazione di continuità della corrente.

Nel seguito, a meno di esplicita indicazione si considereranno le equazioni di Maxwell, con la sola variante di $\varepsilon_c(\omega)$ al posto di ε . Tali relazioni sono valide per i fasori. Ciò giustifica anche la preminenza della soluzione delle equazioni di Maxwell nel dominio della frequenza.

Il buon conduttore è quello che soddisfa la relazione:

$$\frac{\sigma}{\omega} \gg \varepsilon$$

Per molti metalli (per esempio rame e oro) la relazione precedente è verificata per tutte le frequenze radio ma non a frequenze ottiche.

TABELLA 5.1
PARAMETRI ELETTRICI DI ALCUNI MATERIALI
FREQUENZE INFERIORI A 100 GHz

Materiale	Conducibilità σ , mhos/meter	$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$	Frequenza a cui, $\sigma = \omega\varepsilon$
Rame	$5.80 \cdot 10^7$	---	(optical)
Platino	$0.94 \cdot 10^7$	---	(optical)
Germanio (puro)	2.2	16	$2.5 \cdot 10^9$
Acqua di mare	4	81	$8.9 \cdot 10^8$
Acqua	10^{-3}	81	$2.2 \cdot 10^5$
Silicio (puro)	10^{-3}	12	$1.5 \cdot 10^6$
Terreno umido	10^{-3}	10	$1.8 \cdot 10^6$
Terreno secco	10^{-5}	5	$3.6 \cdot 10^6$

D'altra parte, l'introduzione dei fasori permette di semplificare notevolmente lo studio, grazie al fatto che le relazioni (5.28) consentono di ricavare tre dei vettori $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, $\mathbf{D}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ in funzione degli altri due, riducendo in tal modo il numero dei campi incogniti da cinque a due. La scelta poi di eliminare dalle

equazioni i vettori \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{J} , esprimendoli in funzione di \mathbf{E} , \mathbf{H} , è suggerita dal fatto che questi ultimi definiscono in modo diretto il vettore di Poynting (come vedremo nel capitolo 7); inoltre le simmetrie nelle equazioni, che si vengono ad evidenziare, saranno utili per la formulazione del principio di dualità. Esprimendo ε_c come:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_0 (\varepsilon' - j\varepsilon'') \quad (5.34)$$

si può porre, per analogia:

$$\mu_c = \mu_0 (\mu' - j\mu'') \quad (5.35)$$

Supponendo che siano presenti anche correnti magnetiche impresse, le equazioni di Maxwell si scrivono:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mu_c \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{J}_{mi}(\mathbf{r}) \quad (5.36)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = +j\omega \varepsilon_c \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_i(\mathbf{r}) \quad (5.37)$$

Anche se talora denominate *equazioni di Maxwell*, in realtà esse sono una conseguenza sia delle equazioni di Maxwell che delle relazioni costitutive. Unite alle (5.40), esse consentono la univoca determinazione di \mathbf{E} e di \mathbf{H} , in quanto i termini $\mathbf{J}_i(\mathbf{r})$ e $\mathbf{J}_{mi}(\mathbf{r})$ rappresentano dei termini noti: in tal senso, quindi, le correnti impresse fungono da sorgenti per il campo elettromagnetico; le equazioni, una volta risolte, esprimono i campi \mathbf{E} ed \mathbf{H} come funzionali delle sorgenti $\mathbf{J}_i(\mathbf{r})$ e $\mathbf{J}_{mi}(\mathbf{r})$.

5.4 Condizioni di continuità all'interfaccia tra mezzi diversi

Si è ora in grado di specializzare le **relazioni di continuità** per le più importanti discontinuità. Se su una superficie S si verifica una discontinuità di costanti del tipo:

$$\mu_1 \neq \mu_2 \qquad \varepsilon_{c1} \neq \varepsilon_{c2}$$

valgono senz'altro le condizioni di continuità per le componenti normali di \mathbf{D} e \mathbf{B} e per i componenti sul piano tangente ad S per \mathbf{E} ed \mathbf{H} . Si ha pertanto:

$$\mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2} \qquad \varepsilon_{c1} E_{n1} = \varepsilon_{c2} E_{n2} \quad (5.38)$$

per le componenti normali ad S (pedice n) e

$$\mathbf{H}_{\tau 1} = \mathbf{H}_{\tau 2} \qquad \mathbf{E}_{\tau 1} = \mathbf{E}_{\tau 2} \qquad (5.39)$$

per i componenti sul piano tangente ad S (pedice τ).

