

A9 – Alcune applicazioni del calcolo integro-differenziale

A9.1 - RIEPILOGO SUI METODI DI INTEGRAZIONE

Sono stati visti due metodi alternativi per l'effettuazione di integrali di campi vettoriali su linee e superfici:

- Metodo basato sulla formula risolutiva. Tale metodo ha il vantaggio che, una volta parametrizzata la curva o la superficie, la formula risolutiva fornisce immediatamente un integrale unidimensionale nel parametro, nel caso dell'integrale di linea, e un integrale doppio nei due parametri, nel caso del flusso. Lo svantaggio è che talvolta lo svolgimento dei calcoli può risultare un po' lungo, in particolare nel caso del flusso, dove occorre effettuare due derivate vettoriali della parametrizzazione e svolgerne il prodotto vettoriale.

- Metodo basato sulle simmetrie. Tale metodo si basa sul fatto che in alcuni casi il problema integrale è riconducibile a delle simmetrie note. Ad esempio, la circuitazione lungo una circonferenza sul piano xy è evidentemente un problema a simmetria cilindrica: infatti è immediato riconoscere che il versore tangente coincide con il versore \hat{i}_ϕ del sistema di riferimento cilindrico, essendo tale circonferenza la seconda linea coordinata del sistema di coordinate cilindriche; pertanto, in questo caso il parametro associato alla linea viene a coincidere con la coordinata azimutale ϕ . Analogamente, il flusso attraverso una superficie sferica è un problema a simmetria sferica, e si riconosce facilmente che il versore normale alla superficie coincide con il versore radiale \hat{i}_r , mentre i parametri sono le coordinate angolari θ e ϕ . Infine, per completare l'applicazione del metodo occorre esprimere l'elemento di linea o di superficie in funzione delle coordinate (ad esempio, si ha $d\ell = R d\Phi$ per l'elemento di circonferenza, $dS = R^2 \sin\theta d\theta d\Phi$ per l'elemento di superficie sferica). Per completare il calcolo dell'integrale occorre naturalmente esprimere anche le componenti del campo vettoriale, che generalmente variano con le coordinate, nel sistema di riferimento adottato.

Nell'effettuazione di integrali di linea, di flusso e di volume, occorre inoltre tener presente che:

- Quando si effettua un integrale di linea, invertendo il senso di percorrenza della linea (cioè scambiando fra loro i valori minimo e massimo del parametro negli estremi di integrazione), il risultato dell'integrale è uguale al precedente ma con segno invertito. Nel caso della circuitazione, *quando il verso di percorrenza della linea non è esplicitamente menzionato si assume per convenzione che esso sia antiorario*.
- Una cosa analoga avviene per il flusso, dove il valore dell'integrale ha segno opposto a seconda che si scelga di orientare la normale come uscente da una o dall'altra faccia della superficie. Quando si effettua il flusso attraverso una superficie che ha per contorno una linea chiusa orientata, *il verso della normale risulta determinato in modo univoco dal verso di percorrenza della linea, coerentemente con la "regola della vite"*. Infine, quando si effettua il flusso attraverso una superficie *chiusa*, si assume sempre, convenzionalmente, che la normale sia diretta *verso l'esterno* della superficie stessa.
- Spesso, nella pratica, può essere richiesto di effettuare la circuitazione attraverso una "linea spezzata", cioè una linea costituita, ad esempio, da linee o segmenti congiunti fra loro mediante punti angolosi. In tal caso, per effettuare la circuitazione occorre parametrizzare e integrare separatamente ciascun elemento della spezzata, ed infine sommare fra loro

ciascuno degli integrali così ottenuti. Ad esempio, la formula per la circuitazione lungo una linea chiusa spezzata è la seguente:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\vec{\ell} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \mathbf{A} \cdot d\vec{\ell}_i$$

dove N_s è il numero di elementi della spezzata, γ_i è l' i -esimo tratto della spezzata e $\vec{\ell}_i$ la sua parametrizzazione. Una cosa del tutto analoga avviene quando si deve effettuare il flusso attraverso una superficie costituita da più facce, separate l'una dall'altra da spigoli (si pensi ad esempio alla superficie di un poliedro). Anche in questo caso, occorre parametrizzare separatamente ciascuna delle facce e per ciascuna di esse effettuare un integrale, e alla fine sommare gli integrali su ciascuna faccia. Ad esempio, la formula per il flusso attraverso una superficie chiusa siffatta è:

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS = \sum_{i=1}^{N_F} \oiint_{S_i} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}}_{ni} dS_i$$

dove N_F è il numero di facce, S_i l' i -esima faccia e $\hat{\mathbf{i}}_{ni}$ il versore ad essa normale.

