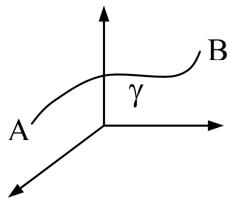
A8 - Campi vettoriali conservativi e solenoidali

A8.1 – Campi conservativi e campi irrotazionali

Sia **V**(x,y,z) un campo vettoriale definito in una regione di spazio Ω, e sia γ un cammino, di estremi A e B, definito in Ω . Sia $\vec{\ell}(u)$ una parametrizzazione di γ, funzione della variabile scalare u.

$$\vec{\ell}: \quad u \in [a,b] \subseteq \mathbf{R} \rightarrow [\gamma] \subseteq \mathbf{R}^3$$

$$\text{con} \begin{cases} A = \vec{\ell}(a) \\ B = \vec{\ell}(b) \end{cases}$$



Usando la notazione vettoriale, si ha:

$$\vec{\ell}(u) = OP(u) = x(u)\,\hat{\mathbf{i}}_x + y(u)\,\hat{\mathbf{i}}_y + z(u)\,\hat{\mathbf{i}}_z$$

La seguente grandezza assume grande importanza nella descrizione delle proprietà fisiche di **V**:

$$\boxed{L_\gamma = \int_{\gamma\,A}^{B} \mathbf{V} \cdot d\vec{\ell}}$$

Tale grandezza è in generale dipendente dalla topologia del cammino γ che unisce i punti A e B, ed un significato fisico diverso a seconda della grandezza fisica rappresentata da **V**. Ad esempio, se **V** è un campo di forze, L_γ ha le dimensioni di un lavoro. Se **V** è il vettore campo elettrico **E**, L_γ ha le dimensioni di una tensione; se **V** è il vettore campo magnetico **H**, L_γ ha le dimensioni di una corrente, e così via.

DEFINIZIONE: Un campo vettoriale **V** si dice ***conservativo***, o esatto, se risulta, in ogni punto P di Ω:

$$\boxed{\mathbf{V} \cdot d\vec{\ell} = dU}$$

cioè se la forma differenziale $\mathbf{V} \cdot d\vec{\ell}$ è esprimibile come il differenziale esatto di un campo scalare U(x,y,z).

TEOREMA 1

Se un campo vettoriale **V** è conservativo, L_γ ***non dipende dalla topologia del cammino γ, ma solo dagli estremi A e B***.

Dimostrazione:

Applicando la definizione precedente, risulta:

$$L_\gamma = {}_\gamma\int_A^B \mathbf{V}\cdot d\vec{\ell} = {}_\gamma\int_A^B dU = U(B) - U(A)$$

COROLLARIO

Se un campo vettoriale **V** è conservativo, la sua circuitazione lungo una qualunque linea chiusa Γ è nulla.

Dimostrazione:

Basta prendere un arbitrario punto P di Γ, e poi si procede come nella dimostrazione precedente, osservando che $A \equiv B \equiv P$.

$$\oint_\Gamma \mathbf{V}\cdot d\vec{\ell} = \oint_\Gamma dU = U(P) - U(P) = 0$$

TEOREMA 2

Se un campo vettoriale **V** è conservativo, esiste un campo scalare U tale che risulti:

$$\boxed{\mathbf{V} = \nabla\, U}$$

Dimostrazione:

Essendo $\mathbf{V} = V_x\,\hat{\mathbf{i}}_x + V_y\hat{\mathbf{i}}_y + V_z\hat{\mathbf{i}}_z$ e $d\vec{\ell} = dx\,\hat{\mathbf{i}}_x + dy\,\hat{\mathbf{i}}_y + dz\,\hat{\mathbf{i}}_z$,

la forma $\mathbf{V}\cdot d\vec{\ell}$ si può riscrivere come: $V_x\, dx + V_y dy + V_z dz$

Applicando la definizione di campo conservativo, e ricordando che il differenziale totale di una funzione scalare U(x,y,z) è:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)dz$$

si ha:

$$V_x dx + V_y dy + V_z dz = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)dz$$

Affinchè tale uguaglianza sia verificata deve risultare, evidentemente:

$$V_x = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \quad V_y = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) \quad V_z = \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

e quindi:

$$\mathbf{V} = \nabla\, U$$

Il campo scalare U detto ***potenziale*** del campo vettoriale **V**. Il teorema sopra enunciato esprime il fatto Ωche ***se un campo è conservativo, allora esso ammette potenziale***.