Riassumendo, si ha quindi nel caso generale:

$$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = -\mathbf{J}_{mS} \qquad \mathbf{i}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_S \qquad (5.40)$$

$$\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_S \qquad \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \rho_{mS} \qquad (5.41)$$

$$\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -j\omega\rho_S \qquad \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{J}_{m2} - \mathbf{J}_{m1}) = -j\omega\rho_{mS} \qquad (5.42)$$

Come si vede dalle (5.21)-(5.22) e dalle (5.42), le densità di carica sono completamente determinate se sono note le densità di corrente; sono quindi incognite di secondaria importanza e raramente vengono prese in considerazione esplicitamente.

Un caso particolarmente importante è quello in cui da una parte vi sia un **conduttore elettrico perfetto**, tale cioè che in esso $\sigma \rightarrow \infty$. Nell'interno di un tale materiale $\mathbf{e} = 0$, altrimenti la densità di corrente indotta dal campo sarebbe infinita. Alla superficie di separazione S_2 tra il mezzo e il conduttore perfetto, il componente tangenziale del campo elettrico dev'essere continuo. La condizione al contorno per un tale conduttore è dunque

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{e} = 0 \qquad (5.43)$$

Il duale del conduttore elettrico perfetto è il **conduttore magnetico perfetto**; per esso la condizione al contorno diventa in analogia:

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{h} = 0 \qquad (5.44)$$

Tornando alla (5.43), essa è a volte assunta come definizione di conduttore elettrico perfetto. In esso, per campi variabili nel tempo, anche \mathbf{h} è nullo e non solo \mathbf{e} . Ma se si ponesse anche $\mathbf{i}_n \times \mathbf{h} = 0$ su S_2 , ne risulterebbero situazioni di annullamento dell'intero campo (vedi teorema di unicità). Pertanto il componente tangente di \mathbf{h} è discontinuo e ciò è giustificato dalla presenza di una **densità di corrente superficiale**, come evidenziato dalle condizioni di continuità.

Nei mezzi conduttori, la potenza complessa del tipo (5.25) o (5.28) è tutta reale se riferita alle correnti di conduzione. Seguendo infatti un procedimento analogo si può verificare che:

$$P_{CJ} = P_{RJ} = \iiint_V \frac{\sigma |\mathbf{E}|^2}{2} dV \qquad (5.45)$$

Il pedice J ricorda che la dissipazione di potenza corrisponde all'effetto Joule.

5.5 Polarizzazione dei vettori di campo sinusoidali

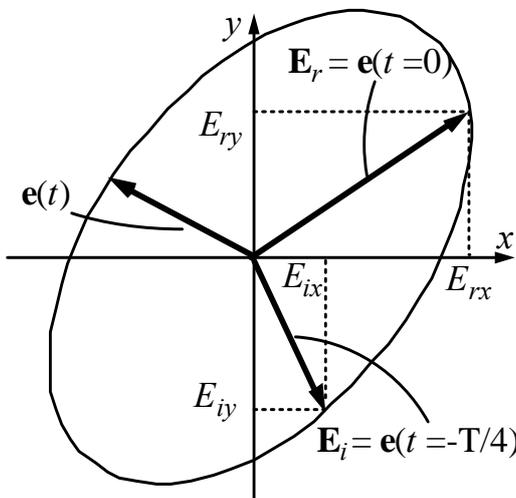
Una caratteristica importante dei campi sinusoidali è la loro **polarizzazione**. Infatti, come si evince dalla (5.2) e dal fatto che \mathbf{E}_r ed \mathbf{E}_i sono tempo invarianti, la evoluzione in funzione del tempo avviene senza abbandonare mai il piano definito, punto per punto da questi due vettori. Questo fatto è collegato con il concetto di polarizzazione dei vettori sinusoidali, che specifica come varia il vettore su questo piano. Si introduca intanto sul piano sopra definito un sistema di riferimento cartesiano ortogonale x,y; per il vettore \mathbf{e} si avrà:

$$\mathbf{e} = \mathbf{E}_r \cos \omega t - \mathbf{E}_i \sin \omega t \tag{5.46}$$

si ha:

$$\mathbf{e} = (E_{rx} \cos \omega t - E_{ix} \sin \omega t) \mathbf{i}_x + (E_{ry} \cos \omega t - E_{iy} \sin \omega t) \mathbf{i}_y$$

L'estremo del vettore (vedi Figura 5.1) ha coordinate:



$$x = E_{rx} \cos \omega t - E_{ix} \sin \omega t$$

$$y = E_{ry} \cos \omega t - E_{iy} \sin \omega t$$

Le funzioni del tempo possono essere facilmente eliminate resolvendo il sistema per $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ e utilizzando la relazione $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$.

