
Capitolo 3

I VETTORI DI CAMPO ELETTRICO E DI CAMPO MAGNETICO

3.1 Alcuni richiami sui vettori

Nella descrizione del comportamento dei circuiti elettrici è sufficiente fare riferimento a due grandezze scalari: la tensione v , misurata in *Volt*, e la corrente i , misurata in *Ampere*. Per rendere conto dei fenomeni della irradiazione è invece necessario introdurre delle grandezze vettoriali. I vettori sono grandezze compiutamente definite da una direzione dello spazio, da un verso e da un numero positivo che ne esprime l'intensità o modulo. Possono essere rappresentati in grassetto (o con un soprasegno) per distinguerli dagli scalari, cui basta solo un numero per essere compiutamente definiti. Sono in corrispondenza biunivoca con i segmenti orientati nello spazio tridimensionale, ai quali vengono ricondotti nelle rappresentazioni grafiche.

Definito un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, (Figura 3.1), si può mettere il segmento orientato, e dunque il vettore, in corrispondenza biunivoca con le sue tre proiezioni sugli assi. Ognuna di esse è detta componente del vettore lungo la direzione identificata dall'asse. Matematicamente il valore della componente vale il prodotto del modulo del vettore per il coseno dell'angolo tra la direzione del vettore e quella dell'asse. Esiste un formalismo che consente di esprimere questo in forma compatta. Si definisce una operazione tra due vettori denominata **prodotto scalare**, in tal modo:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A B \cos(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}), \tag{3.1}$$

dove A, B sono i moduli dei vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} , (in generale $|\mathbf{A}| = A$) mentre l'argomento del coseno indica l'angolo tra le direzioni dei due vettori in gioco. La componente di un vettore lungo una direzione, nell'esempio che segue la direzione dell'asse x , può essere calcolata allora attraverso la:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_x = A_x, \tag{3.2}$$

dove il secondo vettore del prodotto scalare è il **versore** dell'asse x , ovvero un vettore di modulo unitario con direzione e verso dell'asse x , mentre al secondo membro il simbolo a pedice indica la componente del vettore lungo il medesimo asse.

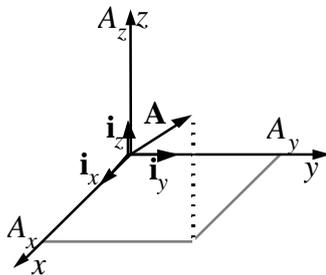


Figura 3.1 - Sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i}_x + A_y \mathbf{i}_y + A_z \mathbf{i}_z$$

$$\hat{\mathbf{i}}_x \times \hat{\mathbf{i}}_y = \hat{\mathbf{i}}_z$$

$$\hat{\mathbf{i}}_y \times \hat{\mathbf{i}}_z = \hat{\mathbf{i}}_x$$

$$\hat{\mathbf{i}}_z \times \hat{\mathbf{i}}_x = \hat{\mathbf{i}}_y$$

Nel mondo meccanico forza, velocità e accelerazione sono esempi di vettori, mentre nel mondo elettromagnetico lo sono il campo elettrico \mathbf{E} e quello magnetico \mathbf{H} .

Una ulteriore operazione che viene compiuta sui vettori è il **prodotto vettoriale** che determina un terzo vettore a partire da una coppia di partenza. Si indica:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \tag{3.3}$$

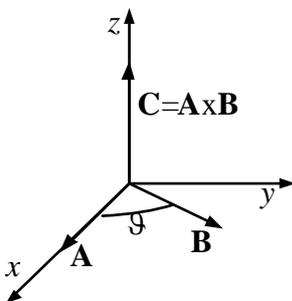


Figura 3.2 - Il vettore \mathbf{C} è il prodotto vettoriale dei due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} .