- L'effettuazione di integrali di volume non presenta particolari difficoltà, sia nel caso di integrando scalare che vettoriale. L'unico accorgimento che bisogna avere è quello di esprimere l'elemento di volume e il campo scalare (o le componenti del campo vettoriale) nel sistema di riferimento più adatto. Ad esempio, se il problema ha simmetria rettangolare è conveniente utilizzare un riferimento cartesiano, e quindi si ha $dV = dx dy dz$; se il problema ha simmetria sferica, conviene adottare un sistema di coordinate sferiche e porre $dV = R^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$.

Oltre ai due metodi generali di risoluzione descritti sopra, una terza possibile strategia di risoluzione consiste nell'applicazione di teoremi e relazioni integro-differenziali note. Ad esempio, il calcolo di una circuitazione può essere ricondotto al calcolo di un flusso mediante l'utilizzo del teorema di Stokes. Per applicare tale teorema occorre però calcolare il rotazionale di un vettore e quindi calcolare il flusso di quest'ultimo attraverso una superficie concatenata con la linea, operazione che nel caso più generale è più complessa rispetto al calcolo di un integrale di linea. E' quindi chiaro che occorre limitare l'uso di questo teorema solo ai casi in cui la sua applicazione è effettivamente conveniente, ad esempio quando il rotazionale del campo vettoriale originario assume un'espressione particolarmente semplice che rende vantaggiosa la sua integrazione. Un caso tipico in cui questo avviene è quando è richiesto di calcolare un'integrale di linea di un campo definito solo sul piano xy . In questo caso, infatti, il rotazionale di \mathbf{A} si riduce a:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{i}}_z$$

mentre la superficie concatenata con una linea sul piano xy è la superficie piana delimitata dalla linea stessa che ha come normale $\hat{\mathbf{i}}_z$ (o $-\hat{\mathbf{i}}_z$, se la linea viene percorsa in senso orario). Il teorema di Stokes sul piano xy (chiamato anche **formula di Green**) assume quindi la forma:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\gamma} A_x dx + A_y dy = \iint_S \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dS$$

La formula scritta sopra permette quindi di ricondurre un integrale unidimensionale lungo una linea chiusa del piano (orientata in senso antiorario) ad un integrale doppio esteso alla superficie S racchiusa da tale linea. Naturalmente, se si vuole effettuare una circuitazione in senso orario occorre cambiare il segno del secondo membro dell'equazione.

Poiché la formula di Green è un caso particolare del teorema di Stokes, anch'essa è applicabile soltanto se il dominio di definizione del campo ha delle ben determinate caratteristiche di regolarità: se S è la superficie piana racchiusa dalla linea, *la formula di Green è applicabile solo se l'integrale esteso alla superficie S esiste, cioè se le 2 derivate parziali esistono in ogni punto di S .*

La formula di Green si può estendere anche a regioni S del piano delimitate da 2 curve chiuse γ_1 e γ_2 (regioni "forate"). In tal caso si ha:

$$\oint_{\gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\vec{\ell} - \oint_{\gamma_2} \mathbf{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dS$$

Un altro teorema integro-differenziale che in molti casi può essere utilizzato per semplificare il calcolo integrale è il teorema di Gauss. Esso permette infatti di ricondurre il calcolo di un flusso attraverso una superficie chiusa al calcolo di un integrale esteso al volume racchiuso da tale superficie. L'utilizzo di questo teorema è spesso vantaggioso, perché il calcolo di un flusso in alcuni casi può risultare piuttosto oneroso, mentre il calcolo di un integrale di volume di una funzione scalare (la divergenza del campo \mathbf{A}), è un'operazione in molti casi abbastanza agevole. Naturalmente, occorre ricordare che anche questo teorema è applicabile solo se il dominio di definizione di \mathbf{A} è sufficientemente regolare: in pratica, occorre che la grandezza $\nabla \cdot \mathbf{A}$ sia definita in tutto il volume V racchiuso dalla superficie.

