

# Onde piane locali

Il campo è descrivibile in termini di **onde piane TEM locali** quando le sue componenti e i parametri costitutivi del mezzo variano “abbastanza lentamente” in funzione delle coordinate spaziali, nel senso che subiscono variazioni trascurabili su lunghezze dell'ordine di  $\lambda$ . Si ha:

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot e^{-j\beta_0 S(\vec{r})} \quad \vec{H}(\vec{r}, \omega) = \vec{H}_0(\vec{r}) \cdot e^{-j\beta_0 S(\vec{r})} \quad (*)$$

$S(\vec{r})$  **Funzione Iconale**

Le (\*) rappresentano dunque soluzioni delle equazioni di Maxwell che godono (localmente) delle stesse proprietà delle onde piane TEM uniformi. Si parla pertanto di **Onde Piane TEM Locali**. L'espressione del vettore di Poynting è identica a quella valida per onde piane uniformi:

$$\vec{\mathcal{S}} = \frac{\vec{E} \times \vec{H}^*}{2} = \frac{|\vec{E}_0|^2}{2\eta} \hat{s} \quad \text{con} \quad \hat{s} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} \Rightarrow \text{L'Energia si propaga lungo i raggi ottici}$$

Come per le onde piane, anche per le onde piane locali si ha che la densità di potenza (modulo del vettore di Poynting) vale:

$$I(\vec{r}) = \frac{1}{2\eta} |\vec{E}_0(\vec{r})|^2 \quad \text{Intensità del raggio}$$



# Ottica geometrica e disomogeneità concentrate

Le ipotesi su cui si basa l'ottica geometrica **cadono in difetto** in prossimità di superfici attraverso le quali i parametri costitutivi del mezzo, e quindi anche alcune delle componenti del campo, subiscano discontinuità di prima specie (**disomogeneità concentrate**).

Per aggirare il problema si ricorre ancora al concetto di onda piana locale. Si ammette che ciascun raggio incidente sulla superficie di discontinuità **abbia punto per punto un comportamento analogo a quello di un'onda piana TEM uniforme** avente in tutto lo spazio le medesime condizioni di incidenza che valgono localmente per il raggio. Si ha quindi:

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \vec{E}_{i0} \cdot e^{-\vec{s}_i \cdot \vec{r}} \quad \vec{H}_i(\vec{r}) = \vec{H}_{i0} \cdot e^{-\vec{s}_i \cdot \vec{r}} = \frac{1}{\eta} \hat{s}_i \times \vec{E}_i(\vec{r})$$

dove  $\vec{s}_i = \vec{a}_i + j\vec{b}_i = (\alpha + j\beta) \hat{s}_i$        $\hat{s}_i$  direzione di incidenza

Allora ogni raggio incidente sulla superficie di discontinuità dà luogo ad un **raggio riflesso** e ad un **raggio trasmesso**, le cui direzioni iniziali (sulla superficie di discontinuità) sono definite dalle leggi di Snell della riflessione e della rifrazione.



# Ottica geometrica e disomogeneità concentrate

Il mezzo in cui si propaga l'onda incidente è caratterizzato dai parametri elettromagnetici  $\mu$ ,  $\varepsilon$ ,  $\sigma$ . Inoltre, si possono introdurre

La **permittività complessa**:  $\varepsilon_c = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}$       L'**indice di rifrazione**:  $n = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon_c}{\mu_0\varepsilon_0}}$

L'**impedenza intrinseca** del mezzo:  $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}$

Nel caso di **mezzo privo di perdite** e con  $\mu = \mu_0$ , si ha:

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\varepsilon_r} \quad \eta = \frac{\eta_0}{n} \quad \text{con } \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad \eta_0 \text{ impedenza di spazio libero}$$

In questo caso, si ha:

$$\sigma = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_i = 0 \\ \beta_i = |\vec{b}_i| = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = n\beta_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_i = \alpha_i\hat{s}_i = 0 \\ j\vec{b}_i = jn\beta_0\hat{s}_i \end{cases}$$

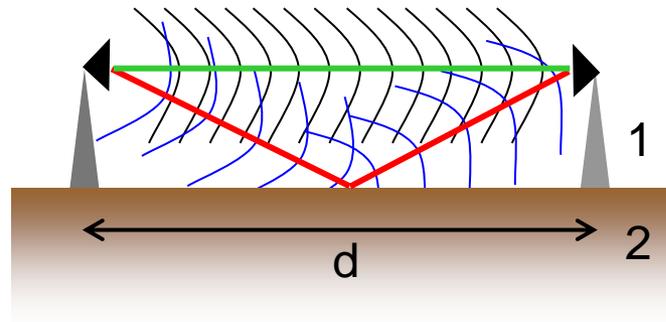
il campo incidente associato all'onda TEM uniforme si può riscrivere come:

$$\begin{cases} \vec{E}_i(\vec{r}) = \vec{E}_{i0} \cdot e^{-j\vec{b}_i \cdot \vec{r}} = \vec{E}_{i0} \cdot e^{-jn\beta_0\hat{s}_i \cdot \vec{r}} \\ \vec{H}_i(\vec{r}) = \vec{H}_{i0} \cdot e^{-j\vec{b}_i \cdot \vec{r}} = \vec{H}_{i0} \cdot e^{-jn\beta_0\hat{s}_i \cdot \vec{r}} = \frac{n}{\eta_0} \hat{s}_i \times \vec{E}_i \end{cases}$$



# Esempio 1: riflessione sul terreno

➤ In un radiocollegamento, in assenza di ostacoli (naturali e non) ed in assenza di particolari fenomeni che si generano nell'atmosfera (effetto condotto, inversione termica, ecc...) si hanno due contributi principali: **il raggio diretto e quello riflesso dal terreno.**