Per quanto detto in precedenza, risulta ovviamente sempre verificata la seguente proprietà:

$$\int_{\gamma\, A}^{B} \nabla\, \mathrm{U} \cdot d\vec{\ell} = \mathrm{U(B)} - \mathrm{U(A)}$$

per ogni linea γ in Ω di estremi A e B.

In particolare, nel caso della circuitazione risulta:

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \nabla \mathrm{U} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0}$$

per ogni linea chiusa Γ appartenente al dominio Ω.

Si osservi anche che il potenziale è una grandezza definita a meno di una costante additiva arbitraria. Infatti, se k è uno scalare che non dipende da x, y, z, per definizione di gradiente risulta:

$$\nabla\, (\mathrm{U} + \mathrm{k}) = \nabla\, \mathrm{U}$$

Naturalmente, tale arbitrarietà si elimina quando si calcola la differenza di potenziale fra 2 punti. Si è visto che se un campo è conservativo L_γ coincide con la differenza di potenziale fra i 2 punti A e B; se U e U' sono due diversi potenziali per **V**, con U' = U + c, si ha infatti:

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{dU} = \mathrm{U'(B) - U'(A) = U(B) + c - U'(A) - c = U(B) - U(A)}$$

Le superfici di livello del potenziale, cioè punti dello spazio Ω per i quali risulta:

$$\mathrm{U\,(x, y, z) = U_0 = cost.}$$

sono dette ***superfici equipotenziali***. Tali superfici godono della seguente importante proprietà: in ogni punto P dello spazio Ω, il vettore **V** è perpendicolare alla superficie equipotenziale che passa per quel punto. Infatti, essendo U costante, in un intorno del punto P appartenente alla superficie equipotenziale risulta:

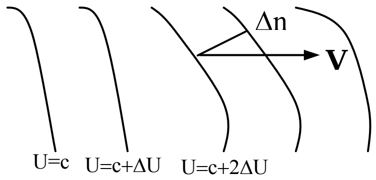
$$d\mathrm{U} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{V} \cdot d\vec{\ell} = 0}$$

perciò o **V** è nullo o è perpendicolare al piano tangente alla superficie equipotenziale nel punto P. In altri termini, le linee vettoriali sono ortogonali in ogni punto alle superfici equipotenziali. Risolvendo l'equazione differenziale scritta sopra si possono inoltre ricavare le equazioni delle superfici (o delle linee) equipotenziali.

Esercizio Si ricavi l'equazione cartesiana delle linee equipotenziali del campo elettrostatico generato sul piano xy da una carica puntiforme q0 posta nell'origine del riferimento cartesiano. Si verifichi che tali linee, e le linee di flusso la cui equazione è stata calcolata precedentemente (si veda l'esercizio proposto nel capitolo su campi vettoriali e scalari) sono mutuamente ortogonali in ogni punto.

La proprietà sopra citata delle superfici equipotenziali suggerisce un metodo alternativo alle linee vettoriali per la rappresentazione del campo: si disegnano un certo numero di superfici equipotenziali (o meglio, le linee che rappresentano la loro intersezione con il piano che interessa), scelte in modo tale che il potenziale varii di una quantità *costante* ΔU passando da una superficie alla successiva.



Se Δn è la distanza tra 2 superfici successive, si può stimare il valore del vettore **V** come:

$$\mathbf{V} \cong \frac{\Delta U}{\Delta n}$$

Anche in questo caso, tanto minore è la distanza geometrica Δn tra 2 superfici successive, tanto maggiore è l'intensità del campo **V** in quella porzione di spazio.

DEFINIZIONE: Un campo vettoriale **V** si dice ***irrotazionale*** se risulta, in ogni punto P di Ω:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{V} = 0}$$

TEOREMA 3

Se un campo vettoriale **V** è conservativo, esso è irrotazionale. In altri termini, risulta:

$$\mathbf{V} \text{ conservativo } \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{V} = 0 \quad \text{per ogni punto } P \in \Omega$$

Dimostrazione:

Dal teorema precedente, se **V** è esatto esiste un campo scalare U tale che $\mathbf{V} = \nabla U$. Per le note proprietà degli operatori differenziali, si ha sempre:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times \nabla U \equiv 0 \qquad \forall P$$

Si può dimostrare il seguente

TEOREMA 4

Se un campo vettoriale **V** definito su un dominio Ω *a connessione lineare semplice* è irrotazionale, esso è conservativo.