Si ha:

$$(E_{ry}^2 + E_{iy}^2)x^2 + (E_{rx}^2 + E_{ix}^2)y^2 - 2(E_{rx}E_{ry} + E_{ix}E_{iy})xy = (-E_{rx}E_{iy} + E_{ry}E_{ix})^2$$

che rappresenta l'equazione di un'ellisse; se questa circostanza si manifesta in ogni punto del dominio si dice che il vettore \mathbf{E} possiede **polarizzazione ellittica**¹. Tale

¹ Il concetto di polarizzazione viene definito localmente e ciò é sempre possibile in linea di massima; tuttavia la proprietà del fascio é globale, cioè la polarizzazione si deve mantenere in tutto il dominio. Se ciò non capita, cioè se il campo cambia in maniera irregolare polarizzazione da punto a punto si dice che il campo stesso non é polarizzato.

vettore, per chi osservi il piano $z = 0$ da un punto posto nella regione $z > 0$, appare muoversi in senso antiorario se $\mathbf{E}_i \times \mathbf{E}_r$ ha il verso di \mathbf{i}_z , in senso orario se $\mathbf{E}_i \times \mathbf{E}_r$ ha il verso opposto a \mathbf{i}_z ; il verso cioè è sempre quello che va da \mathbf{E}_i ad \mathbf{E}_r .

L'ellisse si riduce a una **circonferenza** se $|\mathbf{E}_i| = |\mathbf{E}_r|$ e $\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_r = 0$, ovvero quando parte reale e coefficiente dell'immaginario del fasore sono ortogonali e di ampiezza uguale ($E_{iy} = \pm E_{rx}$; $E_{ix} = \pm E_{ry}$); in questo caso, si dice che il campo è **polarizzato circolarmente**. L'ellisse degenera in un **segmento** se $\mathbf{E}_i \times \mathbf{E}_r = 0$, cioè quando parte reale e coefficiente dell'immaginario del fasore hanno la stessa direzione ($E_{ix} = \alpha E_{rx}$;

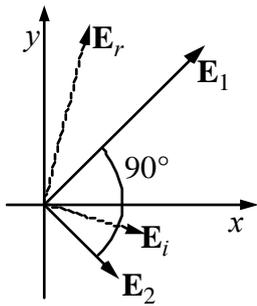


Figura 5.2

oppure se uno dei due è nullo; in questo caso si dice che il campo è **polarizzato linearmente**.

Ponendosi ora nel piano dove si trovano i vettori \mathbf{E}_r e \mathbf{E}_i che definiscono il vettore complesso è opportuno svolgere alcune considerazioni più generali.

Si scelga intanto una terna cartesiana per cui il piano $z = 0$ coincide col piano di \mathbf{E}_r e \mathbf{E}_i . La (5.46) può essere ora vista come un modo di **scomporre** un generico vettore sinusoidale in **due vettori polarizzati linearmente**, oscillanti **in quadratura** (si veda

la (5.5)). Mostriamo ora come tale scomposizione possa venire effettuata in infiniti altri modi; infatti, scelto un angolo δ qualsiasi, si ottiene:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i = (\mathbf{E}_r e^{-j\delta} + j\mathbf{E}_i e^{-j\delta}) e^{j\delta} = (\mathbf{E}_1 + j\mathbf{E}_2) e^{j\delta} \quad (5.47)$$

dove \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 sono due nuovi vettori reali dati da:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_r \cos \delta + \mathbf{E}_i \sin \delta \quad \mathbf{E}_2 = -\mathbf{E}_r \sin \delta + \mathbf{E}_i \cos \delta \quad (5.48)$$

La (5.46) può quindi essere riscritta nella forma:

$$\mathbf{e} = \text{Re} \left[(\mathbf{E}_1 + j\mathbf{E}_2) e^{j\delta} e^{j\omega t} \right] = \mathbf{E}_1 \cos(\omega t + \delta) - \mathbf{E}_2 \sin(\omega t + \delta) \quad (5.49)$$