Per quanto riguarda gli integrali di linea, esistono 2 ulteriori metodi, applicabili però solo in casi particolari:

a) Se è richiesto di effettuare l'integrale di un campo vettoriale lungo una linea definita sul piano xy che rappresenta il grafico, o una parte di grafico, di una funzione di una variabile del tipo $y = f(x)$ oppure $x = g(y)$, è possibile risolvere l'integrale direttamente nelle variabili x e y , senza necessità di parametrizzare la linea. Infatti, si ricordino le proprietà del calcolo differenziale per funzioni di una variabile:

$$- y = f(x) \Rightarrow dy = f'(x) dx$$

$$- x = g(y) \Rightarrow dx = g'(y) dy$$

Si hanno quindi le 2 seguenti formule risolutive:

- Caso $y = f(x)$:

$$\int_C \mathbf{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_C V_x dx + V_y dy = \int_{x_1}^{x_2} [V_x(x, f(x)) dx + V_y(x, f(x)) f'(x) dx]$$

- Caso $x = g(y)$:

$$\int_C \mathbf{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_C V_x dx + V_y dy = \int_{y_1}^{y_2} [V_x(g(y), y) g'(y) dy + V_y(g(y), y) dy]$$

b) Se il campo \mathbf{V} è conservativo, quindi la forma differenziale $\mathbf{V} \cdot d\vec{\ell}$ è esprimibile come il differenziale *esatto* di una funzione scalare U , cioè risulta:

$$\mathbf{V} \cdot d\vec{\ell} = dU$$

Allora si può calcolare l'integrale nel seguente modo:

$$\int_C \mathbf{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_{C_{P_1}}^{P_2} dU = U(P_2) - U(P_1)$$

in virtù del fatto che l'integrale di linea di un campo conservativo non dipende dalla forma della linea, ma solamente dagli estremi di integrazione.

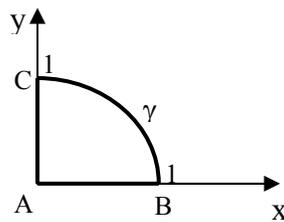
A9.2 – ESEMPI DI CALCOLO DI INTEGRALI DI CAMPI VETTORIALI

Esempio 1 (tratto dal compito complessivo del 15/04/2004)

Sia dato il seguente campo vettoriale:

$$\mathbf{F} = (x^3 - y^3) \hat{\mathbf{i}}_x + (x^3 + y^3) \hat{\mathbf{i}}_y$$

Si calcoli la circuitazione di \mathbf{F} lungo la linea γ rappresentata in figura (si consiglia di far uso dei teoremi noti e di adottare un sistema di coordinate cilindriche, o polari piane).



Soluzione: Applicando il teorema di Stokes nel piano xy (formula di Green), si ha:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S_{\gamma}} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{i}}_z dS = \iint_{S_{\gamma}} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dS = \iint_{S_{\gamma}} (3x^2 + 3y^2) dS$$

Passando alle coordinate cilindriche ($x^2 + y^2 = \rho^2$, $dS = \rho d\rho d\Phi$) si ha infine:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\vec{\ell} = 3 \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho^2 \rho d\rho d\Phi = 3 \int_0^{\pi/2} d\Phi \int_0^1 \rho^3 d\rho = 3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{8} \pi$$

Si noti che grazie all'applicazione della formula di Green è stato possibile pervenire alla soluzione con pochi e semplici passaggi. Naturalmente, si sarebbe potuto risolvere l'integrale anche parametrizzando separatamente ciascuna delle 3 linee che costituiscono γ , nel modo seguente:

$$\vec{\ell}_{AB} : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad \vec{\ell}_{BC} : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \quad \vec{\ell}_{CA} : \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Verificare per esercizio che applicando quest'ultimo metodo si ritrova il medesimo risultato.