e il vettore risultante può essere così costruito: il suo modulo C è il prodotto di A per B per il seno dell'angolo (inferiore a 180 gradi) tra la direzione orientata di \mathbf{A} e quella di \mathbf{B} ; la direzione di \mathbf{C} è la perpendicolare al piano dei due vettori di partenza; il verso si può ottenere osservando la Figura 3.2: scelto il piano xy come piano di \mathbf{A} e \mathbf{B} , e l'asse x con direzione e verso concordi con \mathbf{A} , sicchè questi si presenti come segmento spiccato dall'origine su x , si osservi se la rotazione di \mathbf{A} che lo porta a coincidere con la direzione e il verso di \mathbf{B} percorrendo l'angolo

più breve è antioraria o no guardata dal semispazio delle z positive. Nel primo caso l'orientazione di \mathbf{C} è quella dell'asse z ; nel secondo è quella opposta.

3.2 Il campo elettrico \mathbf{E}

Il vettore campo elettrico è stato storicamente messo in evidenza a seguito della osservazione sperimentale della attrazione o repulsione tra particolari corpi dotati di **carica elettrica**. In particolare Coulomb mise in evidenza l'esistenza in elettrostatica della relazione nel vuoto:

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \mathbf{i}_r \quad (3.4)$$

tra due cariche elettriche distanti r e la forza di attrazione o repulsione tra di esse. Per comprendere la formula ci si riferisca alla Figura 3.3.



Figura 3.3 Forza di attrazione (repulsione) fra due cariche elettriche q_1 e q_2 di segno opposto (uguale).

Il parametro ε_0 e l'intero complesso di costanti di proporzionalità consente alla formula di essere valida nel sistema M.K.S.A, dove la carica elettrica si misura in coulomb. Esso è denominato **costante dielettrica** o **permettività** nel vuoto. Si noti che la forza ha la direzione della congiungente delle due cariche e tende ad allontanarle se sono di egual segno, ad avvicinarle se di segno opposto. Sulla base di questa relazione si può schematizzare la regione dello spazio circostante ad una determinata carica Q come sede di un **campo** e dato da:

$$\mathbf{e}(P) = \frac{Q}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \mathbf{i}_r \quad (3.5)$$

in grado di dare luogo ad una forza:

$$\mathbf{F} = q \mathbf{e} \quad (3.6)$$

quando in P si posiziona una carica q .

Di \mathbf{e} si può dare una ulteriore formulazione a partire dai circuiti percorsi da corrente continua nel seguente modo. Nei circuiti elettrici in corrente continua vale la

seconda legge di Kirchoff che rappresenta l'annullamento delle tensioni di maglia. Le cadute di tensione vengono localizzate nei punti dove sono i generatori, le resistenze ecc. (Figura 3.4a). Si può pensare di passare ad una situazione in cui la caduta di tensione avviene con gradualità lungo una linea dello spazio (Figura 3.4b e Figura 3.4c) e che questa linea sia una possibile linea di movimento delle cariche elettriche, prodotta dalla esistenza di un campo.

Si può allora definire una grandezza che rappresenti la rapidità di variazione della tensione. Essa si può misurare in Volt/m ed è proporzionale alla derivata $dV/d\ell$ della tensione lungo la linea ℓ . In effetti si ha la componente di \mathbf{e} nella direzione della linea considerata attraverso la:

$$e_\ell = -\frac{dV}{d\ell}, \tag{3.7}$$

poichè si vuole che il verso del campo vada dal polo positivo a quello negativo del generatore; ciò corrisponde a muovere cariche positive verso il polo negativo.