Come si nota dalla (5.48), poichè \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 si ottengono dalla combinazione lineare di \mathbf{E}_r e \mathbf{E}_i tramite dei coefficienti che sono funzioni di δ , le loro direzioni dipendono dal valore assunto per δ . In particolare, scegliendo opportunamente tale valore, è possibile fare in modo che \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 risultino ortogonali fra loro e ciò viene ottenuto imponendo la condizione di ortogonalità $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = 0$ alle (5.48). Si ottiene:

$$\delta = \frac{1}{2} \text{arctg} \left[\frac{2\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{E}_i}{|\mathbf{E}_r|^2 - |\mathbf{E}_i|^2} \right] \quad (5.50)$$

Una volta si sia calcolato tale valore di δ (vedi Figura 5.2), lo si introduce nelle (5.48), ottenendo i corrispondenti vettori \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 ; ne consegue che la (5.49) rappresenta la scomposizione di un campo sinusoidale generico in due campi **oscillanti secondo direzioni ortogonali**, oltre ad essere polarizzati linearmente ed in quadratura (Figura 5.3). Ora tali vettori \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 rappresentano i **semiassi dell'ellissi di polarizzazione** (Figura 5.4); qualora uno dei due vettori sia nullo, si degenera nel caso di polarizzazione lineare. Dalle precedenti espressioni si può notare come il modulo di un fasore vettoriale è esprimibile come somma dei moduli dei due fasori polarizzati linearmente in direzioni ortogonali; infatti, introducendo i vettori \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 dalla (5.47), risulta:

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{(\mathbf{E}_1 + j\mathbf{E}_2)e^{j\delta} \cdot (\mathbf{E}_1 - j\mathbf{E}_2)e^{-j\delta}} = \sqrt{\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_2} = \sqrt{|\mathbf{E}_1|^2 + |\mathbf{E}_2|^2} \quad (5.51)$$

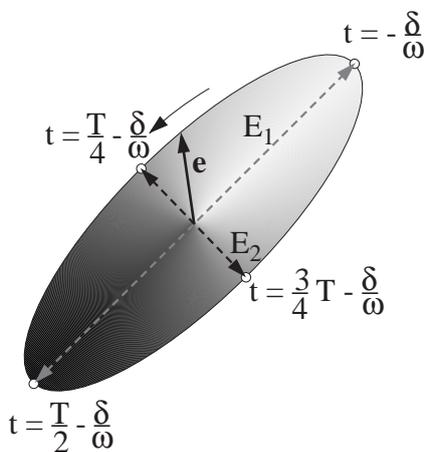


Figura 5.4

Ciò si traduce, da un punto di vista geometrico, nel fatto che tale modulo coincide con la distanza fra un estremo dell'asse minore e uno dell'asse maggiore. Qualora la polarizzazione sia lineare, tale modulo coincide con quello di uno dei due vettori e quindi rappresenta l'ampiezza delle oscillazioni del campo.

Altre considerazioni interessanti possono essere svolte se, sul piano individuato da \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 , scegliamo il riferimento cartesiano in modo che la direzione degli assi x ed y coincidano con quelle dei vettori \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 . In tal caso la (5.47) può essere posta nella forma:

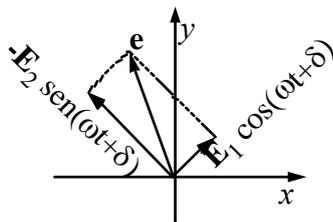


Figura 5.3

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1 + j\mathbf{E}_2)e^{j\delta} = E_x \mathbf{i}_x + E_y \mathbf{i}_y$$

che ci informa quindi del seguente fatto: un vettore complesso rappresentativo di un vettore sinusoidale è completamente individuato, in tale particolare sistema di riferimento, da una **coppia ordinata di numeri complessi**,

E_x ed E_y aventi il modulo coincidente con quello dei vettori \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 , e sfasamento esattamente di $\pm\pi/2$; in una base cartesiana ortogonale generica (con assi non coincidenti con le direzioni degli assi principali dell'ellisse di polarizzazione), la differenza tra le fasi di E_x ed E_y sarebbe stato del tutto generico.