Esempio 2 (dal compito intermedio del 31/05/2005)

Si calcoli il flusso del vettore $\mathbf{A} = 3x^2z \hat{\mathbf{i}}_x - 6xyz \hat{\mathbf{i}}_y + 3z^2 \hat{\mathbf{i}}_z$ attraverso la superficie esterna del cubo di lato unitario $[(0 \leq x \leq 1), (0 \leq y \leq 1), (0 \leq z \leq 1)]$.

Soluzione: Per la risoluzione dell'integrale di flusso, conviene applicare il teorema della divergenza:

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV$$

Poiché risulta:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 6xz - 6xz + 6z = 6z$$

Si ottiene infine:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 6z \, dz = 6 \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^1 = 3$$

Si noti che grazie all'applicazione del teorema di Gauss è stato possibile pervenire alla soluzione con pochi e semplici passaggi. Se si volesse risolvere l'integrale senza ricorrere a tale teorema, si dovrebbe invece parametrizzare separatamente ciascuna delle 6 facce della superficie cubica e calcolare il flusso attraverso ognuna di essa, con notevole dispendio in termini di tempo di calcolo richiesto.

Esempio 3 (dal compito complessivo del 11/06/2002)

Dato il campo vettoriale $\mathbf{v} = (2xz^2 + 2y) \cdot \hat{\mathbf{i}}_x + (4yz + 3x) \cdot \hat{\mathbf{i}}_y + (2x^2z + 2y^2) \cdot \hat{\mathbf{i}}_z$ se ne calcoli la circuitazione lungo la circonferenza C del piano xy avente raggio R .

Soluzione: si ricava facilmente:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}}_x & \hat{\mathbf{i}}_y & \hat{\mathbf{i}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \cdot \hat{\mathbf{i}}_x - \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \cdot \hat{\mathbf{i}}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \cdot \hat{\mathbf{i}}_z = \hat{\mathbf{i}}_z$$

Pertanto applicando il teorema di Stokes si ha:

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{i}}_t \, d\ell = \iint_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS = \iint_S \hat{\mathbf{i}}_z \cdot \hat{\mathbf{i}}_z \, dS = \pi R^2$$

in cui per ovvie ragioni di comodità è stata scelta come superficie concatenata alla curva chiusa C , il cerchio del piano xy , avente normale positiva uscente $\hat{\mathbf{i}}_z$.

Esempio 4

Dato il campo vettoriale:

$$\mathbf{V} = 2x \hat{\mathbf{i}}_x + xy \hat{\mathbf{i}}_y$$

si calcoli l'integrale di \mathbf{V} sull'arco di parabola $y = 2x^2$ di estremi $A(0,0)$ e $B(1,2)$.

Soluzione:

La curva sulla quale è richiesto di integrare \mathbf{V} può essere parametrizzata nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t^2 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Tuttavia, se osserviamo che si tratta di una curva definita sul piano xy e coincidente con il grafico di una funzione di una variabile del tipo $y = f(x)$, possiamo risolvere l'integrale direttamente nelle variabili x e y senza bisogno di ricorrere al parametro t . Infatti:

$$\int_C \mathbf{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_C V_x dx + V_y dy = \int_C 2x dx + xy dy$$

Sostituendo in tale integrale la relazione $y=2x^2$ e ricordando che:

$$dy = f'(x)dx = 4x dx$$

si ottiene infine:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{V} \cdot d\vec{\ell} &= \int_0^1 2x dx + \int_0^1 x \cdot 2x^2 \cdot 4x dx = \int_0^1 2x dx + \int_0^1 8x^4 dx = \\ &= [x^2]_0^1 + 8 \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 1 + \frac{8}{5} = \frac{13}{5} \end{aligned}$$

Esempio 5 (dal compito del 5/07/2001)

Dato il campo scalare $\Phi = x^2 e^{-ay}$, calcolare l'integrale di linea del gradiente di Φ sull'arco di parabola $y = x^2$ di estremi $A(1,1)$ e $B(3,9)$.