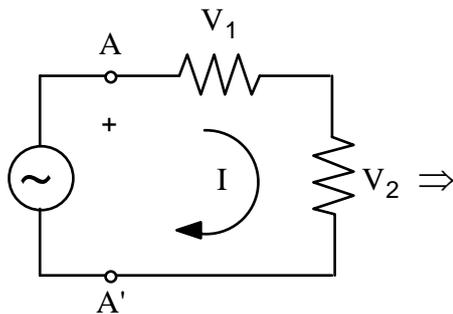


Figura 3.4a

$$V_g = V_1 + V_2$$

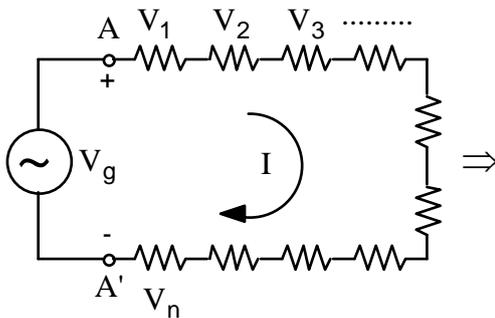


Figura 3.4b

$$V_g = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

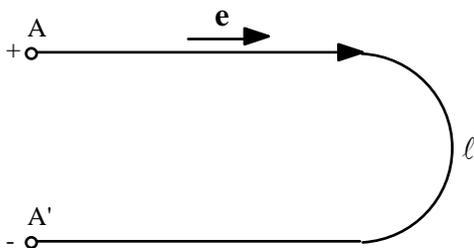


Figura 3.4c

$$\begin{aligned} V_g &= - \int_A^{A'} \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_\ell d\ell = \\ &= V_{AA'} = V_A - V_{A'} \end{aligned}$$

Esaminando le tre direzioni dello spazio di un sistema cartesiano e considerando linee immaginarie che si dipartono da ogni punto nelle tre direzioni si ottengono le tre componenti del vettore campo elettrico realizzando le tre derivate secondo x, y, z . Se lungo una linea la componente di campo elettrico è costante, la tensione si può ottenere semplicemente come prodotto della componente di campo per la lunghezza della linea cambiata di segno. Se lungo la linea la componente è variabile si deve effettuare la somma di tanti contributi elementari differenti, ovvero:

$$e_{\ell} dl = \int_{\ell} \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_{\ell} dl \quad (3.8)$$

dove il simbolo ℓ indica la direzione della linea che può anche essere variabile nello spazio e si è introdotta la notazione di integrale di linea di un vettore (vedere Appendice A). Si noti che per quanto sopra riportato l'integrale (3.8) è nullo se effettuato lungo una curva chiusa.

Il campo elettrico in situazione stazionaria è dunque detto **conservativo**; per campi di questo genere è possibile introdurre una funzione scalare, detta **potenziale**, dalla quale il campo medesimo è derivabile attraverso una operazione, detta **gradiente**, su cui si ritornerà nel seguito, ma che corrisponde ai passi descritti in questo paragrafo. Nel più generale contesto della teoria elettromagnetica questi diversi modi di introdurre il campo elettrico troveranno la completa armonizzazione. Si noti intanto che l'unità di misura per il campo elettrico è *Volt/m*.

3.3 Il campo magnetico \mathbf{H}

La legge di Ampere introduce il concetto di campo magnetico, come vettore prodotto da un filo percorso da corrente continua. Esso ha direzione nel piano perpendicolare al filo costantemente tangente alle circonferenze che in tale piano hanno centro nell'intersezione col filo. L'ampiezza di tale campo è pari alla corrente che percorre il filo divisa per la lunghezza della circonferenza di raggio r pari alla distanza dal filo alla quale si vuole determinare il campo.

$$\mathbf{h} = \frac{i}{2 \pi r} \mathbf{i}_{\varphi} \quad (3.9)$$

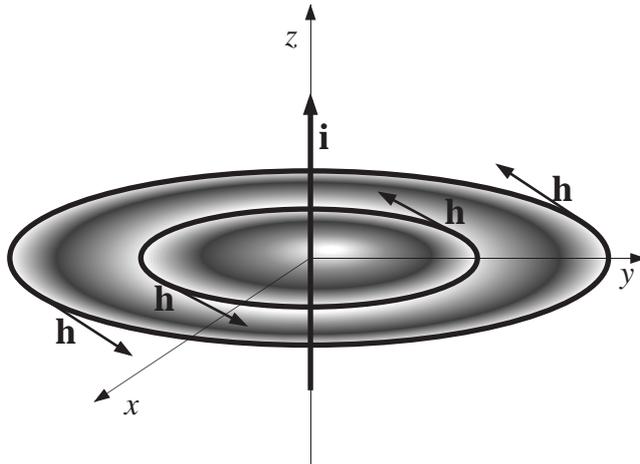


Figura 3.5 - Andamento delle linee di forza del campo magnetico attorno ad un filo percorso da corrente.