Scelta una coppia di versori complessi ortogonali $\mathbf{i}_u, \mathbf{i}_v$ (tali cioè che $\mathbf{i}_v \cdot \mathbf{i}_v^* = 1$; $\mathbf{i}_u \cdot \mathbf{i}_u^* = 1$; $\mathbf{i}_u \cdot \mathbf{i}_v^* = 0$), si dice che essa è una base ortogonale per i vettori complessi

considerati, intendendo con ciò che il vettore complesso generico può sempre scriversi come una combinazione lineare di \mathbf{i}_u e \mathbf{i}_v :

$$\mathbf{E} = E_u \mathbf{i}_u + E_v \mathbf{i}_v \quad (5.53)$$

L'attendibilità della (5.53) segue dalla possibilità di ricavare E_x ed E_y a partire da E_u ed E_v scrivendo \mathbf{i}_u e \mathbf{i}_v come combinazioni lineari di \mathbf{i}_x e \mathbf{i}_y e viceversa. Dalla (5.53) si deduce che un vettore complesso è sì individuato da una coppia ordinata di numeri

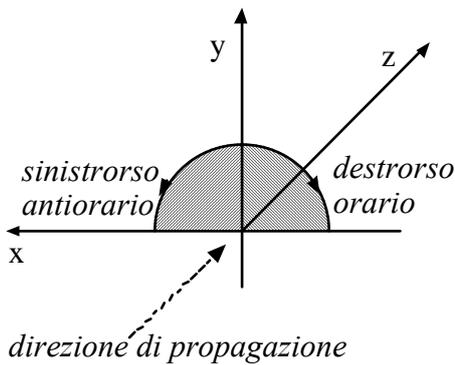


Fig. 5.5

complessi, ma anche che questa coppia cambia al cambiare della base di riferimento (si vedrà in seguito di quale grande utilità sia la scelta opportuna della base stessa, quando si vogliono mettere in evidenza le proprietà dei vettori reali istantanei associati con i vettori complessi). Ad esempio, la (5.52) ci ha mostrato come un vettore complesso possa essere espresso tramite una base ortonormale costituita dai due versori aventi come

direzione quella secondo cui sono polarizzati linearmente i due vettori \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 : si tratta cioè di una scomposizione secondo due polarizzazioni lineari ortogonali. D'altra parte, come vedremo subito, una polarizzazione ellittica qualsiasi può essere **scomposta** anche in **due polarizzazioni circolari**, ruotanti **in versi opposti**.

Tra tutti i vettori a polarizzazione circolare, molto interessanti sono quelli a modulo unitario, cioè i versori. Tra questi, assai utili sono:

$$\mathbf{i}_d = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}_x - j\mathbf{i}_y) \quad \mathbf{i}_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}_x + j\mathbf{i}_y) \quad (5.54)$$

Il versore \mathbf{i}_d ha **polarizzazione circolare destrorsa**, per chi guarda nella direzione positiva dell'asse z ; \mathbf{i}_s invece è **sinistrorso**. La definizione standard del verso (destrorso o sinistrorso) della polarizzazione circolare è la seguente:

Per un osservatore che guarda nella direzione di propagazione, la rotazione del vettore campo elettrico in un piano trasversale è orario nel caso di polarizzazione destrorsa, antiorario nel caso di polarizzazione sinistrorsa.

Questa convenzione è quella più usata in elettromagnetismo; in ottica si usa invece la convenzione opposta: ciò corrisponde al diverso punto di vista dell'osservatore: nel primo caso quello trasmittente, nel secondo quello ricevente.

Si può facilmente verificare che la norma di \mathbf{i}_d e \mathbf{i}_s è unitaria (e cioè che si tratta effettivamente di versori) e che essi sono ortogonali.

La base $\mathbf{i}_d, \mathbf{i}_s$ è particolarmente utile per lo studio della polarizzazione. Se si esprime infatti il generico vettore \mathbf{E} in questa base si ha:

$$\mathbf{E} = E_d \mathbf{i}_d + E_s \mathbf{i}_s \quad E_d = \mathbf{E} \cdot \mathbf{i}_d^* \quad E_s = \mathbf{E} \cdot \mathbf{i}_s^* \quad (5.55)$$

Se $E_s = 0$ la polarizzazione è circolare destrorsa: infatti anche se E_d è complesso, esprimendolo in parte reale ed immaginaria ed utilizzando l'espressione di \mathbf{i}_d in funzione di $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y$, si vede che \mathbf{E} è caratterizzato da \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 di egual modulo (e ortogonali). Analogamente per $E_d = 0$.

Se $|E_s| = |E_d|$, la polarizzazione è certamente rettilinea; in particolare, se E_s ed E_d sono reali, la retta di polarizzazione è l'asse x , altrimenti si verifica che è ruotata di un angolo β pari a $-\arg(E_s/E_d)/2$.

