A4 - Campi vettoriali e campi scalari

a) **Campo scalare**

Sia Ω una regione dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$: se ad ogni punto P = (x, y, z) di Ω è associato uno ed uno solo scalare Φ, funzione del punto stesso, diremo che un *campo scalare* Φ è stato definito in Ω. In altri termini:

$$\boxed{\Phi:\ P \in \mathbf{R}^3 \ \rightarrow\ \Phi(P) \in \mathbf{R} \quad (\text{o } \mathbf{C})}$$

Indicheremo il campo scalare con la notazione Φ(x, y, z, t), oppure Φ(P, t). Qualora Φ non dipenda dal tempo, e cioè $\Phi = \Phi(x, y, z) = \Phi(P)$, il campo scalare si dirà *stazionario*.

Campi scalari di particolare interesse per lo studio dei fenomeni elettromagnetici sono, ad esempio, la densità di carica volumetrica ρ(x, y, z, t), oppure il potenziale elettrostatico V(x, y, z).

Chiameremo *superficie di livello* il luogo di tutti i punti nei quali Φ assume il medesimo valore Φ_0. In formule:

$$\boxed{\Phi(x, y, z) = \Phi_0}$$

Si può dimostrare che se il campo scalare soddisfa opportune condizioni di regolarità (è sufficiente che sia derivabile almeno 2 volte e che il gradiente di Φ sia non nullo in ogni punto di Ω), per ogni punto passa <u>*una ed una sola*</u> superficie di livello: per questo motivo, si può affermare che *la conoscenza delle superfici di livello in ogni punto di Ω consente di descrivere completamente un campo scalare*.

Se la regione Ω è bidimensionale, si parla di *linee di livello*. Talvolta, per agevolare la rappresentazione grafica, si può utilizzare la rappresentazione mediante linee di livello anche nel caso di campi tridimensionali, considerando le linee ottenute per intersezione fra le superfici di livello e un arbitrario piano α definito in Ω.

b) **Campo vettoriale**

Sia ancora Ω una regione dello spazio $\mathbf{R}^3$: se ad ogni punto P = (x, y, z) è associato uno ed un solo vettore **V**, funzione del punto stesso, diremo che un *campo vettoriale* **V** è stato definito in Ω. **V** può essere un vettore dello spazio $\mathbf{R}^n$ oppure dello spazio $\mathbf{C}^n$. In altri termini, un campo vettoriale è una funzione di variabile vettoriale a valori vettoriali, così definita:

$$\boxed{\mathbf{V}:\ P \in \Omega \subseteq \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}(P) \in \mathbf{R}^n \quad (\text{o } \mathbf{C}^n)}$$

Nel seguito si farà riferimento unicamente a campi vettoriali a valori in $\mathbf{R}^3$, oppure a valori in $\mathbf{C}^3$.
In generale, un campo vettoriale può essere funzione di altri parametri oltre che del punto. Spesso, nella pratica, si utilizzano campi vettoriali rappresentativi di grandezze fisiche variabili nel tempo, oltre che nello spazio. Tali campi saranno indicati nel seguito con **V**(x, y, z, t), oppure con la notazione sintetica **V**(P, t). Se **V** non dipende dalla variabile tempo, cioè **V** = **V**(x, y, z) = **V**(P), allora il campo vettoriale si dice *stazionario*.
Un campo vettoriale **V** è sempre rappresentativo di una grandezza fisica (vettoriale): al vettore **V** sarà quindi associata anche una dimensione, dipendente dalla grandezza rappresentata; a seconda della dimensione della grandezza vettoriale rappresentata, il campo vettoriale può assumere diverse denominazioni. Ad esempio, se **V** ha le dimensioni di una velocità parleremo di “campo di velocità”, se **V** ha le dimensioni di una forza, parleremo di “campo di forze”. In questo corso, la teoria matematica dei campi vettoriali sarà applicata allo studio delle principali grandezze elettromagnetiche (campo elettrico **E**, campo magnetico **H**, induzione magnetica **B**, spostamento elettrico **D**, …).