➤ Nel caso di un radiocollegamento siamo sempre in condizioni di campo lontano, essendo soddisfatta la più stringente delle:

$$d \gg \lambda$$

$$d \gg D$$

$$d \gg 2D^2 / \lambda$$

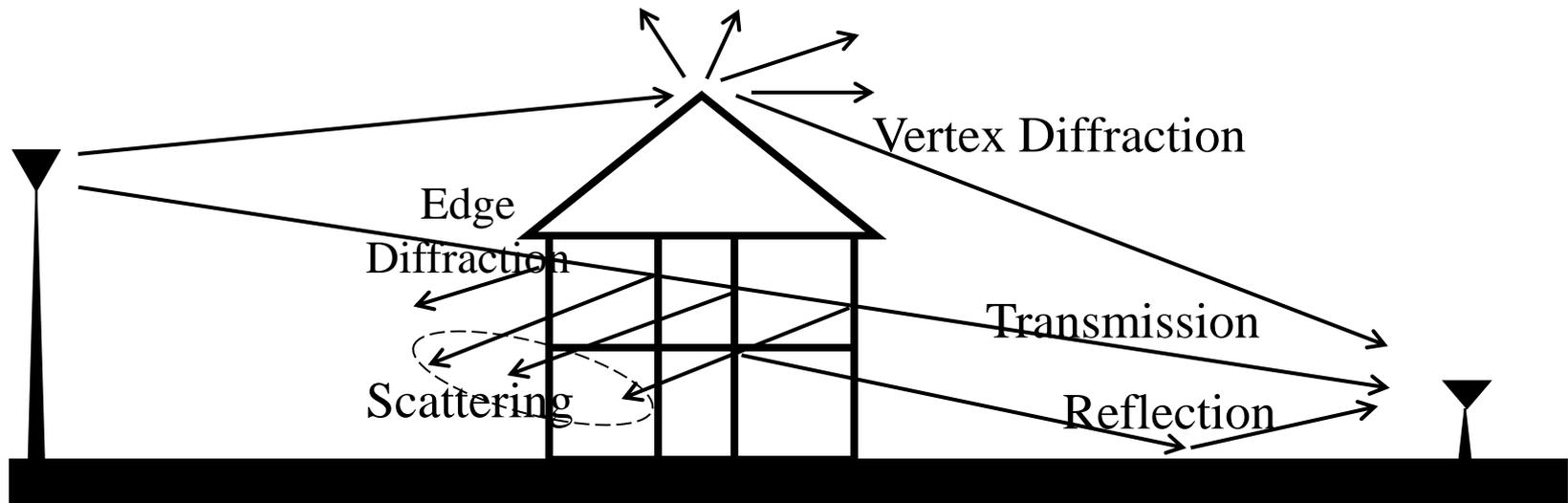
➤ In queste condizioni ciascun cammino corrisponde ad un'onda piana e uniforme (in realtà un'antenna emette un'onda sferica, che si può però supporre localmente piana) ➡ **I raggi seguono delle traiettorie rettilinee.**

➤ Supponendo che anche la superficie del suolo sia localmente piana, il raggio riflesso sul terreno soddisfa la legge della riflessione speculare.

# Esempio 2: propagazione in presenza di ostacoli

In ambienti complessi come quello urbano, l'onda elettromagnetica subisce diverse interazioni con l'ambiente reale di propagazione prima di giungere al ricevitore. I meccanismi di propagazione più importanti sono:

- 1) *Riflessione*;
- 2) *Trasmissione (Rifrazione)*;
- 3) *Diffrazione*;
- 4) [ *Diffusione (Diffuse Scattering)* ]



# Riflessione e trasmissione (caso ideale)

- Si consideri un'onda piana uniforme che incide sulla superficie di separazione fra 2 mezzi omogenei. Si supponga di che tale superficie sia approssimabile come un piano illimitato.
  - Nei casi pratici in cui la superficie di separazione non sia assimilabile ad un piano si tratterà di considerare di volta in volta una porzione abbastanza piccola della superficie da poter essere considerata piana (principio del campo locale).
- Si vogliono determinare i coefficienti di riflessione e trasmissione nel caso in cui i 2 mezzi siano caratterizzati da proprietà elettromagnetiche generiche.

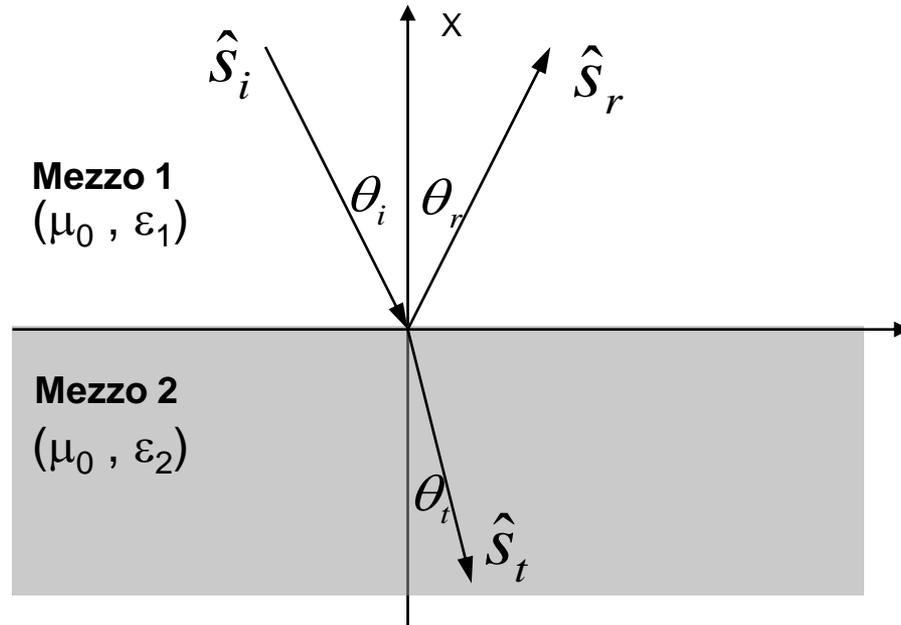


Si impone la continuità delle componenti tangenti dei campi (elettrico e magnetico) incidente, riflesso e trasmesso sulla superficie di separazione, supponendo che su questa non vi siano correnti superficiali né impresse né indotte (o siano talmente piccole da poter essere trascurate).