Definito quindi il numero complesso $q = E_s/E_d$, detto **rapporto di polarizzazione circolare**, vale questa regola:

$$q = \frac{E_s}{E_d} \Rightarrow \begin{cases} |q| > 1 \text{ ellittica sinistrorsa} (= +\infty \Rightarrow \text{circolare}) \\ |q| = 1 \text{ rettilinea ruotata con angolo } -\frac{1}{2} \arg q \\ |q| < 1 \text{ ellittica destrorsa} (= 0 \Rightarrow \text{circolare}) \end{cases} \quad (5.56)$$

Nelle applicazioni alle antenne, le componenti E_s ed E_d , così come le omologhe E_x ed E_y nel caso di scomposizione in due polarizzazioni lineari ortogonali, vengono definite **componenti co-polari e cross-polari** del campo: esse individuano completamente lo stato di polarizzazione del campo.

Nello studio delle onde, invece, risulta più opportuno esprimere il campo in termini di ampiezza e polarizzazione. Data una certa polarizzazione, l'ampiezza è individuata dal modulo del campo, mentre la polarizzazione è caratterizzata da:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|} e^{j\chi} \quad (5.57)$$

Tale grandezza è un fasore, avente modulo unitario (versore complesso), il cui corrispondente campo sinusoidale ha polarizzazione uguale a quella di \mathbf{E} . Il versore \mathbf{p} viene detto perciò **vettore di polarizzazione** di \mathbf{E} . E' opportuno notare come esso sia definito a meno di una fase arbitraria, χ (fissato secondo convenienza). In termini di ampiezza e polarizzazione, l'espressione generica del campo \mathbf{E} è quindi:

$$\mathbf{E} = \mathbf{p} |\mathbf{E}| e^{-j\chi} \quad (5.58)$$

Due vettori complessi \mathbf{E} ed \mathbf{F} sono paralleli se $\mathbf{E} = c \mathbf{F}$ con c numero complesso. E' evidente che:

$$E_d \mathbf{i}_d + E_s \mathbf{i}_s = c F_d \mathbf{i}_d + c F_s \mathbf{i}_s$$

$$\frac{E_s}{E_d} = \frac{F_s}{F_d} = q$$

eguale per ognuno.

Dunque due vettori complessi paralleli rappresentano due campi con identica polarizzazione. Ritornando ora alla (5.22), si ricordi che la potenza assorbita da un utilizzatore schematizzato da una corrente impressa \mathbf{J}_i è in media in un periodo data da:

$$\operatorname{Re} \left\{ \iiint_V \frac{\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}}{2} dV \right\}$$

Può interessare determinare, con analisi puntuale, per quali condizioni si ha il massimo di $\operatorname{Re} \{ \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} \}$ a parità di $|\mathbf{J}|$ e $|\mathbf{E}|$. Ciò darà indicazione su come progettare un'antenna per ricevere un dato campo e.m.. E' intanto chiaro che il minimo si ha per vettori ortogonali: $\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} = 0$.

Invece di svolgere una dimostrazione diretta, assecondiamo l'intuizione, che ci suggerisce di cercare il massimo per eguali polarizzazioni, cioè per \mathbf{J} ed \mathbf{E} paralleli. Ciò significa:

$$\mathbf{J} = c \mathbf{E} = |c| e^{j \arg c} \mathbf{E}$$

Inoltre:

$$E = |\mathbf{E}| \quad J = |\mathbf{J}| = |c| |\mathbf{E}| = |c| E$$

A parità di J ed E è evidente che il massimo dell'integrando si ha se:

$$\frac{J E}{2} = |c| \frac{E^2}{2}$$

Partendo da vettori già paralleli si ha:

$$\frac{\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}}{2} = |c| e^{-j \arg c} \frac{E^2}{2}$$

Risulta quindi chiaro che il valore massimo della parte reale si raggiunga per $\arg c = 0$, pertanto non soltanto i due vettori devono essere paralleli, ma la costante moltiplicativa che li lega deve essere reale. Ciò corrisponde a dire che sono in fase nel tempo componente per componente. In questa situazione l'integrando è reale e massimo punto per punto e sempre non negativo: conseguentemente è massimo anche l'integrale. Quando non si è nelle condizioni ottimali si è soliti valutare **l'attenuazione di polarizzazione**, in dB, che vale:

$$A_P = 10 \log_{10} \left[\frac{\iiint_V \frac{\sqrt{\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{J}} \sqrt{\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}}}{2} dV}{\operatorname{Re} \left\{ \iiint_V \frac{\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}}{2} dV \right\}} \right]$$

