Variabili Aleatorie

Valor medio statistico (o valore atteso):

$$\mu_X = E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx$$

Se g(X) è una funzione di V.A., si ha:

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)dx$$

Esempi di valore atteso di funzione di variabile aleatoria.

a) Varianza

$$\sigma_X^2 = \mathrm{var}(X) = E\left\{\left(X - E\{X\}\right)^2\right\}$$

Si può dimostrare che: $\sigma_X^2 = E\left\{\left(X - E\{X\}\right)^2\right\} = E\{X^2\} - \left(E\{X\}\right)^2$

b) Deviazione standard

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$$

Variabili Aleatorie

c) Momento di ordine *n:*

$$E\left\{X^n\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_X(x)dx$$

- (si noti che il momento di ordine 1 è il valor medio, mentre il momento di ordine 2 coincide con la varianza nel caso di V.A. a media nulla)

d) Funzione caratteristica:

$$\Im_X(\omega) = E\left\{e^{j\omega x}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot e^{j\omega x} dx$$

(legata alla trasformata di Fourier della densità di probabilità)

Espressione alternativa: $\Im_X(\nu) = E\left\{e^{j2\pi\nu x}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot e^{j2\pi\nu x} dx$

e) Funzione generatrice dei momenti

$$M_X(t) = E\left\{e^{tx}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot e^{tx} dx$$

Variabili Aleatorie

Valgono le seguenti proprietà:

$$E\left\{X^n\right\}=(-j)^n\,\Im_X^{(n)}(0)=(-j)^n\left[\frac{d^n}{dt^n}\Im_X(\omega)\right]_{\omega=0}$$

$$E\left\{X^n\right\}=M_X^{(n)}(0)=\left[\frac{d^n}{dt^n}M_X(t)\right]_{t=0}$$

Quindi, una volta note la funzione caratteristica oppure la funzione generatrice dei momenti, è possibile ricavare tutti i momenti di qualsivoglia ordine attraverso semplici operazioni di derivazione.

Alcune V.A. di interesse pratico

1) V. A. uniforme sull'intervallo reale [a,b]. In breve, si scrive:

$$X \sim U\left([a,b]\right)$$

La p.d.f. è espressa da:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

mentre la cumulativa (CDF) è:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \dfrac{1}{b-a}(x-a) & a < x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

Si dimostra facilmente che:

$$\mu_X = E\{X\} = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma_X^2 = \mathrm{var}(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2 \qquad \Im_X(\omega) = \frac{e^{j\omega b} - e^{j\omega a}}{j\omega(b-a)}$$

Alcune V.A. di interesse pratico (2)

2) V. A. normale o gaussiana. In breve, si scrive:

$$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$$

La p.d.f. è espressa da:

$$f_X\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{dove} \quad \begin{cases}\mu_X = E\left\{X\right\}=\mu \\ \sigma_X^2 = \mathrm{var}\left(X\right)=\sigma^2\end{cases}$$

La cumulativa è:

$$F_X\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$

e non è esprimibile in forma chiusa tramite funzioni elementari. Tuttavia, l'integrale a secondo membro si può risolvere per via numerica. Si definisce usualmente la funzione errore:

$$erf\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-t^2}\,dt$$

[funzione dispari di x]

Alcune V.A. di interesse pratico (3)

Si noti che risulta:

$$P(|X| \le x) = erf(x), \quad per \quad X \sim N\left(\mu = 0, \sigma^2 = \frac{1}{2}\right)$$

Inoltre, si può dimostrare facilmente che:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{2}\left[1 + erf\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]$$

Solitamente, si usa la funzione errore complementare (disponibile <u>in forma tabulare</u> ➡ valori ottenuti con integrazione numerica):

$$erfc(x) = 1 - erf(x)$$

Alcune proprietà delle funzioni *erf* ed *erfc*:

$$erf(-\infty) = 1, \qquad erf(0) = 0, \qquad erf(\infty) = 1$$

Alcune V.A. di interesse pratico (4)

$$erfc(-\infty) = 2, \qquad erfc(0) = 1, \qquad erfc(\infty) = 0$$

$$erfc(-x) = 1 - erf(-x) = 1 + erf(x) = 2 - erfc(x)$$

Alla fine si ottiene quindi un'espressione compatta per la CDF della V.A. normale:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = 1 - \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{\mu - x}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

La funzione caratteristica è:

$$\Im_X(\omega) = e^{\left(j\omega\mu - \frac{1}{2}\omega^2\sigma^2\right)}$$

Alcune V.A. di interesse pratico (4)

3) V. A. log-normale

La p.d.f. è espressa da:

$$F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2} \cdot y} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}} & y > 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Si noti che tale funzione è ottenibile applicando la trasformazione X = ln(Y), essendo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X \geq 0$. Si ricordi infatti la regola di trasformazione delle p.d.f.:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$ con $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soluzioni dell'equazione $y=g(x)$