Il teorema sopra enunciato esprime il fatto che mentre un campo conservativo è necessariamente irrotazionale, l'implicazione contraria non è vera in generale, cioè esistono campi che sono irrotazionali ma non conservativi. Tuttavia, se il dominio di definizione del campo soddisfa le caratteristiche di regolarità specificate nell'enunciato del teorema (in realtà è sufficiente che tale dominio sia stellato rispetto ad ogni suo punto, che è una condizione meno restrittiva rispetto alla semplice connessione), allora le due dizioni "campo conservativo" e "campo irrotazionale" possono considerarsi perfettamente equivalenti. Si noti che le caratteristiche di regolarità del campo vettoriale specificate nel teorema 4 sono le medesime che devono essere soddisfatte perché valga il teorema di Stokes.

Esempio. Il campo di Biot e Savart $\mathbf{V} = \frac{-y}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{i}}_x + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{i}}_y$, di cui si è già parlato, è ovviamente un esempio di campo irrotazionale ma non conservativo. Si e' visto infatti che risulta $\nabla \times \mathbf{V} \equiv 0$, ma anche che la circuitazione di **V** è in generale una quantità non nulla, per cui tale campo non è conservativo.

Nelle applicazioni che si vedranno nel seguito, le ipotesi di validità di questo teorema possono ritenersi sempre verificate, pertanto d'ora in poi i termini irrotazionale e conservativo saranno considerati come sinonimi. Del resto, ciò è in accordo con quanto affermato dal teorema di Stokes. Infatti, se il campo è definito in una regione di spazio in cui tale teorema può ritenersi valido, si ha:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{V} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S_\gamma} \nabla \times \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS$$

da cui si deduce:

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0 \;\Rightarrow\; \oint_{\gamma} \mathbf{V} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

A8.2 Campi solenoidali e campi indivergenti

DEFINIZIONE:

Un campo vettoriale **V** si dice ***solenoidale*** in un dominio Ω se il suo flusso attraverso una arbitraria superficie *chiusa* S contenuta in Ω è nullo. In altri termini:

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_{S} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS = 0}$$

TEOREMA 5

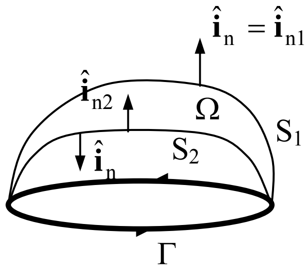
Un campo vettoriale **V** solenoidale in Ω soddisfa la seguente proprietà:

$$\iint_{S_1} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS = \iint_{S_2} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS$$

per ogni coppia di superfici S_1 e S_2 contenute in Ω e con il medesimo contorno Γ.

Dimostrazione:

Si considerino due superfici S_1 ed S_2 aventi per contorno la medesima linea. L'unione delle 2 superfici S_1 ed S_2 costituisce una superficie chiusa, che racchiude il volume Ω.



Essendo il campo **V** solenoidale, si ha:

$$\oint\!\!\oint_{S_1+S_2} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS = 0$$

La normale $\hat{\mathbf{i}}_n$ alla superficie chiusa $S_1 + S_2$ usata per calcolare il flusso è sempre diretta verso l'esterno, ma in questo modo, lungo S_2 , $\hat{\mathbf{i}}_n$ è diretta in senso opposto rispetto alla normale $\hat{\mathbf{i}}_{n2}$ di S_2 (il cui verso è stabilito a partire dal senso di percorrenza di Γ, secondo la regola della vite). Si ha quindi:

$$\oint\!\!\oint_{S_1+S_2} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS = \iint_{S_1} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{n1} \, dS - \iint_{S_2} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{n2} \, dS = 0$$

E infine:

$$\iint_{S_1} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{n1} \, dS = \iint_{S_2} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{n2} \, dS$$

cioè:

$$\Psi_{S1} = \Psi_{S2} = \Psi$$

dove con Ψ si è indicato il flusso concatenato con la linea Γ.