Per vettori ortogonali A_p vale infinito e le due polarizzazioni sono dette **incrociate**. Un'antenna è disaccoppiata nei confronti della polarizzazione ad essa incrociata; ciò può essere utile per evitare interferenze o riutilizzare la stessa frequenza. Infatti a due segnali con polarizzazione ortogonali possono essere affidati informazioni diverse, ciascuna delle quali può essere ricevuta in modo del tutto indipendente da antenne sensibili a una solo delle due. Si tratta di una tecnica, nota con il nome di **riuso di frequenza** (*frequency reuse*), che, teoricamente, consente di raddoppiare la capacità del canale senza raddoppiare la banda trasmessa; può venire sfruttata nei sistemi d'area (radiodiffusione di segnali radiofonici o televisivi, sistemi cellulari), consentendo la copertura di un certo territorio con una minore spreco di banda oppure con un più denso impacchettamento delle risorse spettrali in presenza di segnali che si interferiscono reciprocamente.

ESERCIZI

- 1 Si calcoli l'espressione dei fasori per i seguenti campi vettoriali:

$$\mathbf{e}(t) = (3\mathbf{i}_x + 4\mathbf{i}_y) \cos(\omega t + \pi/3) + (2\mathbf{i}_y + 5\mathbf{i}_z) \sin(\omega t - \pi/3)$$

$$\mathbf{h}(t) = (\mathbf{i}_x + 5\mathbf{i}_y) \cos(\omega t + \pi/4) + (2\mathbf{i}_x + 3\mathbf{i}_y + 5\mathbf{i}_z) \sin(\omega t - \pi/4)$$

$$\mathbf{j}(t) = (2\mathbf{i}_x + 2\mathbf{i}_y + 3\mathbf{i}_z) \cos(\omega t + 2\pi/3) + (3\mathbf{i}_x + 4\mathbf{i}_y + \mathbf{i}_z) \sin(\omega t - \pi/3)$$

- 2 Si calcoli la densità di potenza complessa che compete alle sorgenti impresse $\mathbf{j}(t)$ ed al campo elettrico $\mathbf{e}(t)$ forniti all'esercizio 1; si calcoli anche la densità di potenza media attiva.
- 3 Studiare la variazione istantanea del vettore \mathbf{e} qualora il fasore associato sia esprimibile come $\mathbf{E} = A \mathbf{i}_x + B \mathbf{i}_y$ nei seguenti casi:
- 1) $A = B = 1$

- 2) $A = 1$; $B = j$
 - 3) $A = 1+j$; $B = 0$
- 4 Utilizzando i dati forniti precedentemente nella tabella dei parametri elettrici di alcuni materiali, calcolare la costante dielettrica complessa corrispondente.
- 5 Sia dato il fasore $\mathbf{E} = 3 \mathbf{i}_x + 4 \mathbf{i}_y$.
- a - Dire come è polarizzato il campo
 - b - Dire come oscilla il campo nel tempo
 - c - Trovare il valore massimo del campo
 - d - Definire il vettore di polarizzazione \mathbf{p} .
- 6 Come per l'esercizio 5, per il fasore $\mathbf{H} = (2 \mathbf{i}_x + (1-j) \mathbf{i}_y)$
- 7 Come per l'esercizio 5, per il fasore $\mathbf{J} = 2 (\mathbf{i}_x - j \mathbf{i}_y)$
- 8 Sia dato il fasore $\mathbf{H} = (1 + j) \mathbf{i}_x + (1 - 2j) \mathbf{i}_y$.
- a - Trovare le componenti in fase e quadratura
 - b - Dire come è polarizzato il campo
 - c - Determinare lo sfasamento δ che rende ortogonali le due componenti.
 - d - Trovare le due componenti ortogonali \mathbf{H}_1 ed \mathbf{H}_2 e verificare che essi sono ortogonali
 - e - Trovare il valore massimo del campo $|\mathbf{H}|$
 - f - Scomporre \mathbf{H} in due polarizzazioni circolari opposte
 - g - Definire il vettore di polarizzazione \mathbf{p} .
 - h - Dire come è orientato \mathbf{h} per $t = -T/4, 0, T/4, T/2$
- 9 Come per l'esercizio 8, per il fasore $\mathbf{E} = (1-j/\sqrt{2})\mathbf{i}_x + (2-3j/\sqrt{2})\mathbf{i}_y$
- 10 Sia dato $\mathbf{e}(t) = \mathbf{A} \cos(\omega t + \psi_A) + \mathbf{B} \cos(\omega t + \psi_B)$.
- a - Trovare una scomposizione in 2 polarizzazioni rettilinee qualsiasi.
 - b - dire come è polarizzato $\mathbf{e}(t)$
 - c - trovare due polarizzazioni rettilinee ortogonali.
- nei seguenti casi:
- 1- $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ $\psi_A = \psi_B = 0$.
 - 2- $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ $\psi_A = 0$ $\psi_B = \pi/2$.
 - 3- $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$ $\psi_A = 0$ $\psi_B = \pi/2$.
 - 4- come 3, ma con $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$
- 11 Si abbia un dipolo elementare, lungo $d\ell$ caratterizzato da $\mathbf{I} = I \mathbf{i}_y$, con $\mathbf{I} = \mathbf{J} dS$, utilizzato come antenna ricevente; su di esso incide un campo polarizzato circolarmente in un piano \perp all'asse z .
- a - Si scriva una espressione generica del campo.
 - b - Si scomponga in due polarizzazioni rettilinee ortogonali
 - c - Si calcoli l'attenuazione di polarizzazione.
- 12* Sia dato $\mathbf{e}(t) = \mathbf{A} \cos(\omega t + \psi_A) + \mathbf{B} \sin(\omega t - \psi_B)$.
- a - Trovare una scomposizione in 2 polarizzazioni rettilinee qualsiasi.
 - b - dire come è polarizzato $\mathbf{e}(t)$
 - c - trovare due polariz. rettilinee ortogonali.
- nei seguenti casi:
- 1- $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ $\psi_A = \psi_B = 0$.