La cumulativa non è esprimibile in forma chiusa tramite funzioni elementari, ma usando le funzioni *erf* e *erfc* si ha:

$$F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} erf\left(\dfrac{\ln y - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \dfrac{1}{2} erfc\left(\dfrac{\mu - \ln y}{\sqrt{2}\sigma}\right) & y > 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Alcune V.A. di interesse pratico (5)

Anche se la cumulativa non è esprimibile analiticamente, qualora interessi valutare la probabilità che una V.A. log-normale appartenga a un intervallo reale, si può aggirare il problema riconducendosi ad una V.A. gaussiana, e determinare poi tale probabilità con l'ausilio della funzione *erfc*. Ad esempio, se una grandezza aleatoria espressa in unità lineari ha distribuzione log-normale, la medesima grandezza, espressa in dB, seguirà una distribuzione gaussiana!

$$\mu_Y = E[Y] = e^{\mu} e^{\frac{1}{2}\sigma^2} = e^{\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}$$

$$\sigma_Y^2 = \mathrm{var}(Z) = e^{2\mu}\left(e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}\right) = e^{\left(2\mu+\sigma^2\right)}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

La funzione caratteristica della V.A. log-normale non è esprimibile analiticamente in forma chiusa. Risulta:

$$\Im_Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 + j\omega \exp(x)\right]} dx \qquad \text{con } x = \ln y$$

Alcune V.A. di interesse pratico (5)

4) V.A. di Rayleigh. In breve, si scrive: $X \sim Rayleigh\left(\sigma^2\right)$

La p.d.f. è espressa da:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & x \geq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

<u>Osservazione</u>: in letteratura è diffusa anche la seguente espressione della pdf di Rayleigh:

$$f_X(x) = \frac{2x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \quad x \geq 0$$

Da essa è possibile comunque passare alla precedente con il cambio di variabile: $x' \triangleq \sqrt{2}x \quad \rightarrow \quad dx = dx'/\sqrt{2}$. Si ha infatti, applicando la proprietà di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{2x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx = \int_0^{\infty} \frac{2x'}{\sqrt{2}\sigma^2} \cdot e^{-\frac{\left(x'/\sqrt{2}\right)^2}{\sigma^2}} \frac{dx'}{\sqrt{2}} = \int_0^{\infty} \frac{x'}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{(x')^2}{2\sigma^2}} dx' = 1$$

Alcune V.A. di interesse pratico (6)

Si può dimostrare che:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & x \geq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

I momenti del primo e secondo ordine e la varianza sono:

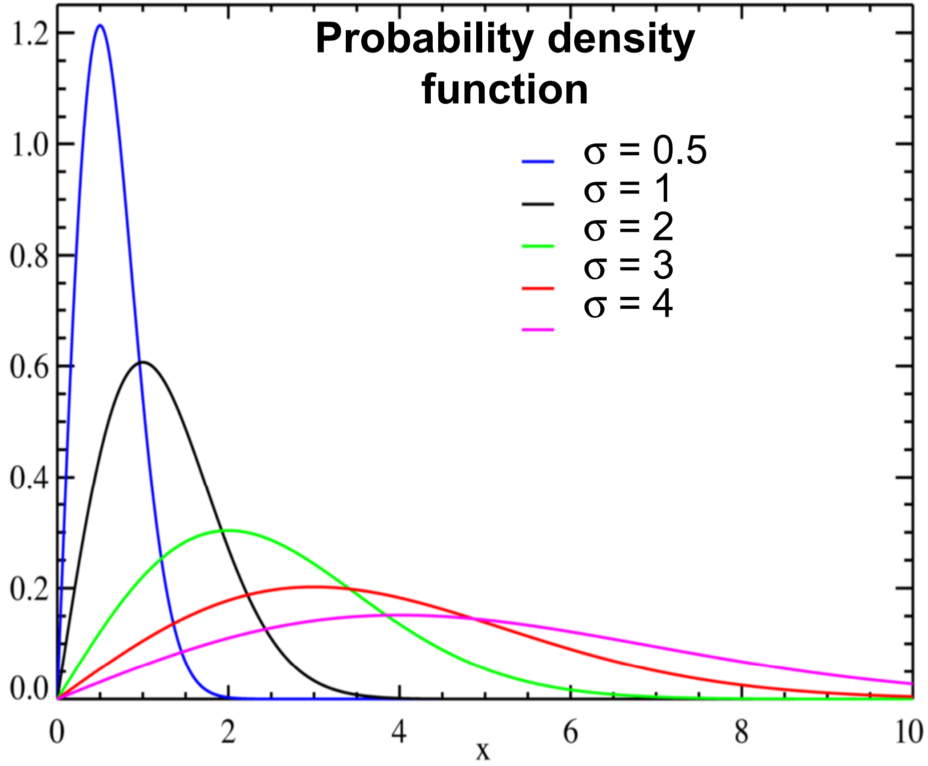
$$\mu_X = E\{X\} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$E\{X^2\} = 2\sigma^2$$

$$\sigma_X^2 = \mathrm{var}(X) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$$