La Figura 3.5 è di guida per interpretare la formula. Con la corrente diretta secondo l'asse z il campo \mathbf{h} ha la direzione e il verso del versore \mathbf{i}_φ di un sistema di coordinate polari (vedere Appendice A). Esso si misura in Ampere/m come è evidenziato dimensionalmente dalla (3.9). Si noti che la corrente i è data dal prodotto del valore del campo per la lunghezza della circonferenza. Ciò avviene perché il campo magnetico è ivi

costante e sempre diretto tangenzialmente alla circonferenza. Si può estendere la (3.9), introducendo una linea qualunque che abbracci il filo, sulla quale però il campo magnetico possa avere direzione e modulo arbitrari. Si ottiene una generalizzazione della relazione precedente che vale:

$$I = \oint \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_\ell d\ell \quad (3.10)$$

dove si è formalmente introdotta la notazione di circuitazione di un vettore lungo una linea chiusa. Dimensionalmente si può notare che \mathbf{h} si misura in A/m . Naturalmente anche per \mathbf{h} si è individuato un collegamento con una forza meccanica che consente di metterne in evidenza la presenza. La legge relativa è detta legge di Lorenz e nel vuoto si esprime:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mu_0 \mathbf{h}) \quad (3.11)$$

indicando dunque la forza cui è soggetta una carica in movimento in una regione dove sia presente il campo \mathbf{h} . La nuova costante μ_0 così introdotta per motivi connessi con le unità di misura adottate verrà specificata in seguito. Essa è denominata **permeabilità magnetica** nel vuoto.

Attraverso l'uso della Figura 3.6 si può introdurre un ulteriore vettore, \mathbf{j} , densità di corrente. Esso si ottiene a partire dalla specificazione di una densità di carica volumetrica $\tilde{\rho}$ esistente in una regione dove è definita una velocità puntuale delle cariche \mathbf{v} :

$$\mathbf{j} = \tilde{\rho} \mathbf{v} \quad (3.12)$$

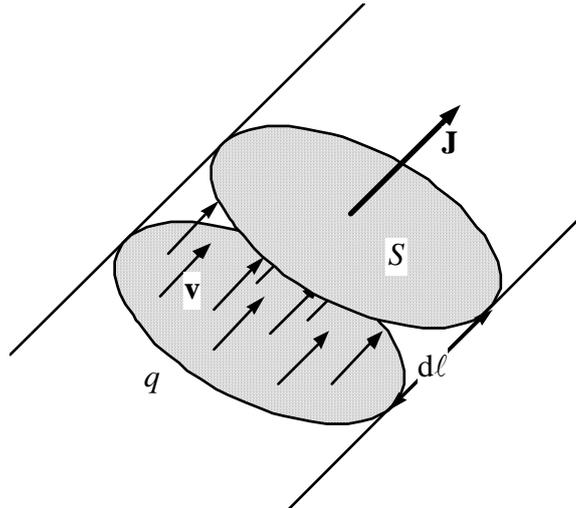


Figura 3.6 - Definizione del vettore \mathbf{j} , densità di corrente, tramite la densità $\tilde{\rho}$ e la velocità \mathbf{v} delle cariche.

Si consideri ora la sezione S trasversale a \mathbf{v} come in figura; nella ipotesi di situazione pienamente uniforme la quantità di carica infinitesima dq che passa in dt attraverso S vale $\rho d\ell dS$ se $d\ell$ è il percorso corrispondente alla velocità data in dt . Il flusso di carica attraverso S vale dq/dt ovvero $j S$. Il nuovo vettore introdotto, ha le dimensioni di corrente specifica per unità di superficie. Se nella regione considerata la densità di carica e la velocità sono variabili è ancora possibile esprimere attraverso \mathbf{j} la corrente che attraversa una data superficie. Si deve usare la espressione:

$$\int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}_n dS = i \quad (3.13)$$

che generalizza la precedente. La espressione usata è il flusso di un vettore attraverso una superficie S la cui normale corrente è \mathbf{i}_n . Al proposito si esamini la Figura 3.7.