2- $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ $\psi_A = 0$ $\psi_B = \pi/2$.

3- $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$ $\psi_A = \psi_B = 0$.

4- come 3, ma con $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$

13* Siano dati i seguenti vettori:

$$\mathbf{e} = \cos(\omega t - \pi/6) \mathbf{i}_x + \sin(\omega t - \pi/4)/\sqrt{2} \mathbf{i}_y$$

$$\mathbf{h}(t) = \cos(\omega t + \pi/3) \mathbf{i}_x + \sin(\omega t - \pi/6) \mathbf{i}_y$$

a - Trovare il corrispondente fasore \mathbf{E} , \mathbf{H} .

b - Trovare le sue componenti in fase e quadratura

c - Dire come è polarizzato il campo

d - Determinare lo sfasamento δ che rende ortogonali le due componenti.

e - Trovare le due componenti ortogonali \mathbf{E}_1 ed \mathbf{E}_2 (\mathbf{H}_1 ed \mathbf{H}_2) e verificare che essi sono ortogonali

f - Trovare il valore massimo del campo $|\mathbf{E}|$, $|\mathbf{H}|$

f - Scomporre \mathbf{E} , \mathbf{H} in due polarizzazioni circolari opposte

g - Definire il vettore di polarizzazione \mathbf{p} .

15 Sia dato $\mathbf{e}(t) = a \cos(\omega t + \pi/3) \mathbf{i}_x + b \sin(\omega t + \pi/6) \mathbf{i}_y$ con a e b costanti reali positive.

a - Trovare il fasore $\mathbf{E} = \mathbf{A} + j\mathbf{B}$

b - Dire come è polarizzato il campo per valori generici di a e di b

c - Dire per quali valori di a,b si ottiene una polarizzazione rettilinea.

d - Dire per quali valori di a,b si ottiene una polarizzazione circolare.

16 Sia dato il vettore $\mathbf{e} = \cos(\omega t + \pi/3) (\mathbf{i}_x + \mathbf{i}_y) + \sin(\omega t + \pi/6) (\mathbf{i}_x - \mathbf{i}_y)$

a- Trovare il fasore $\mathbf{E} = \mathbf{A} + j\mathbf{B}$

b- Trovare le sue componenti in fase e quadratura.

c- Dire come è polarizzato il campo

d- scomporre \mathbf{E} in due polarizzazioni circolari opposte.

17 Sia dato il vettore $\mathbf{e} = \cos(\omega t + \pi/3) \mathbf{i}_x + \sin(\omega t + \pi/4)/\sqrt{2} \mathbf{i}_y$.

a - Trovare il fasore $\mathbf{E} = \mathbf{A} + j\mathbf{B}$

b - Trovare le sue componenti in fase e quadratura

c - Dire come è polarizzato il campo

d - Determinare lo sfasamento δ che rende ortogonali le due componenti.

e - Scomporre \mathbf{E} in due polarizzazioni circolari opposte