Soluzione: Per le proprietà del gradiente, che è sempre un campo vettoriale conservativo, risulta:

$$\int_A^B \nabla \Phi \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell d\ell = \int_A^B d\Phi = \Phi(B) - \Phi(A) = e^{-a}(9e^{-9} - 1)$$

A9.3 - ESERCIZI DI RIEPILOGO

Esercizi su integrali di linea, di flusso, di volume

1) Sia dato il campo vettoriale $\mathbf{V} = (x - y)\hat{\mathbf{i}}_x + (x + y)\hat{\mathbf{i}}_y$:

Si calcoli l'integrale di linea $\int_\gamma \mathbf{V} \cdot d\vec{\ell}$ nei seguenti casi:

- γ è la circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario
- γ è il cerchio di raggio 1 centrato in $(1, 0)$ percorso in senso antiorario

- c) γ è la semicirconferenza superiore del cerchio di raggio 1 centrato in $(1, 0)$ percorsa in senso orario
- d) γ è la semicirconferenza inferiore del cerchio di raggio 1 centrato in $(1, 0)$ percorsa in senso orario
- e) γ è il segmento che unisce il punto $(0, 1)$ con il punto $(1, 0)$
- f) γ è il segmento che unisce il punto $(0, 2)$ con il punto $(1, 0)$

2) Sia $\mathbf{V} = (x - y)\hat{\mathbf{i}}_x + (x + y)\hat{\mathbf{i}}_y$ un campo di forze.

Trovare il lavoro fatto per spostare un oggetto puntiforme lungo la linea γ bordo del quadrato S di vertici $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ e $(-1, 1)$.

Oss.

Integrare lungo il quadrato significa spezzare l'integrale curvilineo in quattro integrali con quattro diverse parametrizzazioni, una per ogni lato del quadrato. Si risolva l'esercizio proposto sopra sia con tale metodo che utilizzando la formula di Green, e si verifichi che i due risultati coincidono.

3) Sia $\mathbf{V} = \frac{-y}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{i}}_x + \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{i}}_y$ (campo di Biot-Savart)

- a) Si calcoli la circuitazione di \mathbf{V} lungo la circonferenza unitaria centrata nell'origine.
- b) Dire se sarebbe possibile effettuare il medesimo calcolo utilizzando la formula di Green.

4) Sia S quella parte della superficie (paraboloide) $z = x^2 + y^2$ che giace sopra il disco unitario del piano xy .

Si calcoli il flusso attraverso S nei seguenti casi:

- a) $\mathbf{V} = x\hat{\mathbf{i}}_x + y\hat{\mathbf{i}}_y + z\hat{\mathbf{i}}_z$
- b) $\mathbf{V} = x\hat{\mathbf{i}}_x$
- c) $\mathbf{V} = 1\hat{\mathbf{i}}_y$
- d) $\mathbf{V} = z\hat{\mathbf{i}}_z$

Suggerimento: per parametrizzare S si osservi che il disco unitario nel piano è descritto da (ρ, ϕ) con $0 \leq \rho \leq 1$ e $0 \leq \phi < 2\pi$. In coordinate cartesiane, $x = \rho \cos \phi$ e $y = \rho \sin \phi$. Ponendo $u = \rho$ e $v = \phi$, la parametrizzazione diventa:

$$\mathbf{r} = u \cos v \hat{\mathbf{i}}_x + u \sin v \hat{\mathbf{i}}_y + u^2 \hat{\mathbf{i}}_z$$

5) Sia S la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, con $0 \leq z \leq 1$.

Parametrizzare S e calcolare il flusso del campo $\mathbf{V} = (1, 0, 0)$ attraverso S .

6) Trovare il flusso del campo $\mathbf{V} = -y \hat{\mathbf{i}}_x + x \hat{\mathbf{i}}_y$ attraverso la calotta sferica S definita da:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \text{ con } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq z \leq 1.$$

Esercizi su integrali con l'ausilio dei teoremi di Stokes e di Gauss

1) Utilizzando il teorema della divergenza, si calcoli il flusso attraverso la superficie sferica

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nei seguenti casi:

a) $\mathbf{V} = (x, 2y, 3z)$

b) $\mathbf{V} = (x, y^2, 0)$

c) $\mathbf{V} = (0, y^2, 0)$

2) Utilizzando il teorema della divergenza, si calcoli il flusso del campo $\mathbf{V} = (x, y, z)$ attraverso la superficie esterna del cubo definito da $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