Il massimo della funzione si ha per x = σ (figura) e vale $(1/\sigma)\sqrt{e}$

V.A. di Rayleigh



Alcune V.A. di interesse pratico (7)

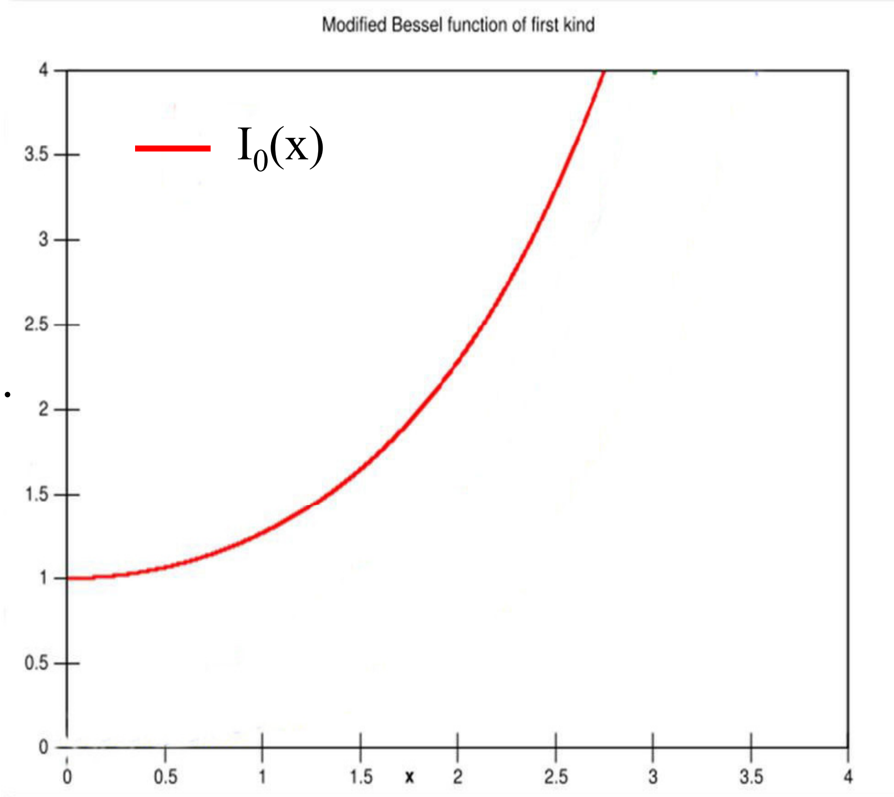
5) V.A. di Rice. In breve, si scrive: $X \sim Rice\left(\sigma^2, \mu\right)$ La p.d.f. è espressa da:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2+\mu^2}{2\sigma^2}} \cdot I_0\left(\dfrac{\mu x}{\sigma^2}\right) & x \geq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

dove μ è un parametro non negativo, mentre I_0 è la funzione di Bessel modificata di prima specie e di ordine zero, definita da:

$$I_n(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\xi \cos\vartheta} \cos(n\vartheta)\, d\vartheta \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\left[I_0(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\xi \cos\vartheta}\, d\vartheta \right]$$



Si noti che per μ=0 la p.d.f. di Rice si riduce alla p.d.f. di Rayleigh.

Alcune V.A. di interesse pratico (8)

Si può dimostrare che:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - Q_M\left(\dfrac{\mu}{\sigma}, \dfrac{x}{\sigma}\right) & x \geq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Q_M: funzione Q di Marcuum

Principali momenti:

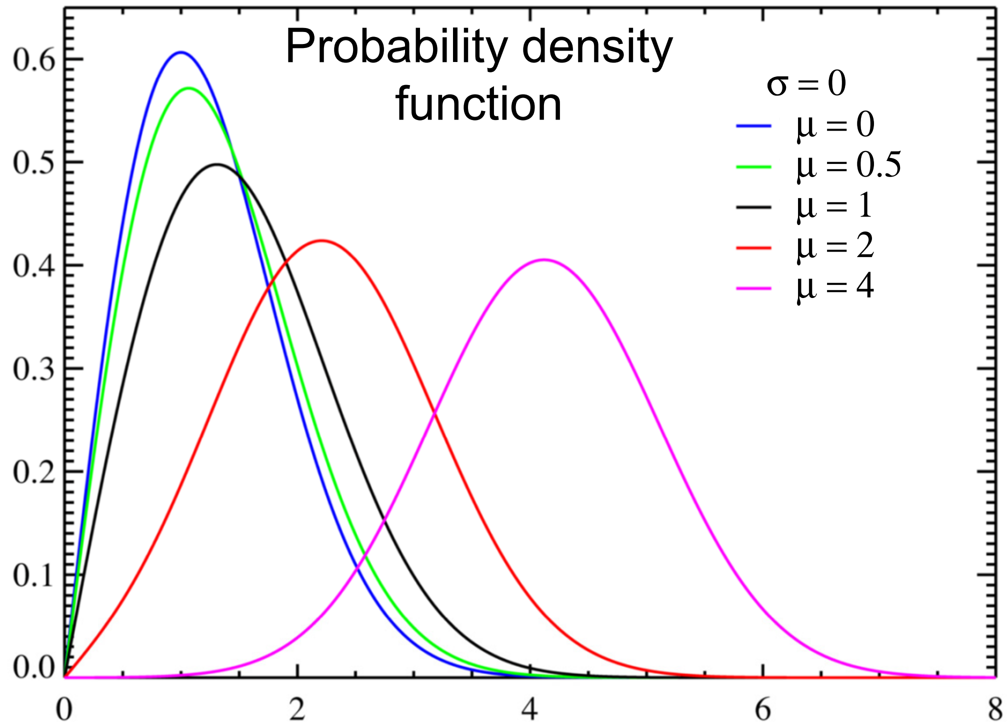
$$\mu_X = E\{X\} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} L_{1/2}\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)$$