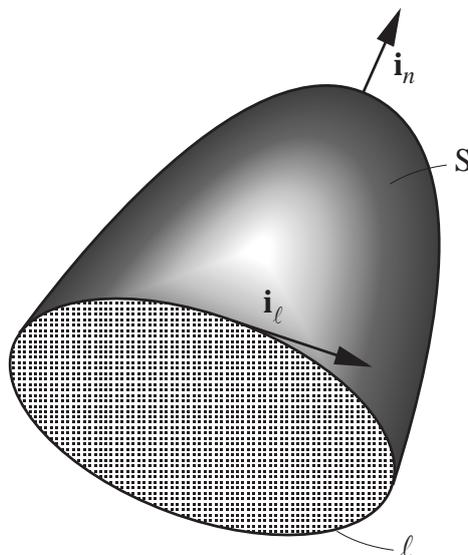


Figura 3.7 La corrente i come flusso del vettore \mathbf{j} .

E' possibile anche una ulteriore estensione: considerando la corrente i in transito sulla superficie trasversale S di un conduttore il cui elemento infinitesimo di lunghezza $d\ell$ abbia direzione \mathbf{i}_ℓ si ha utilizzando la espressione della forza di Lorentz:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{i}_\ell \times \mathbf{b} d\ell i, \quad (3.14)$$

dove il primo membro esprime l'infinitesimo di forza che si esercita sull'infinitesimo di conduttore percorso da corrente e si è introdotto il vettore \mathbf{b} , induzione magnetica che nel vuoto vale semplicemente $\mu_0 \mathbf{h}$, ma che è in effetti il vettore cui, con maggior generalità, è collegata la forza (da sostituire dunque anche nella (3.11) al posto di $\mu_0 \mathbf{h}$ per ottenere la generalizzazione).

E' ora il caso di completare la introduzione dei vettori caratteristici dell'elettromagnetismo definendo \mathbf{d} , induzione elettrica, che nel vuoto vale $\varepsilon_0 \mathbf{e}$.

I valori delle costanti introdotte sono:

$$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Farad/m} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Henry/m}$$

Una formulazione più completa delle relazioni tra i vettori introdotti all'interno dei mezzi materiali porta alla definizione di coppie di valori diversi di queste costanti, indicate allora con μ, ε , per ogni tipo di mezzo materiale.

3.4 Le equazioni di Maxwell in forma integrale

Nel paragrafo precedente sono state introdotte alcune delle relazioni che hanno fornito le basi sperimentali dell'elettromagnetismo. In effetti molte altre esperienze dovrebbero essere riportate per mettere in evidenza altri aspetti fondamentali dei fenomeni. In particolare sono importanti quegli esperimenti che hanno messo in evidenza come in situazioni di variabilità nel tempo i campi elettrici e magnetici siano tra loro correlati. Per evitare di moltiplicare i fatti singoli è tempo di introdurre la grande sintesi teorica che nel secolo scorso fu realizzata da J.C.Maxwell. In una regione dello spazio dove il mezzo materiale che la riempie è caratterizzato da particolari valori di permeabilità e permittività μ, ε una prima formulazione integrale di queste relazioni è la seguente:

$$\oint_{\ell} \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_\ell d\ell = - \frac{d}{dt} \int_S \mu \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_n dS \quad (3.15)$$

$$\oint_{\ell} \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_{\ell} d\ell = \frac{d}{dt} \int_S \varepsilon \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n dS + \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}_n dS \quad (3.16)$$