[ Si ricordi che nel mezzo 1 vi sono il campo incidente e il campo riflesso, mentre nel mezzo 2 vi è solo campo trasmesso ]



# Riflessione/Trasmissione



$\theta_i$  : *angolo di incidenza*

$\theta_r$  : *angolo di riflessione*

$\theta_t$  : *angolo di trasmissione*

$\hat{S}_i$  : *versore onda incidente*

$\hat{S}_t$  : *versore onda trasmessa*

$\hat{S}_r$  : *versore onda riflessa*

Ipotesi:

- Mezzi 1 e 2 **omogenei** [e privi di perdite]
- Interfaccia di separazione **piana e infinitamente estesa**
- Onda incidente **piana TEM uniforme** (nel mezzo 1):

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{i0} \cdot e^{-jn_1\beta_0\hat{S}_i \cdot \vec{r}} \quad ; \quad \vec{H}_i = \frac{1}{\eta_1} \hat{S}_i \times \vec{E}_i = \frac{n_1}{\eta_0} \hat{S}_i \times \vec{E}_i$$

Nel mezzo 2, si generano due onde piane (riflessa e rifratta)

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{r0} \cdot e^{-\vec{s}_r \cdot \vec{r}} \quad , \quad \vec{H}_r = \frac{\vec{s}_r \times \vec{E}_r}{j\omega\mu_1} \quad \vec{E}_t = \vec{E}_{t0} \cdot e^{-\vec{s}_t \cdot \vec{r}} \quad , \quad \vec{H}_t = \frac{\vec{s}_t \times \vec{E}_t}{j\omega\mu_2}$$

Supponendo che anche le onde riflessa e rifratta siano piane **TEM uniformi**, avremo:

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{r0} \cdot e^{-jn_1\beta_0\hat{s}_r \cdot \vec{r}} \quad , \quad \vec{H}_r = \frac{1}{\eta} \hat{s}_r \times \vec{E}_r \quad \vec{E}_t = \vec{E}_{t0} \cdot e^{-jn_2\beta_0\hat{s}_t \cdot \vec{r}} \quad , \quad \vec{H}_t = \frac{1}{\eta} \hat{s}_t \times \vec{E}_t$$

A questo punto, imponiamo **la continuità delle componenti tangenti ( $\tau$ ) del campo elettrico e magnetico totale** attraverso la superficie di discontinuità. A tal fine, è comodo adottare un sistema di riferimento ortogonale Oxyz **con l'asse x ortogonale all'interfaccia di separazione** fra i 2 mezzi (figura). Si ha:

$$\vec{E}_t^\tau = \vec{E}_i^\tau + \vec{E}_r^\tau$$



$$\vec{E}_{t0}^\tau \cdot e^{-jn_2\beta_0(s_{ty}y+s_{tz}z)} = \vec{E}_{i0}^\tau \cdot e^{-jn_1\beta_0(s_{iy}y+s_{iz}z)} + \vec{E}_{r0}^\tau \cdot e^{-jn_1\beta_0(s_{ry}y+s_{rz}z)} \quad \forall y, z \quad (1)$$

Una espressione analoga vale per il campo magnetico **se si trascurano le correnti superficiali**:

$$\vec{H}_t^\tau \cong \vec{H}_i^\tau + \vec{H}_r^\tau \quad [ \text{In generale, sarebbe } \vec{H}_i^\tau + \vec{H}_r^\tau - \vec{H}_t^\tau = \vec{J}_S \times \hat{i}_n ]$$

$$\vec{H}_{t0}^\tau \cdot e^{-jn_2\beta_0(s_{ty}y+s_{tz}z)} \cong \vec{H}_{i0}^\tau \cdot e^{-jn_1\beta_0(s_{iy}y+s_{iz}z)} + \vec{H}_{r0}^\tau \cdot e^{-jn_1\beta_0(s_{ry}y+s_{rz}z)} \quad \forall y, z$$

[ Nota: a rigore, la teoria che si svilupperà nel seguito sarebbe valida solo per mezzi puramente dielettrici. Tuttavia, la si può estendere anche a mezzi “**debolmente conduttori**” (supponendo che le correnti superficiali siano abbastanza piccole da poter essere trascurate), e in tal caso si può tener conto delle perdite nei mezzi attraverso la permittività complessa o l'indice di rifrazione complesso. ]

## 1) Leggi della riflessione e della rifrazione

Affinché l'espressione (1) sia soddisfatta per ogni  $y, z$  deve essere:

$$n_1 s_{iy} = n_1 s_{ry} = n_2 s_{ty} \quad (2)$$

$$n_1 s_{iz} = n_1 s_{rz} = n_2 s_{tz} \quad (3)$$



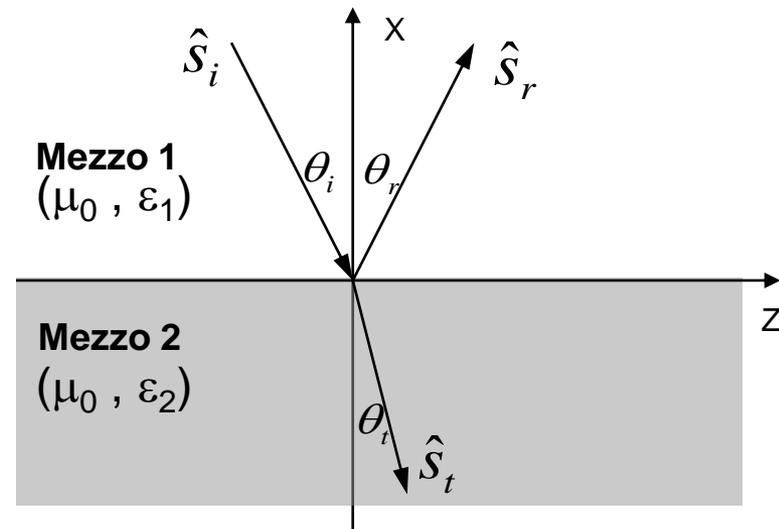
Dividendo membro a membro si ottiene:

$$\frac{S_{iz}}{S_{iy}} = \frac{S_{rz}}{S_{ry}} = \frac{S_{tz}}{S_{ty}} = k \quad (4) \quad \Rightarrow \quad \hat{s}_i, \hat{s}_r, \hat{s}_t \text{ complanari e appartenenti al piano di equazione } z = ky \text{ (passante per x e } \perp \text{ alla superficie di separazione)}$$

piano di incidenza

A questo punto, è conveniente adottare un riferimento cartesiano ortogonale tale che **il piano di incidenza coincida con il piano xz** (figura). Scomponendo i 3 vettori di propagazione delle onde incidente, riflessa e trasmessa rispetto agli assi x e z di tale riferimento, si ottiene:

$$\begin{cases} \hat{s}_i = -\cos \theta_i \cdot \hat{i}_x + \sin \theta_i \cdot \hat{i}_z \\ \hat{s}_r = \cos \theta_r \cdot \hat{i}_x + \sin \theta_r \cdot \hat{i}_z \\ \hat{s}_t = -\cos \theta_t \cdot \hat{i}_x + \sin \theta_t \cdot \hat{i}_z \end{cases}$$