3) Utilizzando il teorema di Stokes, si calcoli l'integrale:

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS$$

nei 3 casi seguenti

a) Sia S la metà superiore della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $\mathbf{V} = (x, y, z)$

b) Sia S la metà superiore della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $\mathbf{V} = (-y, x, z)$

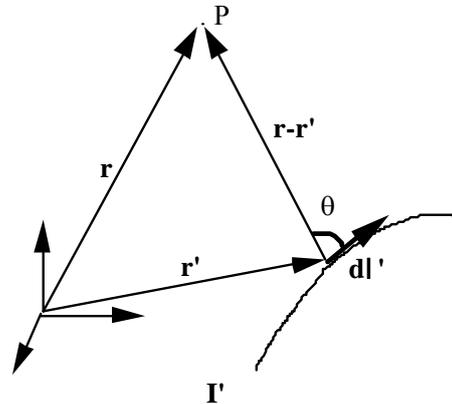
c) Sia S la parte del paraboloido $z = x^2 + y^2$ con $z \leq 1$ e $\mathbf{V} = (x, y, z)$

A9.4 – APPLICAZIONI NOTEVOLI DEL CALCOLO INTEGRO-DIFFERENZIALE

a) Calcolo del campo magnetico lungo l'asse di una spira

E' noto che il campo magnetico prodotto nel punto P da un elemento di filo $d\ell'$ percorso dalla corrente I' vale (prima legge di Laplace):

$$d\mathbf{H} = \frac{I'(\mathbf{r}')d\ell' \sin \theta}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \hat{\mathbf{i}}_h$$



dove il versore $\hat{\mathbf{i}}_h$ che individua la direzione del campo $d\mathbf{H}$ è ortogonale al piano individuato dai vettori $d\vec{\ell}' = \hat{\mathbf{i}}_{\ell'} d\ell'$ e $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, ed ha verso concorde con $d\vec{\ell}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. In formule:

$$\hat{\mathbf{i}}_h = \frac{d\ell' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|d\ell' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')\|}$$

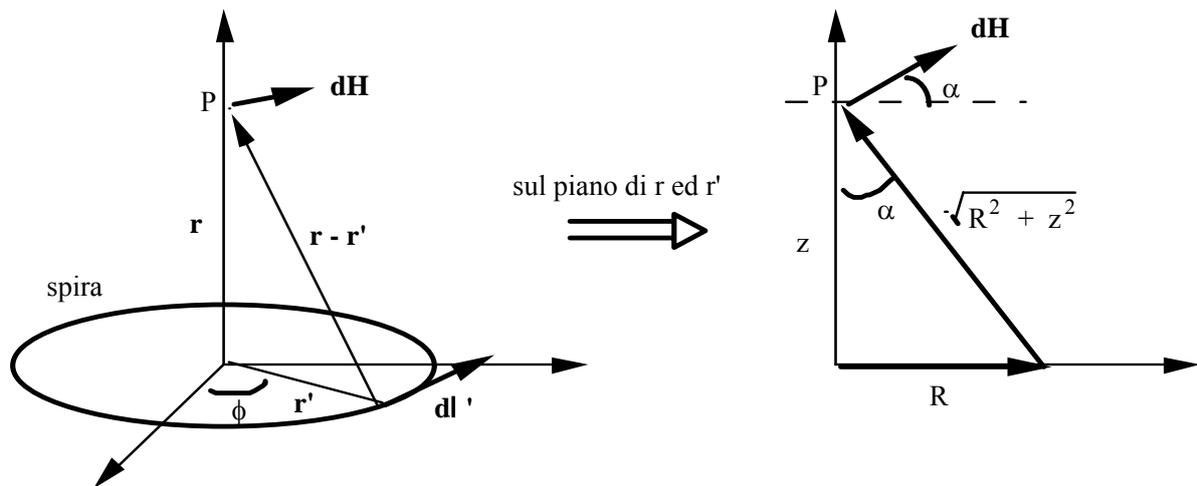
Nel caso di un filo rettilineo indefinito lungo l'asse z percorso dalla corrente I' l'equazione scritta sopra si riduce a (legge di Biot-Savart):