[$L_\nu(x)$ polinomio di Laguerre]

$$E\{X^2\} = 2\sigma^2 + \mu^2 = \mu^2\left(1 + \frac{1}{K}\right)$$

dove $K = \dfrac{\mu^2}{2\sigma^2}$ fattore di Rice

V.A. di Rice



La p.d.f. può anche essere espressa mettendo in evidenza il fattore di Rice:

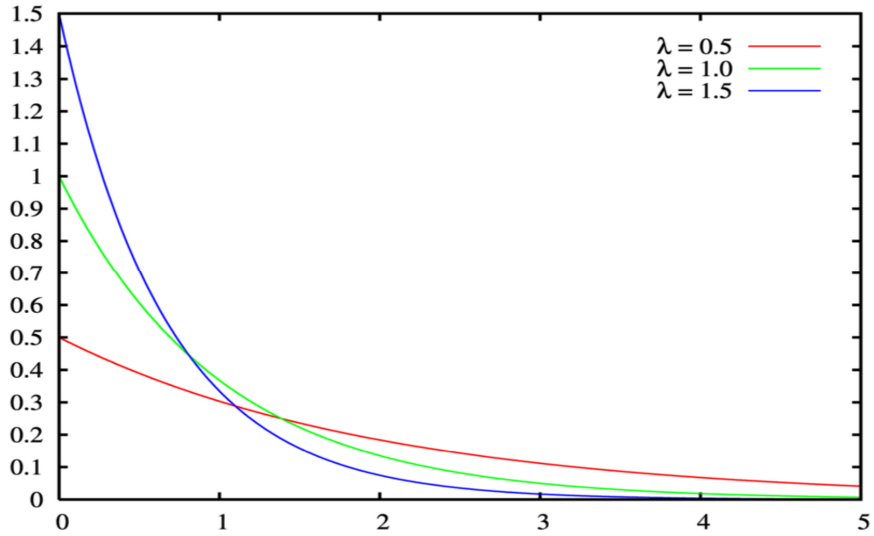
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2 \cdot x \cdot K}{\mu^2} \cdot e^{-\frac{K}{\mu^2}\left(x^2+\mu^2\right)} \cdot I_0\left(\dfrac{2 \cdot x \cdot K}{\mu}\right) & x \geq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Alcune V.A. di interesse pratico (9)

6) V.A. Esponenziale. In breve, si scrive:

$$X \sim \exp(\lambda) \qquad dove \qquad \lambda = 1/(2\sigma^2)$$

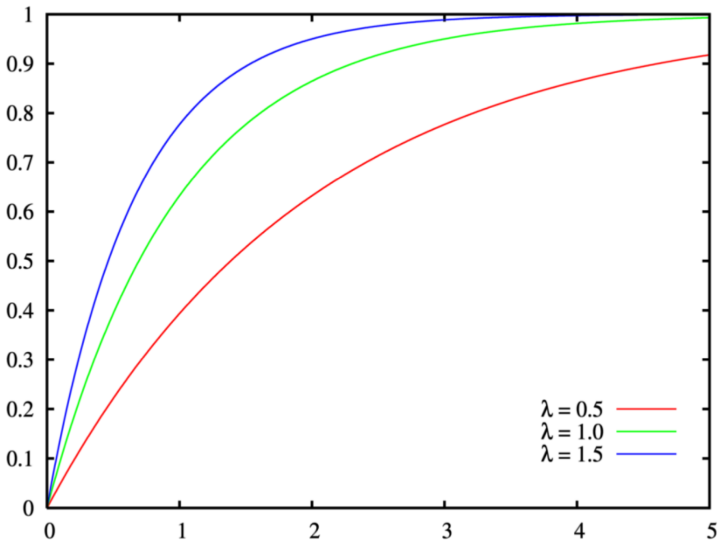
La p.d.f. è espressa da:



$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} = \dfrac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & x \geq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

La cumulativa (CDF) è:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & x \geq 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$



Alcune V.A. di interesse pratico (10)

Per la V.A. esponenziale risulta:

$$\mu_X = \frac{1}{\lambda} = 2\sigma^2 \qquad \sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2} = 4\sigma^4 \qquad \Im_X(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda - j\omega} = \frac{1}{1 - 2j\omega\sigma^2}$$