Sostituendo le espressioni dei versori nella (3) si ottiene:

$$n_1 \sin \theta_i = n_1 \sin \theta_r \Rightarrow \boxed{\theta_i = \theta_r} \quad \text{LEGGE DELLA RIFLESSIONE} \quad (5)$$

$$\boxed{n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t} \quad \text{LEGGE DI SNELL} \quad (6)$$

Supponiamo che  $n_1, n_2 \in \mathcal{R}$  (mezzi privi di perdite) e  $n_1 > n_2$ , dalla legge di Snell della rifrazione si ha:  $\theta_i < \theta_t$ . Se si aumenta  $\theta_i$  si arriva ad un angolo di trasmissione  $\theta_t = \pi/2$  per cui si ha riflessione totale ( $\theta_i = \theta_c$  angolo critico).

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \Rightarrow \theta_c = \arcsin \left( \frac{n_2}{n_1} \right)$$

Dalla (6), aumentando  $\theta_i$  fino a superare  $\theta_c$ , si avrebbe:

$$\sin \theta_t > 1 \Rightarrow \cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \pm j \sqrt{\sin^2 \theta_t - 1}$$

In realtà, anche se per angoli di incidenza maggiori di  $\theta_c$  l'onda trasmessa si propaga lungo l'asse z, nel mezzo 2 c'è comunque campo. Infatti:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{t0} \cdot e^{-jn_2 \beta_0 \hat{s}_t \cdot \vec{r}} = \vec{E}_{t0} \cdot e^{-jn_2 \beta_0 (-\cos \theta_t x + \sin \theta_t z)}$$

e infine:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{t0} \cdot e^{-n_2 \beta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_t - 1} x} \cdot e^{-jn_2 \beta_0 \sin \theta_t z}$$



Quindi, quando si verifica la riflessione totale, nel mezzo 2 si ha un'onda trasmessa che si propaga (con andamento sinusoidale) lungo la superficie di separazione (asse z), mentre essa si attenua in modo esponenziale nella direzione normale alla superficie stessa (asse x).

Tale onda è detta [onda evanescente](#).

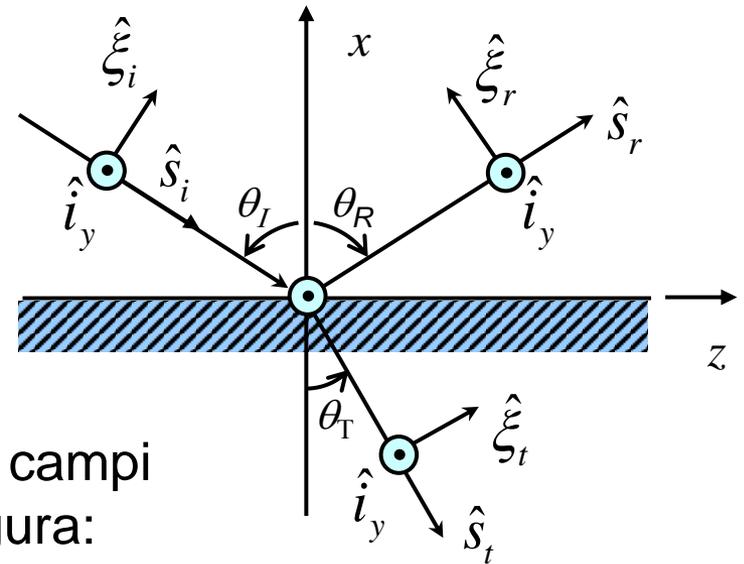
## 2) Calcolo dei coefficienti di riflessione e di trasmissione

Oltre alla (2) e alla (3) bisogna imporre:

$$\begin{cases} \vec{E}_{i0}^\tau + \vec{E}_{r0}^\tau = \vec{E}_{t0}^\tau \\ \vec{H}_{i0}^\tau + \vec{H}_{r0}^\tau = \vec{H}_{t0}^\tau \end{cases} \quad (7)$$

Per risolvere questo sistema scomponiamo i campi rispetto ai riferimenti locali rappresentati in figura:

$(\hat{\xi}_i, \hat{i}_y, \hat{s}_i)$ ,  $(\hat{\xi}_r, \hat{i}_y, \hat{s}_r)$ ,  $(\hat{\xi}_t, \hat{i}_y, \hat{s}_t)$  *terne ortogonali destrorse*

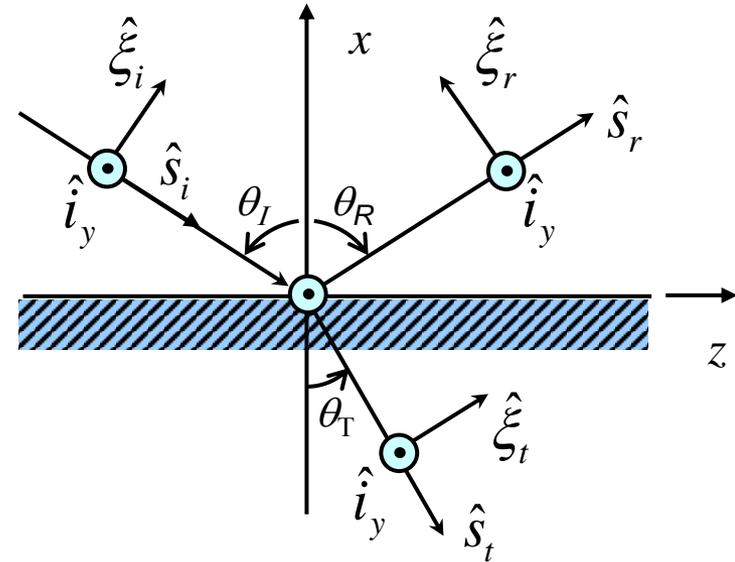


Per un'onda piana incidente con polarizzazione generica, si avrà:

$$\begin{cases} \vec{E}_{i0} = E_{i0\xi} \hat{\xi}_i + E_{i0y} \hat{i}_y \\ \vec{E}_{r0} = E_{r0\xi} \hat{\xi}_r + E_{r0y} \hat{i}_y \\ \vec{E}_{t0} = E_{t0\xi} \hat{\xi}_t + E_{t0y} \hat{i}_y \end{cases} \quad (8)$$

e ricordando  $\vec{H} = \frac{\eta_0}{n} \hat{s} \times \vec{E}$ :

$$\begin{cases} \vec{H}_{i0} = \frac{n_1}{\eta_0} [E_{i0\xi} \hat{i}_y - E_{i0y} \hat{\xi}_i] \\ \dots \\ \dots \end{cases} \quad (9)$$