Il teorema 5 esprime il fatto che il flusso di un campo solenoidale attraverso una superficie aperta dipende solo dal suo contorno Γ, e non dalla topologia della superficie stessa. In altri termini, il flusso è lo stesso per ogni superficie che "si appoggia" a Γ. Per questo motivo il flusso di un campo solenoidale attraverso una superficie aperta di orlo Γ viene anche detto *flusso concatenato* con la linea chiusa Γ. Quando si ha a che fare con campi solenoidali si può parlare senza ambiguità di flusso concatenato con una linea senza bisogno di riferirsi ad una specifica superficie, essendo quest'ultima arbitraria; nel caso si debba calcolare un flusso concatenato con una linea, conviene sempre scegliere la superficie concatenata che si ritiene "più comoda" per l'effettuazione dei calcoli, ad esempio la superficie piana contenuta in Γ.

- Si osservi l'analogia fra campi conservativi e campi solenoidali: in un campo conservativo, l'integrale di linea non dipende dalla forma della linea, ma solo dai suoi estremi; in un campo solenoidale, il flusso attraverso una superficie non dipende dalla forma della superficie, ma solo dal suo contorno…

Si può dimostrare il seguente

TEOREMA 6

Se un campo vettoriale **V** definito in un dominio Ω è solenoidale, allora esiste un campo vettoriale **G** definito nello stesso dominio tale che:

$$\iint_{S_\Gamma} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS = \oint_\Gamma \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell d\ell$$

dove Γ è una qualsiasi linea chiusa contenuta in Ω e S_Γ è una qualsiasi superficie aperta contenuta in Ω che abbia per contorno Γ.

Il campo **G** che compare nel teorema 6 viene detto ***potenziale vettore*** associato al campo **V**.

COROLLARIO:

Un campo vettoriale **V** è solenoidale se e solo se esso è esprimibile come il rotazionale di un potenziale vettore **G**, cioè in modo tale che risulti:

$$\boxed{\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{G}}$$

<u>Dimostrazione</u>:

Applicando il teorema di Stokes all'equazione formulata nel teorema 2 si ottiene:

$$\iint_{S_\Gamma} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS = \oint_\Gamma \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell d\ell = \iint_{S_\Gamma} \nabla \times \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS$$

e quindi, poiché per ipotesi la superficie concatenata S_Γ è arbitraria, il primo ed il terzo integrale coincidono se e solo risulta $\mathbf{V} \equiv \nabla \times \mathbf{G}$ in ogni punto P del dominio Ω.

Si osservi che il potenziale vettore **G** è definito a meno del gradiente di un campo scalare ψ qualsiasi, essendo, per le proprietà degli operatori differenziali:

$$\nabla \times (\mathbf{G} + \nabla \psi) = \nabla \times \mathbf{G} \ + \ \nabla \times \nabla \psi \ = \nabla \times \mathbf{G}$$

Pertanto, comunemente si effettua una opportuna scelta (gauge) del campo scalare ψ, al fine di eliminare tale arbitrarietà. Tale scelta non ha alcuna influenza, chiaramente, sul campo vettoriale solenoidale **V**.

DEFINIZIONE: Un campo vettoriale **V** si dice ***indivergente*** se risulta, in ogni punto P di Ω:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{V} = 0}$$

TEOREMA 7

Se un campo vettoriale **V** è solenoidale, esso è indivergente. In formule:

$$\mathbf{V} \text{ solenoidale } \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

<u>Dimostrazione</u>:

Applicando il teorema precedente e ricordando le proprietà degli operatori differenziali si ha:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{G} \equiv 0$$

Si può dimostrare il seguente

TEOREMA 8

Se un campo vettoriale **V** definito su un dominio Ω a *connessione superficiale semplice* è indivergente, esso è solenoidale.

Il teorema sopra enunciato esprime il fatto che mentre un campo solenoidale è necessariamente indivergente, l'implicazione contraria non è vera in generale, cioè esistono campi che sono indivergenti ma non solenoidali. Tuttavia, se il dominio di definizione del campo soddisfa le caratteristiche di regolarità specificate nell'enunciato del teorema (in realtà è sufficiente che tale dominio sia stellato rispetto ad ogni suo punto, che è una condizione meno restrittiva rispetto alla semplice connessione), allora le due dizioni "campo solenoidale" e "campo indivergente" possono considerarsi perfettamente equivalenti. Si noti che le caratteristiche di regolarità del campo vettoriale specificate nel teorema 8 sono le medesime che devono essere soddisfatte perché valga il teorema di Gauss-Green.