Nelle relazioni precedenti, la superficie S è una qualunque superficie che si appoggia sulla curva ℓ che deve essere chiusa; i versori che compaiono negli integrali sono i versori diretti lungo la normale uscente alla superficie S . Gli integrali sottoposti a derivazione rappresentano il **flusso** del vettore indicato all'interno; variazioni di flusso nel tempo generano l'accoppiamento tra i due vettori. In caso di andamenti costanti, si ottengono le espressioni già viste precedentemente. In caso di andamenti variabili, per esempio sinusoidali, si genera quell'accoppiamento tra i vettori che costringe a trattarli congiuntamente ed a chiamare campo elettromagnetico l'insieme dei due vettori \mathbf{e} ed \mathbf{h} . Questo accoppiamento è anche all'origine della nascita dei fenomeni radiativi, come potè dimostare sperimentalmente Hertz. Nel vuoto si originano così le **onde elettromagnetiche** cui si deve il moderno sistema di telecomunicazione. Se invece dello spazio libero e vuoto si impongono restrizioni attraverso metalli, si ottiene la propagazione delle onde elettromagnetiche nei **cavi coassiali** o nelle **guide d'onda**. Se si utilizzano costrizioni attraverso dielettrici si hanno le **fibre ottiche**. Tutti i fenomeni propagativi hanno una matrice comune; si differenziano nell'andamento delle espressioni del campo elettromagnetico a seguito delle diverse condizioni che l'onda trova nella sua propagazione.

La differenza di mezzo materiale nella regione sede del fenomeno elettromagnetico produce inoltre la estensione della relazione tra le coppie di vettori introdotte. Sarà dunque più in generale:

$$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}; \quad (3.18)$$

i valori delle due costanti dipendono dal materiale e possono essere valutati attraverso alcune conseguenze misurabili delle equazioni di Maxwell.

I due vettori \mathbf{d} e \mathbf{b} sono quelli connessi direttamente con le cariche responsabili del fenomeno elettromagnetico; per essi valgono le seguenti ulteriori relazioni:

$$\oiint_S \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_n dS = Q = \int_V \tilde{\rho} dV \quad (3.19)$$

$$\oiint_S \mathbf{b} \cdot \mathbf{i}_n dS = 0 \quad (3.20)$$

La superficie S è una superficie chiusa che racchiude il volume V . La (3.19) è il collegamento della induzione elettrica con le cariche elettriche; la (3.20) esprime invece la inesistenza fisica delle cariche magnetiche.

AVVERTENZE. In effetti esistono mezzi materiali per cui le relazioni tra i campi si presentano in modo più complesso rispetto alle (3.17), (3.18); tali mezzi, detti **anisotropi**, non verranno trattati in questa sede. Le equazioni di Maxwell si presentano molto eleganti, ma dissimmetriche a causa della mancanza in natura delle cariche magnetiche. Si usa però introdurre un termine di densità di corrente magnetica per realizzare la simmetria, come verrà approfondito nel paragrafo 4.4. Tale termine, nullo quando gli si attribuisce un diretto significato fisico, è in grado di dare opportuna schematizzazione matematica di parecchie situazioni reali e dunque risulta spesso di utilità.

ESERCIZI

- 1* Una carica Q isolata nello spazio è un problema a totale simmetria sferica. Si dimostri il campo elettrico determinato attraverso la legge di Coulomb a partire dalla (3.19).
- 2 Si determini la forza che si esercita tra un filo percorso da corrente i e un elemento infinitesimo di corrente $i dl$ ad esso parallelo.
- 3 In una regione dello spazio è presente un campo elettrico di questo tipo:

$$\mathbf{e} = (10x + 2y)\mathbf{i}_x + (2x - 12y)\mathbf{i}_y$$

Calcolare la differenza di potenziale V_{AB} fra i due punti $A(1,2)$ e $B(-3,1)$; si verifichi che si ottiene lo stesso risultato andando da A a B seguendo due percorsi differenti. Considerato infine il rettangolo di vertici opposti A e B , verificare che la circuitazione di \mathbf{e} è nulla.