Esplicitando  $\hat{\xi}_i, \hat{\xi}_r, \hat{\xi}_t$  in funzione di  $x$  e  $z$  si ha:

$$\begin{cases} \hat{\xi}_i = \sin \theta_i \hat{i}_x + \cos \theta_i \hat{i}_z \\ \hat{\xi}_r = \sin \theta_r \hat{i}_x - \cos \theta_r \hat{i}_z = \sin \theta_i \hat{i}_x - \cos \theta_i \hat{i}_z \\ \hat{\xi}_t = \sin \theta_t \hat{i}_x + \cos \theta_t \hat{i}_z \end{cases} \quad (10)$$

I campi  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  si possono **sempre** scomporre nelle due componenti lungo  $\hat{\xi}$  e  $\hat{i}_y$ , descrivendo due soluzioni indipendenti tra loro e mutuamente esclusive, ma sufficienti, una volta composte, a rappresentare un campo **qualsiasi!**

Si tratta, in pratica, di una scomposizione del campo in 2 **polarizzazioni** (lineari) ortogonali.

Per  $\vec{E} // \hat{i}_y$  [e quindi  $\vec{H} // (-\hat{\xi})$ ] si parla di **Polarizzazione perpendicolare (TE)** [rispetto al piano di incidenza]

Per  $\vec{E} // \hat{\xi}$  [e  $\vec{H} // \hat{i}_y$ ] si parla di **Polarizzazione parallela (TM)** [di incidenza]

[ TE e TM stanno per “Trasversale Elettrica e “Trasversale Magnetica”, rispettivamente]

Nel caso TE e nel caso TM, rispettivamente, il campo incidente viene espresso dalle:

**Polarizzazione TE:**

$$\begin{cases} \vec{E}^{TE} = E_{i0y} \cdot e^{-jn\beta_0\hat{s}_i \cdot \vec{r}} \cdot \hat{i}_y \\ \vec{H}^{TE} = -\frac{n_1}{\eta_0} \hat{s}_i \times \vec{E}^{TE} = -\frac{n_1}{\eta_0} E_{i0y} \cdot e^{-jn\beta_0\hat{s}_i \cdot \vec{r}} \cdot \hat{\xi}_i = H_{i0\xi} \hat{\xi}_i \end{cases}$$

**Polarizzazione TM:**

$$\begin{cases} \vec{H}^{TM} = H_{i0y} \cdot e^{-jn\beta_0\hat{s}_i \cdot \vec{r}} \cdot \hat{i}_y \\ \vec{E}^{TM} = \frac{\eta_0}{n_1} \vec{H}^{TM} \times \hat{s}_i = \frac{\eta_0}{n_1} H_{i0y} \cdot e^{-jn\beta_0\hat{s}_i \cdot \vec{r}} \cdot \hat{\xi}_i = E_{i0\xi} \hat{\xi}_i \end{cases}$$



D'altra parte, le componenti dei campi tangenti alla superficie di interfaccia sono rispettivamente, nel caso di polarizzazione TE e TM:

$$\begin{cases} \left( \vec{E}^{TE} \right)^\tau = \hat{i}_x \times \vec{E}^{TE} \times \hat{i}_x = E_y^{TE} \cdot \hat{i}_y \\ \left( \vec{H}^{TE} \right)^\tau = \hat{i}_x \times \vec{H}^{TE} \times \hat{i}_x = H_z^{TE} \cdot \hat{i}_z \end{cases} \quad \begin{cases} \left( \vec{E}^{TM} \right)^\tau = \hat{i}_x \times \vec{E}^{TM} \times \hat{i}_x = E_z^{TM} \cdot \hat{i}_z \\ \left( \vec{H}^{TM} \right)^\tau = \hat{i}_x \times \vec{H}^{TM} \times \hat{i}_x = H_y^{TM} \cdot \hat{i}_y \end{cases}$$

Imponendo l'uguaglianza delle componenti tangenziali dei campi elettrici e magnetici che si propagano nei 2 mezzi e sfruttando le (10), si ottiene quindi:

### 1) Polarizzazione TE:

$$\begin{cases} E_{i0y} + E_{r0y} = E_{t0y} \\ H_{i0z} + H_{r0z} = H_{t0z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{i0y} + E_{r0y} = E_{t0y} \\ -\frac{n_1}{\eta_0} E_{i0y} \cos \theta_i + \frac{n_1}{\eta_0} E_{r0y} \cos \theta_i = -\frac{n_2}{\eta_0} E_{t0y} \cos \theta_t \end{cases}$$

### 2) Polarizzazione TM:

$$\begin{cases} H_{i0y} + H_{r0y} = H_{t0y} \\ E_{i0z} + E_{r0z} = E_{t0z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{n_1}{\eta_0} E_{i0\xi} + \frac{n_1}{\eta_0} E_{r0\xi} = \frac{n_2}{\eta_0} E_{t0\xi} \\ -E_{i0\xi} \cos \theta_i + E_{r0\xi} \cos \theta_i = -E_{t0\xi} \cos \theta_t \end{cases}$$



## 1) POLARIZZAZIONE TE:

$$n_1 \left( -E_{i0y} \cos \theta_i \right) + n_1 \left( E_{r0y} \cos \theta_r \right) = n_2 \left( -E_{t0y} \cos \theta_t \right)$$

Sostituendo allora la prima eq. del sistema nella seconda...

$$-n_1 E_{i0y} \cos \theta_i + n_1 E_{r0y} \cos \theta_r = -n_2 \left( E_{i0y} + E_{r0y} \right) \cos \theta_t \Rightarrow$$

$$E_{i0y} \left( n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t \right) = E_{r0y} \left( n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t \right)$$

Analogamente:

$$E_{i0y} \left( n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t \right) = \left( E_{t0y} - E_{i0y} \right) \left( n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t \right) \Rightarrow$$

$$2E_{i0y} n_1 \cos \theta_i = E_{t0y} \left( n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t \right)$$

I coefficienti di riflessione e trasmissione per la polarizzazione TE valgono quindi:

$$\Gamma_{TE} = \frac{E_{r0y}}{E_{i0y}} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$$

$$\tau_{TE} = \frac{E_{t0y}}{E_{i0y}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$$

Si noti che risulta:

$$\tau_{TE} = 1 + \Gamma_{TE}$$

**Coefficienti di Fresnel**



I coeff. di Fresnel si possono esprimere in funzione del solo angolo  $\theta_i$  applicando la legge di Snell...