Nelle applicazioni che si vedranno nel seguito, le ipotesi di validità di questo teorema possono ritenersi sempre verificate, pertanto d'ora in poi i termini indivergente e solenoidale saranno considerati come sinonimi. Del resto, ciò è in accordo con quanto affermato dal teorema di Gauss. Infatti, se il campo è definito in una regione di spazio in cui tale teorema può ritenersi valido, si ha:

$$\oiint_S \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_n \mathrm{dS} = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{V}\,\mathrm{d}V$$

segue che:

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0 \;\Rightarrow\; \oiint_S \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_n \mathrm{dS} = 0$$

I campi solenoidali godono di alcune importanti proprietà. In particolare, nel caso di campi solenoidali assume particolare importanza il concetto di "***tubo di flusso***" già introdotto in precedenza.

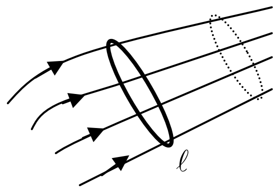
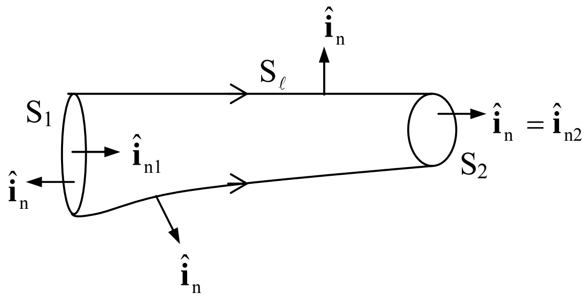


Figura 1 - Tubo di flusso

Proprietà 1

Si consideri un tubo di flusso qualunque di un campo vettoriale **V** solenoidale: il flusso del campo attraverso una generica sezione del tubo è ***costante***, al variare della sezione stessa.

Per dimostrare questa affermazione, si consideri una porzione di tubo di flusso delimitata da due linee chiuse ℓ_1 ed ℓ_2. Siano S_1 ed S_2 le superfici piane aventi per contorno rispettivamente ℓ_1 ed ℓ_2.



Si consideri ora la superficie chiusa formata da S_1, S_2 e dalla superficie laterale S_ℓ della porzione di tubo di flusso. Risulta:

$$\oiint_{S_1+S_2+S_\ell} \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_n\,\mathrm{dS} = \iint_{S_1} \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_n \mathrm{dS} + \iint_{S_2} \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_n \mathrm{dS} + \iint_{S_\ell} \mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{i}}_n \mathrm{dS} = 0$$

Il flusso attraverso S_ℓ è evidentemente nullo, poiché il campo non può avere componenti in direzione normale alle linee vettoriali. La normale alla superficie chiusa si trova ad essere discorde, lungo S_1, con il verso positivo della normale ad S_1 stabilito dall'orientazione delle linee vettoriali. Si ha dunque:

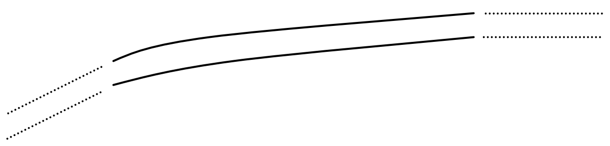
$$-\iint_{S_1} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{n1} dS + \iint_{S_2} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{n2} dS = 0$$

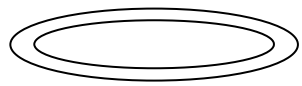
e quindi:

$$\Psi_{S1} = \Psi_{S2} = \Psi$$

<u>Proprietà 2</u>

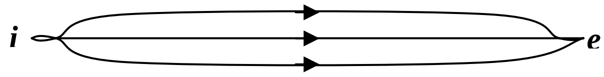
Una importante conseguenza della proprietà 1 è che <u>i tubi di flusso di un campo solenoidale non possono avere un inizio e una fine, nella porzione di spazio in cui è definito il campo: ***o si estendono indefinitamente, oppure sono chiusi***</u>.





Spesso si dice semplicemente che i tubi di flusso del campo solenoidale sono chiusi, classificando il caso di tubi estesi indefinitamente come caso degenere (tubi che "si chiudono all'infinito").

La veridicità di quest'ultima proprietà si dimostra facilmente per assurdo. Infatti, se i tubi di flusso avessero un inizio e una fine, essi dovrebbero "chiudersi" in un punto (cioè una sorgente o un pozzo), nelle sezioni di inizio e di fine. Attraverso le sezioni di inizio e fine, il flusso di **V** risulterebbe perciò nullo.