$$\mathbf{H} = \frac{I'}{2\pi r} \hat{\mathbf{i}}_\phi$$

La legge di Laplace potrà venire integrata per ottenere il campo magnetico totale prodotto da una spira di corrente. Se tale spira è circolare con raggio R e posizionata sul piano xy (vedi figura), e P è un punto posizionato lungo l'asse della spira, si ha:

$$d\mathbf{H} = \frac{I' R d\phi}{4\pi (R^2 + z^2)} \hat{\mathbf{i}}_h$$

essendo in questo caso $d\vec{\ell}' = R d\phi \hat{\mathbf{i}}_\phi$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2}$ e $\theta = 0$, poiché risulta $d\vec{\ell}' \perp (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.



L'integrale da svolgersi per ottenere il campo complessivo \mathbf{H} è quindi della forma:

$$\mathbf{H} = \int_0^{2\pi} \frac{I' R \hat{\mathbf{i}}_h}{4\pi (R^2 + z^2)} d\phi$$

Innanzitutto, osserviamo che il campo non può avere componente in direzione $\hat{\mathbf{i}}_\phi$ perché per definizione $\hat{\mathbf{i}}_h$ è ortogonale a $d\vec{\ell}'$ e quindi a $\hat{\mathbf{i}}_\phi$. Inoltre, trattandosi dell'integrale di un vettore esso si può suddividere in due componenti, lungo i versori $\hat{\mathbf{i}}_\rho$ e $\hat{\mathbf{i}}_z$ del sistema di riferimento cilindrico (che è utile adottare). Tuttavia, nel caso particolare non è necessario svolgerlo per esteso perché si possono sfruttare alcune considerazioni basate sulla simmetria del problema (vedi figura precedente). Infatti, è facile notare che le componenti radiali dei vari contributi si elidono tra loro mentre quelle assiali si sommano. Considerando allora solo queste ultime, si ottiene evidentemente che il campo totale \mathbf{H} deve essere diretto lungo $\hat{\mathbf{i}}_z$:

$$\mathbf{H} = H \hat{\mathbf{i}}_z$$

Per determinare il campo totale, è quindi sufficiente integrare lungo la spira la sola componente assiale del campo magnetico elementare $d\mathbf{H}$. Mediante semplici considerazioni geometriche (vedi figura), è facile verificare che risulta:

$$\begin{aligned} dH_z &= d\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{i}}_z = |d\mathbf{H}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= |d\mathbf{H}| \sin \alpha = |d\mathbf{H}| \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \\ &= \frac{I' R d\phi}{4\pi (R^2 + z^2)} \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \end{aligned}$$

Integrando lungo la spira l'espressione ottenuta sopra si ha:

$$\mathbf{H} = \int dH_z \hat{\mathbf{i}}_z = \left[\frac{I' R}{4\pi (R^2 + z^2)} \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\phi \right] \hat{\mathbf{i}}_z$$

e infine, mediante semplici calcoli:

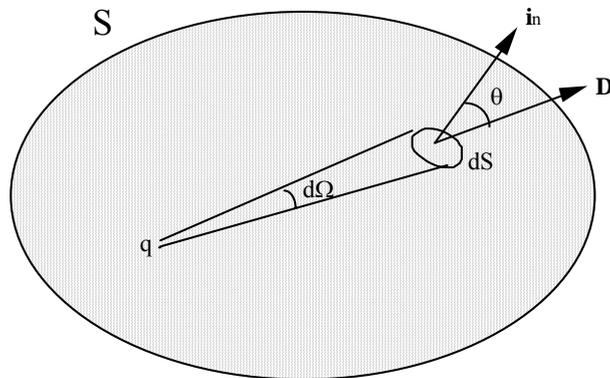
$$\mathbf{H} = \frac{I' R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{i}}_z$$

b) Legge di Gauss

E' noto che il vettore di spostamento elettrico prodotto da una carica puntiforme vale:

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi |\mathbf{r}|^2} \hat{\mathbf{i}}_r$$

Si supponga di volere calcolare il flusso di \mathbf{D} attraverso una *qualsiasi* superficie chiusa S che racchiude la carica q .