Sia α un arbitrario piano giacente nella regione Ω. Si chiamano *linee vettoriali* le linee di α parallele in ogni punto P al vettore **V**. In altri termini, i punti delle linee vettoriali soddisfano la relazione vettoriale:

$$\boxed{\mathbf{V} \times d\vec{\ell} = 0} \tag{1}$$

dove $d\vec{\ell}$ è il vettore di lunghezza infinitesima tangente alla linea vettoriale nel punto P. Tale relazione, difatti, è soddisfatta se e solo se **V** e $d\vec{\ell}$ sono paralleli.
Esprimendo il vettore infinitesimo tangente alla linea in componenti cartesiane:

$$d\vec{\ell} = dx\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{x}} + dy\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathrm{y}} + dz$$

l’equazione vettoriale (1) si può riscrivere nel modo seguente:

$$\begin{cases} V_{\mathrm{y}}dz - V_{\mathrm{z}}dy = 0 \\ V_{\mathrm{z}}dx - V_{\mathrm{x}}dz = 0 \\ V_{\mathrm{x}}dy - V_{\mathrm{y}}dx = 0 \end{cases}$$

dalle 3 equazioni scalari scritte sopra si ricava infine:

$$\boxed{\frac{dx}{V_{\mathrm{x}}} = \frac{dy}{V_{\mathrm{y}}} = \frac{dz}{V_{\mathrm{z}}}} \tag{2}$$

Risolvendo l’equazione differenziale (2) si può quindi ricavare l’equazione cartesiana delle traiettorie descritte dalle linee di flusso del campo. In modo analogo si può dimostrare che esprimendo le componenti del campo rispetto ad un generico sistema di coordinate curvilinee (u_1,u_2,u_3) risulta:

$$\frac{ds_1}{V_{u1}} = \frac{ds_2}{V_{u2}} = \frac{ds_3}{V_{u3}}$$

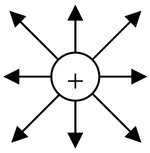
dove (ds_1,ds_2,ds_3) e (Vu_1,Vu_2,Vu_3) sono, rispettivamente, gli archi elementari e le componenti del vettore **V** nel sistema di coordinate considerato.

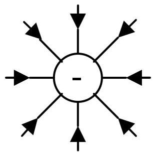
<u>Esercizio</u> Determinare sul piano xy l'espressione analitica delle linee di flusso del campo elettrostatico **E**(x,y) generato da una carica puntiforme q0 posta nell'origine del sistema di riferimento cartesiano.

$$\mathbf{E}(x,y) = \frac{q_0}{r^2}\hat{\mathbf{i}}_\rho = \frac{q_0}{r^2}\left[\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}}_x + \sin\phi\,\hat{\mathbf{i}}_y\right]$$

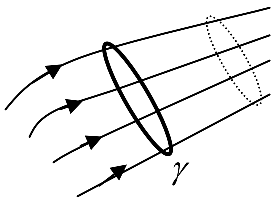
Se **V** è un campo di velocità, le linee vettoriali si diranno "linee di flusso" (o "linee di corrente", se **V** è stazionario). Se **V** è un campo di forze, si parla di "linee di forza". Anche nel caso dei campi E.M. si usa generalmente la dizione *linee di flusso*, o talvolta, impropriamente, di linee di forza.

Le linee vettoriali sono orientate sempre con verso concorde a quello del vettore V ad esse tangente. Un punto del campo vettoriale dal quale si dipartono tutte le linee vettoriali si dirà una "sorgente" del campo; viceversa, un punto nel quale si chiudono tutte le linee vettoriali si dirà un "pozzo". Ad esempio, nel caso del campo elettrostatico le cariche positive sono le sorgenti, le cariche negative i pozzi.

SORGENTE 

POZZO 

Data una linea chiusa γ, si definisce infine ***tubo di flusso*** la superficie tubolare formata da tutte le linee vettoriali che passano per i punti di γ.



TUBO DI FLUSSO

La rappresentazione dei campi mediante le linee vettoriali ha un limite: tali linee caratterizzano in modo preciso solo la direzione e il verso della grandezza vettoriale rappresentata, ma non danno informazioni rigorose sulla sua intensità. Per ovviare a ciò, si utilizza il ***criterio di Faraday***: le linee di flusso vengono disegnate più ravvicinate nelle zone dello spazio in cui l'intensità del campo è maggiore. Per avere informazioni abbastanza precise sull'intensità del campo, *è quindi necessario che si abbia una relazione di diretta proporzionalità fra la densità di linee di flusso disegnate e il modulo del vettore*. Si tratta, in ogni caso, di un criterio qualitativo.

Un campo vettoriale **V** costante in tutti i punti dello spazio Ω si dirà *uniforme*: le linee vettoriali di un campo uniforme sono ovunque parallele ed equidistanziate.