Ma per la proprietà 1 dimostrata in precedenza, dovrebbe essere anche:

$$\Psi_i = \Psi_e = \Psi = 0$$

e quindi il flusso del campo vettoriale sarebbe nullo su ogni sezione, il che è assurdo, per come è definito il tubo di flusso.

Poiché il concetto di tubo di flusso è semplicemente un'astrazione che rappresenta un generico insieme di linee vettoriali, è evidente che dimostrando la proprietà 2 si è data una giustificazione rigorosa del fatto che "***<u>tutte le linee vettoriali di un campo vettoriale solenoidale sono chiuse</u>***" (non vi sono, cioè, né sorgenti né pozzi).

Proprietà 3

Si osservi infine che, poiché il campo solenoidale ha necessariamente un potenziale vettore, se S_i è una generica sezione del tubo di flusso si ottiene, applicando il teorema di Stokes:

$$\iint_{S_i} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS = \iint_{S_i} \nabla \times \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS = \oint_{\ell_i} \mathbf{G} \cdot d\vec{\ell}$$

cioè il flusso di **V** attraverso un tubo di flusso è uguale alla circuitazione del relativo potenziale vettore lungo una linea ℓ_i che "avvolge" il tubo di flusso.

CAMPI CONSERVATIVI E CAMPI SOLENOIDALI: SCHEMA RIASSUNTIVO

Campi conservativi	**Campi solenoidali**
$\nabla \times \mathbf{V} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$
L'integrale di **V** lungo una curva aperta dipende solo dagli estremi di integrazione. $\int_{\gamma\, A}^{B} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell d\ell = U(B) - U(A)$	Il flusso di **V** attraverso una superficie aperta dipende solo dal contorno della superficie. $\int_{S_{1\gamma}} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS = \int_{S_{2\gamma}} \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS$
La circuitazione di **V** lungo una curva chiusa è nulla. $\oint_\gamma \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell d\ell = 0$	Il flusso di **V** attraverso una superficie chiusa è nullo. $\oiint_S \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS = 0$
$\mathbf{V} = \nabla U$	$\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{G}$
La funzione U è un potenziale scalare definito a meno di una costante: $U = U^* + \text{cost.}$ cioè a meno di una funzione a gradiente nullo.	La funzione **G** è un potenziale vettore definito a meno di un gradiente: $\mathbf{G} = \mathbf{G}^* + \nabla \psi$ cioè a meno di una funzione a rotore nullo.
U viene determinato in ogni punto fissando ad arbitrio il suo valore in un punto di riferimento arbitrario.	**G** viene determinato in ogni punto imponendo una opportuna condizione di compatibilità (gauge), ad esempio $\psi = 0$ o $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$.

A8.3 – Campi armonici

DEFINIZIONE:

Un campo vettoriale che sia contemporaneamente conservativo e solenoidale si dirà ***armonico***.

TEOREMA 9

Il potenziale scalare U di un campo armonico soddisfa *l'equazione di Laplace scalare*:

$$\boxed{\nabla^2\, U = 0}$$

<u>Dimostrazione:</u> essendo il campo conservativo, deve essere $\mathbf{V} = \nabla U$; ma **V** è anche solenoidale e quindi indivergente, perciò risulta:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot \nabla U = \nabla^2 U = 0$$

TEOREMA 10

Il potenziale vettore **G** di un campo armonico soddisfa *l'equazione di Laplace vettoriale*:

$$\boxed{\nabla^2\, \mathbf{G} = 0}$$

<u>Dimostrazione:</u> Essendo il campo **V** solenoidale, esso può essere espresso come rotazionale di un potenziale vettore **G**; ma **V** è anche conservativo e quindi irrotazionale, perciò risulta:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) = -\nabla^2 \mathbf{G} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{G}) = 0$$

avendo sfruttato la ben nota relazione differenziale $\nabla \times (\nabla \times [\;]) = -\nabla^2 [\;] + \nabla(\nabla \cdot [\;])$.

Poiché **G** è determinato a meno di un gradiente, è possibile scegliere un potenziale vettore che soddisfi la condizione $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$ (scelta di Coulomb). Operando tale scelta, risulta $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{G}) = 0$, e quindi è vale l'uguaglianza $\nabla^2 \mathbf{G} = 0$.