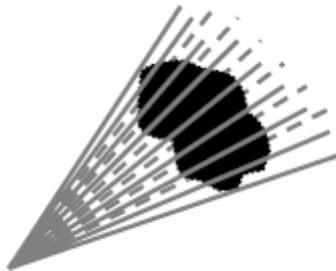
Se θ è l'angolo formato tra la normale alla superficie infinitesima dS e \mathbf{D} (figura), il flusso elementare attraverso dS vale:

$$d\psi = \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n dS = \frac{q}{4\pi |\mathbf{r}|^2} dS \cos \theta$$

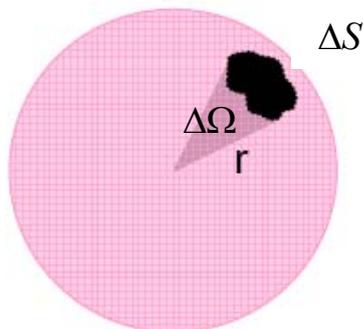
si riconosce che $dS' = dS \cos \theta$ è la proiezione di dS su un piano normale a \mathbf{D} . Ma \mathbf{D} è diretto radialmente, quindi è perpendicolare alla superficie *sferica* centrata in q e passante per dS : è quindi evidente che dS' rappresenta l'elemento infinitesimo di tale superficie .

Per ottenere il flusso complessivo, occorre integrare il flusso elementare lungo l'intera superficie S ; si osservi inoltre che, essendo $d\psi$ inversamente proporzionale a $|r|^2$, conviene effettuare l'integrale sfruttando la definizione di *angolo solido*. Si ricordi che:

si definisce **angolo solido** ciascuna delle due regioni in cui viene suddiviso lo spazio da una superficie conica formata dalle semirette passanti per uno stesso punto (denominato *vertice* dell'angolo solido) e per i punti di una curva chiusa semplice non contenente il vertice.



Inoltre, detta ΔS l'area della superficie ottenuta come intersezione fra il cono ed una sfera di raggio r centrata nel vertice dell'angolo solido, il rapporto $\Delta S/r^2$ è indipendente da r e rappresenta quindi una misura dell'*ampiezza dell'angolo solido*:



$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S}{r^2} \quad [\text{srad}]$$

Lo **steradiano** [srad] (nome derivante dal greco *stereos*, solido) è l'unità di misura del Sistema Internazionale per l'angolo solido, il corrispondente tridimensionale del radiante. Lo steradiano è definito come “ l'angolo solido sotteso, al centro di una sfera di raggio r , da una porzione della superficie della sfera avente area r^2 ”. Poiché l'area dell'intera sfera equivale a $4\pi r^2$, ne segue che l'angolo solido sotteso da tutta la sfera è pari a 4π srad. In base a quanto appena detto, si può definire l'angolo solido $d\Omega$ sotteso dall'elemento infinitesimo dS di superficie sferica, espresso in coordinate sferiche:

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin\theta \, d\theta \, d\phi \quad [\text{srad}]$$

Nell'esempio considerato, la superficie S deve essere *qualunque*, tuttavia, sfruttando le considerazioni svolte in precedenza, si può ricavare facilmente l'ampiezza dell'angolo solido $d\Omega$

sotteso all'elemento infinitesimo dS' di superficie sferica centrata in q e passante per dS . Tale angolo vale:

$$d\Omega' = \frac{dS'}{|\mathbf{r}|^2} = \frac{dS}{|\mathbf{r}|^2} \cos \theta$$

quindi il flusso elementare può esprimersi nella forma:

$$d\psi = \frac{q \, d\Omega'}{4\pi}$$

Poiché, come si è detto in precedenza, l'angolo solido sotteso ad una superficie sferica corrisponde a 4π [srad], si ottiene infine:

$$\psi = \oint \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{i}}_n \, dS = \frac{q}{4\pi} \int_0^{4\pi} d\Omega' = \frac{q}{4\pi} 4\pi = q$$

Quindi il flusso di \mathbf{D} attraverso una qualunque superficie chiusa è uguale alla carica in essa contenuta.