7) V.A. Binomiale. E' un esempio di V.A. discreta di notevole importanza pratica. Esprime la probabilità di avere k successi dopo n esperimenti ripetuti. Può assumere n valori, da 0 a n-1

$$P_k = \text{Prob}\{x = k\} = \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k}, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$

dove $\binom{n}{k}$ è il coefficiente binomiale e p e q rappresentano probabilità di successo e insuccesso (risulta perciò $p+q=1$)

Risulta inoltre:

$$\mu_X = np, \qquad \sigma_X^2 = npq, \qquad \Im_X(\omega) = \left(q + pe^{j\omega}\right)^n$$

Momenti di ordine *n* di alcune distribuzioni di probabilità

DISTRIBUZIONE	**Momento di ordine n, $E\{X^n\}$, n>0**
Uniforme	$\dfrac{1}{n+1}\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}$
Gaussiana	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0\ (k\ pari)}^{n}\dbinom{n}{n-k}2^{k/2}\mu^{n-k}\sigma^{k}\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)$
di Rayleigh	$\left(2\sigma^2\right)^{n/2}\Gamma\left(1+\dfrac{n}{2}\right)$
Esponenziale	$2^n\sigma^{2n}n!$
di Rice	$\left(2\sigma^2\right)^{n/2}e^{-\mu^2/2\sigma^2}\Gamma\left(1+\dfrac{n}{2}\right){}_1F_1\left(1+\dfrac{n}{2},\ 1\ ;\ \dfrac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)$
Log-normale	$e^{n\mu}e^{(1/2)n^2\sigma^2}$
Binomiale	$\sum_{k=0}^{n-1}k^n\dbinom{n-1}{k}p^kq^{n-1-k}$

NOTA: $\Gamma(x)$ indica la *funzione gamma* e ${}_1F_1(\alpha,\beta\ ;\ x)$ la *funzione ipergeometrica confluente*

Distribuzioni bivariate

Siano X,Y due Variabili Aleatorie. Si può definire la funzione di distribuzione cumulativa congiunta (joint CDF):

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Analogamente si può definire la densità di probabilità congiunta (joint pdf):

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y)$$

Valgono le seguenti proprietà:

1) $F_X(x) = F_{XY}(x,\infty)$, $F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y)$

2) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x)\,dx$

[$f_X(x)$ e $f_Y(y)$ pdf marginali]

3) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dxdy = 1$

Distribuzioni bivariate

4) $$P\left[(x,y)\in A\right]=\iint_{(x,y)\in A} f_{XY}(x,y)\,dxdy$$

e in particolare:

$$f_{XY}(x,y)\,dxdy=P\left(x<X<x+dx,\,y<Y<y+dy\right)$$

5) $$F_{XY}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,y)\,dxdy$$

La coppia di V.A. (X,Y) è completamente descritta dalla cumulativa congiunta o dalla densità congiunta.

Sia g(X,Y) una funzione di 2 Variabili Aleatorie.

Si può definire il valore atteso:

$$E\left\{g(X,Y)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(X,Y)\,f_{XY}(x,y)\,dxdy$$

Variabili Aleatorie Congiunte

Esempi di valore atteso di funzione di 2 V.A.

a) Funzione di correlazione

$$corr(X,Y) = E\{XY\}$$

b) Funzione di covarianza

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E\{(X - E\{X\})(Y - E\{Y\})\}$$

➡ Si può dimostrare che: $\mathrm{cov}(X,Y) = E\{XY\} - E\{X\}E\{Y\}$

➡ Se X=Y, si ha: $\mathrm{cov}(X,X) = \mathrm{var}(X) = \sigma_X^2$

Altre proprietà: $\begin{cases} E\{aX + bY\} = a \cdot E\{X\} + b \cdot E\{Y\} \\ \mathrm{var}(aX + bY) = a^2 \cdot \mathrm{var}(X) + b^2 \cdot \mathrm{var}\{Y\} + ab \cdot \mathrm{cov}(X,Y) \end{cases}$

c) Coefficiente di correlazione

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E\{XY\} - E\{X\}E\{Y\}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Indipendenza e incorrelazione di V.A.

1) V.A. indipendenti:

$$\boxed{f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)}$$

2) V.A. incorrelate:

$$\boxed{E\{XY\} = E\{X\} \cdot E\{Y\}}$$

Se X, Y incorrelate, risulta anche $\rho_{XY} = 0$

3) V.A. ortogonali:

$$\boxed{E\{XY\} = 0}$$

- L'indipendenza è una caratteristica molto più stringente delle altre
- Se X,Y sono entrambe a media nulla, ortogonalità e incorrelazione coincidono

Indipendenza e incorrelazione di V.A. (2)

Proprietà:

a) Siano X, Y due V.A. indipendenti: allora esse sono anche incorrelate

Si noti che il viceversa non è vero, in generale!