$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \Rightarrow \cos \theta_t = \sqrt{1 - \left( \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \right)^2} = \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 - \sin^2 \theta_i}$$

Allora, sostituendo nelle espressioni precedenti...

$$\Gamma_{TE} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 - \sin^2 \theta_i}} \quad \tau_{TE} = 1 + \Gamma_{TE} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{\left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

Utilizzando l'**angolo di elevazione** o di radenza  $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_i$  (usato spesso in radiotecnica)

$$\Gamma_{TE} = \frac{\sin \theta - \sqrt{\left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 - \cos^2 \theta}}{\sin \theta + \sqrt{\left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 - \cos^2 \theta}}$$

Analogamente:

$$\tau_{TE} = \frac{2 \sin \theta}{\sin \theta + \sqrt{\left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 - \cos^2 \theta}}$$

## 2) POLARIZZAZIONE TM:

$$\begin{cases} \frac{n_1}{\eta_0} E_{i0\xi} + \frac{n_1}{\eta_0} E_{r0\xi} = \frac{n_2}{\eta_0} E_{t0\xi} \\ -E_{i0\xi} \cos \theta_i + E_{r0\xi} \cos \theta_i = -E_{t0\xi} \cos \theta_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_1 E_{i0\xi} + n_1 E_{r0\xi} = n_2 E_{t0\xi} \\ -E_{i0\xi} \cos \theta_i + E_{r0\xi} \cos \theta_i = -\left( \frac{n_1}{n_2} E_{i0\xi} + \frac{n_1}{n_2} E_{r0\xi} \right) \cos \theta_t \end{cases}$$

Dalla seconda, riordinando ...

$$E_{i0\xi} \left( \cos \theta_i - \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_t \right) = E_{r0\xi} \left( \cos \theta_i + \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_t \right)$$

$$E_{i0\xi} (n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t) = E_{r0\xi} (n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t)$$

$$\Gamma_{TM} = \frac{E_{r0\xi}}{E_{i0\xi}} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}$$



quindi ...

$$\Gamma_{TM} = \frac{\cos \theta_i - \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_t}{\cos \theta_i + \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_t} = \frac{\cos \theta_i - \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}} \cdot \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_i - \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_i + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

In modo analogo, per il coefficiente di trasmissione si ha:

$$\begin{cases} E_{r0\xi} = \frac{n_2}{n_1} E_{t0\xi} - E_{i0\xi} \\ -E_{i0\xi} \cos \theta_i + \left( \frac{n_2}{n_1} E_{t0\xi} - E_{i0\xi} \right) \cos \theta_i = -E_{t0\xi} \cos \theta_t \end{cases}$$

quindi ...  $E_{t0\xi} \left( \frac{n_2}{n_1} \cos \theta_i + \cos \theta_t \right) = 2E_{i0\xi} \cos \theta_i$

$$\tau_{TM} = \frac{E_{t0\xi}}{E_{i0\xi}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}$$

Si noti che risulta:

$$\tau_{TM} = (1 + \Gamma_{TM}) \frac{n_1}{n_2}$$

E usando la legge di Snell per far comparire il solo angolo di incidenza:

$$\cos \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i} \quad \text{si ottiene, sostituendo:}$$

$$\tau_{TM} = \frac{2 \cos \theta_i}{\frac{n_2}{n_1} \cos \theta_i + \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}} = \frac{2 \frac{n_2}{n_1} \cos \theta_i}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_i + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

Infine, considerando l'angolo di radenza:

$$\Gamma_{TM} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin \theta - \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \cos^2 \theta}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin \theta + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \cos^2 \theta}}$$

$$\tau_{TM} = \frac{2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right) \sin \theta}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin \theta + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \cos^2 \theta}}$$



Ponendo  $n = n_2/n_1$  si possono riscrivere i coefficienti di riflessione come:

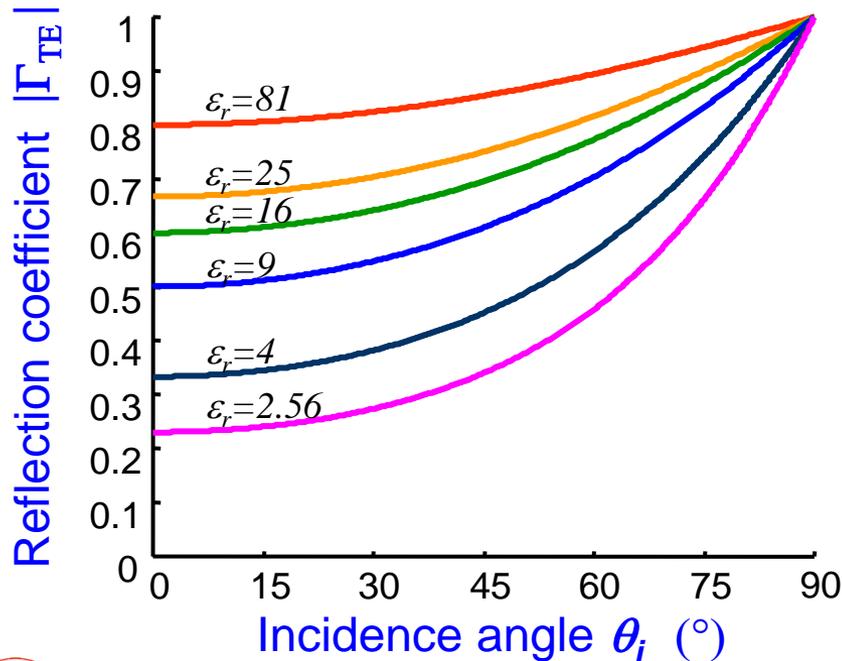
$$\Gamma_{TE} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

$$\Gamma_{TM} = \frac{n^2 \cos \theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{n^2 \cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

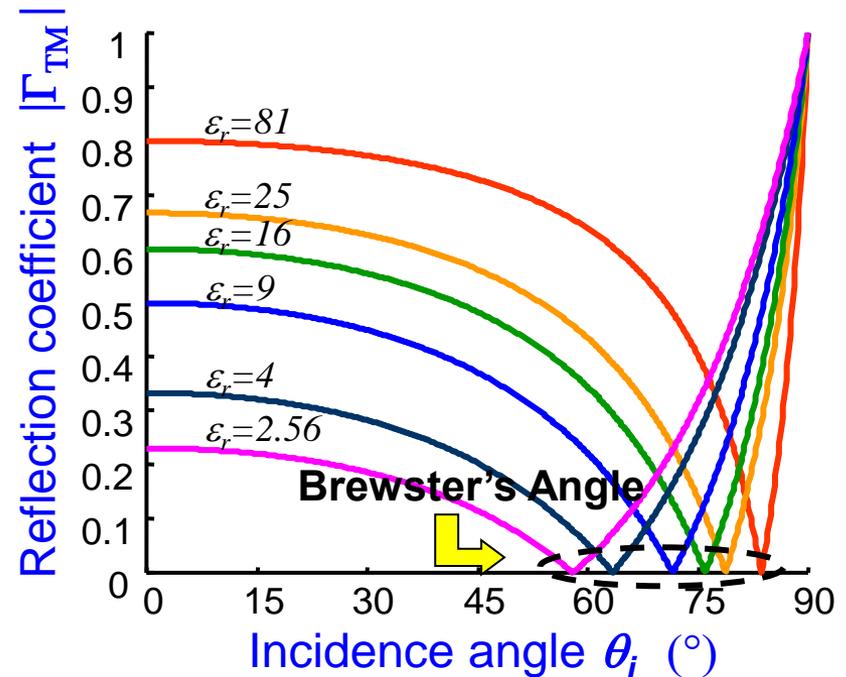
Se il mezzo 1 è l'aria, risulta  $n = n_2 = \sqrt{\epsilon_r}$  e quindi:

$$\Gamma_{TE} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_i}}$$

$$\Gamma_{TM} = \frac{\epsilon_r \cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_i}}{\epsilon_r \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_i}}$$



**TE Polarization**



**TM Polarization**



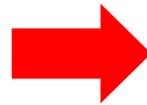
Talvolta i coefficienti di riflessione/trasmissione vengono espressi **in termini di impedenze**. Ricordando che vale  $\eta = \eta_0/n$  si ottengono immediatamente tali coefficienti, sostituendo n con  $\eta$  e scambiando «1» con «2».

$$\Gamma_{TE} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$

$$\tau_{TE} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$

$$\Gamma_{TM} = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}$$

$$\tau_{TM} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}$$



$$\Gamma_{TE} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

$$\tau_{TE} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

$$\Gamma_{TM} = \frac{\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 \cos \theta_i - \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}{\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 \cos \theta_i + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

$$\tau_{TM} = \frac{2 \frac{\eta_1}{\eta_2} \cos \theta_i}{\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 \cos \theta_i + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

Nel caso più generale di onda con generica polarizzazione sul piano perpendicolare alla direzione di propagazione  $\hat{s}_i$ , essa può essere sempre scomposta nelle 2 polarizzazioni lineari TE e TM. I campi incidente, riflesso e trasmesso si scrivono quindi nella forma:

$$\vec{E}_i = E_\xi \hat{\xi}_i + E_y \hat{i}_y$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_r &= \Gamma_{TM} E_\xi \hat{\xi}_r + \Gamma_{TE} E_y \hat{i}_y = \\ &= \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} E_\xi \hat{\xi}_r + \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} E_y \hat{i}_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= \tau_{TM} E_\xi \hat{\xi}_t + \tau_{TE} E_y \hat{i}_y = \\ &= \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} E_\xi \hat{\xi}_t + \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} E_y \hat{i}_y \end{aligned}$$

Si noti che, poiché i coefficienti TE e TM sono diversi fra loro, **la polarizzazione del campo riflesso/trasmesso è in generale diversa da quella del campo incidente!**



# Angolo di Brewster

- Il coefficiente di riflessione per la polarizzazione TM si annulla quando è soddisfatta la seguente condizione:

$$\Gamma_{TM} = 0 \quad \Rightarrow \quad n_2 \cos \theta_i = n_1 \cos \theta_t$$

- D'altra parte, dovendo essere verificata anche la legge di Snell della rifrazione, si ha che:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t}$$

- L'ultima uguaglianza è verificata se e solo se risulta:

$$\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos \theta_t = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta_i \right) = \sin \theta_i$$

E infine, sostituendo l'ultima uguaglianza nella equazione precedente si ottiene:

$$\tan \theta_i^B = \frac{n_2}{n_1} \quad \theta_i^B \equiv \text{angolo di Brewster (rifrazione totale)}$$

- Per incidenza pari all'angolo di Brewster non si ha riflessione e **tutta la potenza dell'onda incidente passa quindi dal mezzo 1 al mezzo 2**. Questa proprietà trova qualche applicazione quando si voglia limitare l'effetto delle riflessioni.



# Riepilogo

Imponendo le condizioni di continuità delle componenti tangenziali all'interfaccia ( $\mathbf{E}_i^\tau + \mathbf{E}_r^\tau = \mathbf{E}_t^\tau$  e  $\mathbf{H}_i^\tau + \mathbf{H}_r^\tau = \mathbf{H}_t^\tau$ ) si ottengono i noti risultati:

$\Rightarrow \hat{s}_i, \hat{s}_r, \hat{s}_t$  complanari (**piano di incidenza**)

$\Rightarrow$  **Onda riflessa** piana uniforme e  $\theta_i = \theta_r$  (**legge della Riflessione**)