[Unica eccezione: il caso di V.A. gaussiane]

b) Siano X, Y due V.A. incorrelate: allora X-E{X} e Y-E{Y} sono ortogonali. Si ha quindi:

$$E\left\{\left(X-E\left\{X\right\}\right)\left(Y-E\left\{Y\right\}\right)\right\}=0$$

c) Siano x, y due V.A. ortogonali. Allora:

$$E\left\{\left(X+Y\right)^2\right\}=E\left\{X^2\right\}+E\left\{Y^2\right\}$$

[Se X, Y sono V.A. che rappresentano le intensità di 2 segnali, significa che vale la proprietà di somma delle potenze, cioè che la potenza del segnale somma è uguale alla somma delle potenze]

Trasformazione di V.A. bidimensionali

$$\begin{cases} Z = g(X,Y) \\ W = h(X,Y) \end{cases}$$

Z, W funzioni di 2 V.A. X, Y

La cumulativa congiunta è:

$$F_{Z,W}(z,w) = P\{Z \le z,\ W \le w\} = P\{g(X,Y) \le z,\ h(X,Y) \le w\}$$

Si può dimostrare che se il sistema di equazioni

$$\begin{cases} z = g(x,y) \\ w = h(x,y) \end{cases}$$

ammette le soluzioni $\{x_i, y_i\}$, e in tali punti il determinante della matrice Jacobiana $\underline{\underline{J}}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix}$ è non nullo, risulta:

$$f_{Z,W}(z,w) = \sum_i \frac{f_{X,Y}(x_i, y_i)}{\left|\det J(x_i, y_i)\right|}$$

V.A. congiuntamente gaussiane

Due V.A. X, Y si dicono congiuntamente gaussiane se risulta:

$$X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right) \qquad Y \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$$

e se la p.d.f. congiunta è:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{\left(x-\mu_X\right)^2}{\sigma_X^2} + \frac{\left(y-\mu_Y\right)^2}{\sigma_Y^2} - 2\rho\frac{\left(x-\mu_X\right)\left(y-\mu_Y\right)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right\}$$

dove $\rho_{XY} = \rho$ è il coefficiente di correlazione.

Proprietà:

1) La p.d.f. congiunta è completamente individuata da μ_X, μ_Y, σ_X, σ_Y e dal coefficiente di correlazione ρ
2) se $\rho = 0$, risulta anche $f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ cioè V.A. gaussiane incorrelate sono anche sempre indipendenti
3) Una qualunque combinazione lineare di X e Y è ancora una V. A. gaussiana

Distribuzioni multivariate (cenno)

Siano date n V.A. X_1, X_2, …, X_n . Si definisce la densità di probabilità congiunta di ordine n:

$$f_n(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n = P\left(x_1 \le X_1 \le x_1 + dx_1,\ldots,x_n \le X_n \le x_n + dx_n\right)$$

e valgono le proprietà seguenti:

(i) Normalizzazione: $\int\int\ldots\int_{R^n} f_n(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n = 1$

(ii) $f_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) = \int_R f_n(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n$

(iii) $P\left[(x_1,\ldots x_n)\in A\right] = \int\int\ldots\int_A f_n(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n$

Esempio: *n* V.A. congiuntamente gaussiane

Le V.A. X_1, X_2, …, X_n sono dette congiuntamente gaussiane se e solo se la p.d.f. congiunta si scrive:

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\underline{\underline{C}})}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})\underline{\underline{C}}^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})^T\right\}$$

- $\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ vettore dei valori medi $\mu_i = E[X_i]$
- $\underline{\underline{C}} = \{C_{ij}\}_{i,j=1,2,..n}$ matrice di covarianza $C_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_j) = E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j]$

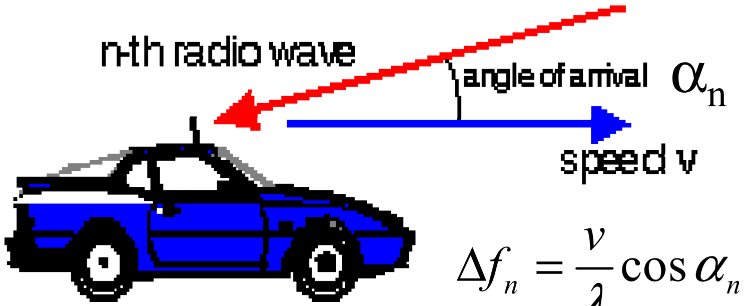
Proprietà:

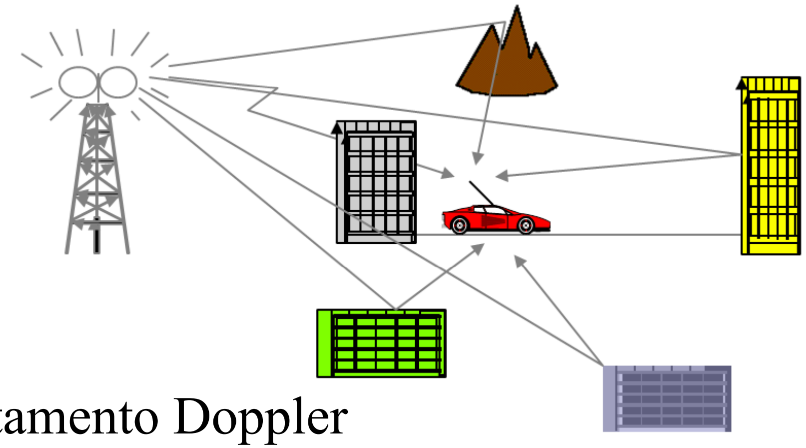
- La p.d.f. congiunta è completamente individuata da $\underline{\mu}$ (momenti del primo ordine) e da $\underline{\underline{R}} = \{R_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ con $R_{ij} = corr\{X_i, X_j\} = E[X_i X_j]$ (momenti del secondo ordine). $\underline{\underline{R}}$ matrice di correlazione
- V.A. incorrelate se risulta: $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{I}}_n$ $\rightarrow$ X_1, X_2, …, X_n indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.)
- Una qualunque combinazione lineare di V.A. congiuntamente gaussiane è ancora una V.A. gaussiana.

Fading da cammini multipli (1)

Segnale trasmesso: portante sinusoidale non modulata

$$\boxed{x(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi_0)}$$





$$\Delta f_n = \frac{v}{\lambda} \cos \alpha_n \rightarrow \text{Spostamento Doppler}$$

In un ambiente caratterizzato dalla presenza di cammini multipli e ricevitore mobile, il segnale ricevuto assume la forma:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \cos(2\pi f_c t + \phi_0 + \phi_n + 2\pi \Delta f_n t) = \mathrm{Re}\left\{ Y \cdot e^{j2\pi f_c t} \right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ (I + jQ) \cdot e^{j2\pi f_c t} \right\}$$

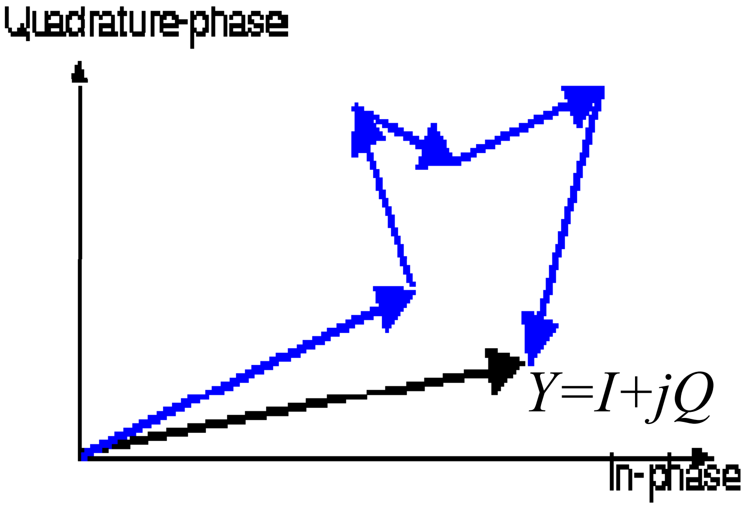
$I(t), Q(t)$ componenti in fase e in quadratura sono Processi Aleatori!!

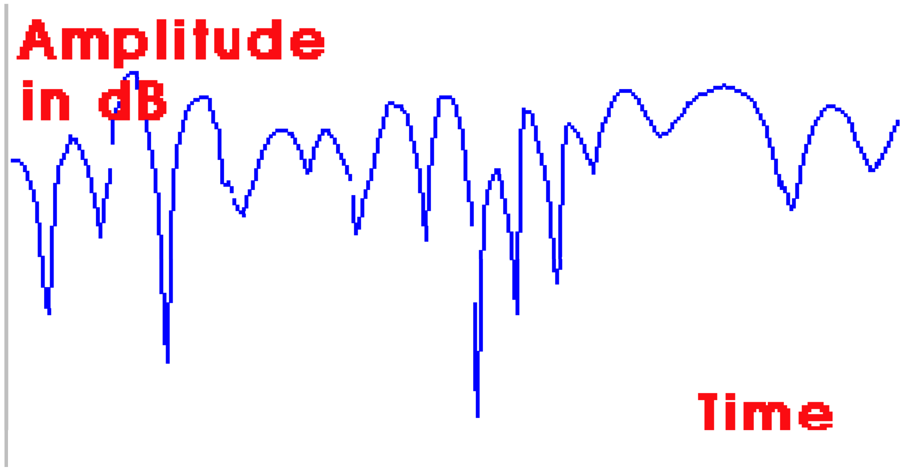
$$\left[\forall t = t_0 \rightarrow I(t_0), Q(t_0) \text{ Variabili Aleatorie} \right]$$