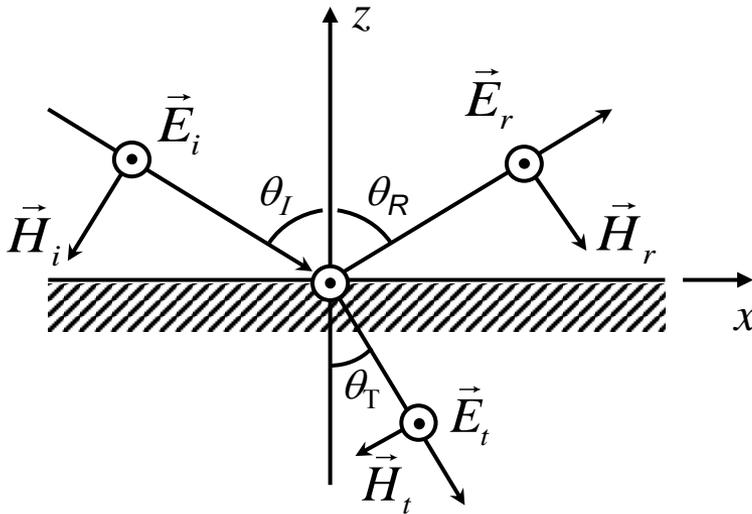
$\Rightarrow$  **Onda rifratta**: - piana evanescente (dissociata) se  $n_1/n_2 \cdot \sin \theta_i \leq 1$   
- piana uniforme se  $n_1/n_2 \cdot \sin \theta_i > 1$   
( $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$  - **legge di Snell della Rifrazione**)

$\Rightarrow \mathbf{E}_r = \Gamma \mathbf{E}_i ; \mathbf{E}_t = \tau \mathbf{E}_i$

( $\Gamma$  : **coefficiente di riflessione** -  $\tau$  : **coefficiente di trasmissione**)



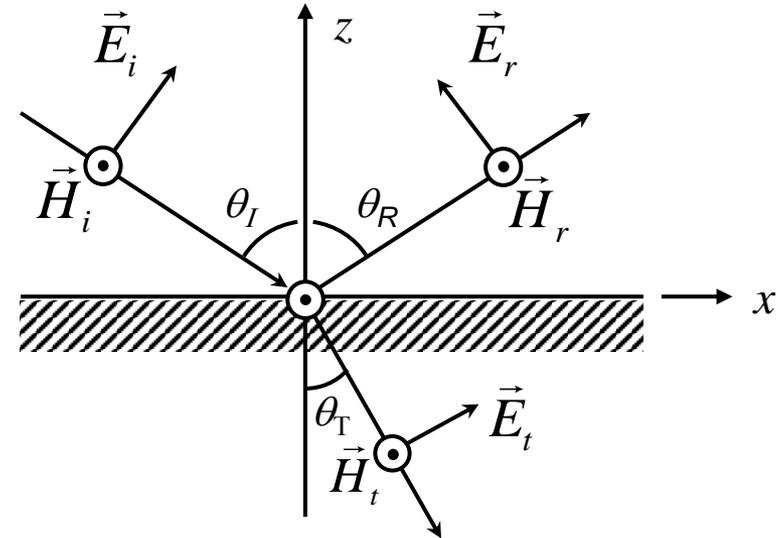
# Coefficienti di riflessione: riepilogo



- **Polarizzazione TE** = campo elettrico polarizzato linearmente in direzione perpendicolare al piano di incidenza

$$\Gamma_{TE} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

$$\tau_{TE} = 1 + \Gamma_{TE}$$



- **Polarizzazione TM** = campo magnetico polarizzato linearmente in direzione perpendicolare al piano di incidenza  $\Rightarrow$  campo elettrico a polarizzazione lineare nel piano di incidenza

$$\Gamma_{TM} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_i - \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_i + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

$$\tau_{TM} = (1 + \Gamma_{TM}) \frac{n_1}{n_2}$$

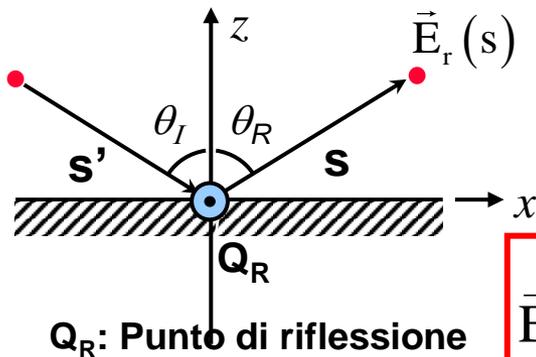
# Campo Elettrico Riflesso/Trasmesso

- Onde incidente, riflessa e rifratta **plane uniformi**  $\Rightarrow$  i raggi seguono delle traiettorie rettilinee. Le onde riflessa e trasmessa hanno le seguenti caratteristiche:

## ➤ Raggio Riflesso

$\Rightarrow$  Direzione di propagazione: legge della riflessione speculare (o principio di Fermat)

$\Rightarrow$  Rappresentazione vettoriale (informazioni su intensità, polarizzazione e fase dell'onda riflessa):

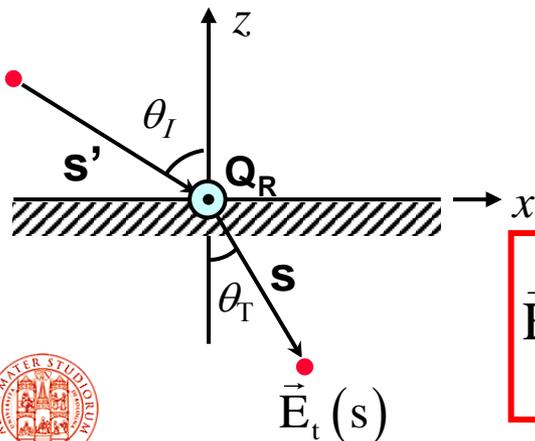


$$\vec{E}_r(s) = \vec{E}_r^{TE}(s) + \vec{E}_r^{TM}(s) = \begin{bmatrix} \Gamma_{TE} & 0 \\ 0 & \Gamma_{TM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{E}_i^{TE}(Q_R) \\ \vec{E}_i^{TM}(Q_R) \end{bmatrix} \cdot \frac{s'}{s'+s} \cdot e^{-j\beta s}$$

## ➤ Raggio Rifratto (Trasmesso)

$\Rightarrow$  Direzione di propagazione: legge di Snell

$\Rightarrow$  Rappresentazione vettoriale (informazioni su intensità, polarizzazione e fase dell'onda trasmessa):



$$\vec{E}_t(s) = \vec{E}_t^{TE}(s) + \vec{E}_t^{TM}(s) = \begin{bmatrix} \tau_{TE} & 0 \\ 0 & \tau_{TM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{E}_i^{TE}(Q_R) \\ \vec{E}_i^{TM}(Q_R) \end{bmatrix} \cdot \frac{s'}{s'+s} \cdot e^{-j\beta s}$$