Fading da cammini multipli (2)

$$I(t)=\sum_{n=1}^{N} c_n \cos\left(\phi_0+\phi_n+2\pi\Delta f_n t\right) \qquad Q(t)=\sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\phi_0+\phi_n+2\pi\Delta f_n t\right)$$

$$y(t)=I(t)\cos\left(2\pi f_c t\right)-Q(t)\sin\left(2\pi f_c t\right)$$





Per $N \rightarrow \infty$, il teorema del limite centrale ci dice che le componenti in fase e in quadratura I e Q tendono a diventare V.A. gaussiane indipendenti e identicamente distribuite

$$Y = I + jQ \qquad V.A. \text{ gaussiana complessa}$$

Fading alla Rayleigh (1)

I, Q   V.A. gaussiane indipendenti a valor medio nullo

$$I \sim N\left(0,\sigma^2\right) \qquad Q \sim N\left(0,\sigma^2\right) \qquad f_{I,Q}(i,q) = f_I(i)\, f_Q(q)$$

La p.d.f. congiunta è:

$$f_{I,Q}(i,q) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-i^2/2\sigma^2}}_{f_I(i)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-q^2/2\sigma^2}}_{f_Q(q)} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\left(i^2+q^2\right)/2\sigma^2}$$

Definiamo la V.A. gaussiana complessa: $Y=I+jQ$

$$Y = |Y| \cdot e^{j\Theta} = R \cdot e^{j\Theta} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} R\cos\Theta = I \\ R\sin\Theta = Q \end{cases}$$

Trasf. Inversa:

$$\begin{cases} R = \sqrt{I^2 + Q^2} = g(I,Q) \\ \Theta = arctg\left(Q/Y\right) = h(I,Q) \end{cases}$$

Fading alla Rayleigh (2)

Il determinante Jacobiano della trasformazione di V. A. è:

$$\underline{\underline{J}}(I,Q)=\begin{bmatrix} \frac{I}{\sqrt{I^2+Q^2}} & \frac{Q}{\sqrt{I^2+Q^2}} \\ \frac{-Q}{I^2+Q^2} & \frac{I}{I^2+Q^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \left|\det\left[\underline{\underline{J}}(I,Q)\right]\right|=\frac{1}{\sqrt{I^2+Q^2}}=\frac{1}{R}$$

La p.d.f. congiunta delle 2 V.A. trasformate R e Θ è quindi:

$$f_{R,\Theta}(r,\vartheta)=\frac{\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-r^2/2\sigma^2}}{1/r}=\frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-r^2/2\sigma^2} \qquad \begin{vmatrix} 0\le R<\infty \\ -\pi\le\Theta<\pi \end{vmatrix}$$

Passando alle p.d.f. marginali si ottiene infine:

$$f_\Theta(\vartheta)=\int_0^{+\infty}\frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-r^2/2\sigma^2}dr=\frac{1}{2\pi}\left[-e^{-r^2/2\sigma^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{2\pi}\left[e^{-r^2/2\sigma^2}\right]_{+\infty}^{0}=\frac{1}{2\pi}[1-0]=\frac{1}{2\pi}$$

V.A. Uniforme nell'intervallo $[-\pi,\pi]$! $\Rightarrow$ $\boxed{\Theta=\arg(Y)\sim U([-\pi,\pi])}$

Fading alla Rayleigh (3)

$$f_R(r) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} d\vartheta = \left(\frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} \right) \int_{-\pi}^{+\pi} d\vartheta = 2\pi \cdot \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} =$$

$$= \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}$$ V.A. di Rayleigh con parametro σ^2 ! $\boxed{R = |Y| \sim Rayleigh(\sigma^2)}$

Inoltre, si può dimostrare facilmente che: $\boxed{R^2 = |Y|^2 \sim \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)}$

Se si ha una V. A. $Y=I+jQ$ gaussiana complessa con I, Q a valor medio non nullo r_0:

$$I \sim N(r_0, \sigma^2) \qquad Q \sim N(r_0, \sigma^2) \qquad f_{I,Q}(i,q) = f_I(i) f_Q(q)$$

$$f_{I,Q}(i,q) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(i-r_0)^2/2\sigma^2}}_{f_I(i)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(q-r_0)^2/2\sigma^2}}_{f_Q(q)} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{i^2+q^2+2r_0^2-2ir_0-2qr_0}{2\sigma^2}}$$

Con analogo procedimento, si dimostra che:

$$\boxed{R = |Y| \sim Rice(\sigma^2, r_0)} \qquad \boxed{\Theta = \arg(Y) \sim U([-\pi, \pi])}$$

Fading da cammini multipli (3)

In pratica:

- si ha un fading alla Rayleigh in presenza di numerosi cammini multipli, tutti con ampiezza paragonabile fra loro. Un ambiente con un numero di cammini N>=6 è già una buona approssimazione di uno scenario con fading alla Rayleigh.
  - Caso tipico: scenario urbano denso (Manhattan-like)
- si ha un fading alla Rice in presenza di un termine dominante (in genere cammino LOS, o cammino LOS + cammino riflesso sul terreno), e numerosi cammini che "perturbano" il contributo dominante
  - Caso tipico: scenari indoor (solitamente con fattore di Rice K compreso fra 4 dB e 12 dB).