

A - TEORIA DELLA PROPAGAZIONE RADIO IN AMBIENTE REALE

- Effetto di gas atmosferici e idrometeore
 - Attenuazione supplementare da gas atmosferici
 - Attenuazione supplementare da pioggia
 - Propagazione ionosferica, troposcatter
- **Propagazione in mezzi con disomogenità distribuita – Propagazione troposferica**
 - Cenni di ottica geometrica in mezzi con n debolmente variabile.
 - Propagazione in mezzi a stratificazione piana e sferica. Propagazione troposferica, orizzonte radio e rettificazione del suolo/raggio
- Propagazione in mezzi con disomogenità concentrate – Propagazione in presenza di ostacoli
 - Riflessione del suolo, diffrazione da knife-edge, ellissoide di Fresnel
 - Metodi per il calcolo della attenuazione da ostacoli
 - Teoria geometrica della propagazione: trasmissione attraverso uno strato, diffrazione da spigolo. Propagazione multicammino.



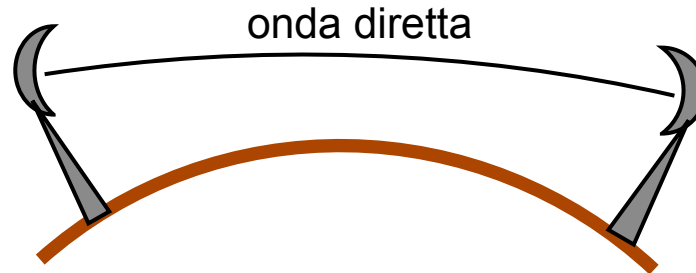
Propagazione nella troposfera (1/2)

Una corretta caratterizzazione dei collegamenti radio su grandi distanze non può prescindere dallo studio degli effetti generati dalla presenza dell'atmosfera terrestre, in particolare della troposfera il cui indice di rifrazione diminuisce lentamente con la quota. In un radiocollegamento la propagazione avviene quindi in mezzi ad indice di rifrazione lentamente variabile. In generale si hanno i seguenti macro-meccanismi di propagazione:



Propagazione nella troposfera (2/2)

Visto che l'andamento dell'indice di rifrazione varia, la traiettoria del segnale non è rettilinea. E' necessario prevederla per valutare l'esatto puntamento delle antenne, l'esatta attenuazione, e l'esatto ritardo di propagazione, ecc.



Una trattazione della propagazione in un mezzo non omogeneo in modo esatto è molto complessa ed è quindi necessario ricorrere ad una trattazione più semplificata, detta Ottica Geometrica classica di cui qui vediamo alcuni cenni.

Propagazione in assenza di ostacoli in un mezzo lentamente variabile (Ottica Geometrica classica)

➤ In un mezzo omogeneo privo di perdite si era vista la soluzione in termine di onda piana o sferica :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_o e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad \text{oppure} \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{E}_o(\vartheta, \varphi)}{r} e^{-j\beta_o r} = \vec{E}'_o(\vec{r}) e^{-j\beta_o r}$$

➤ In assenza di ostacoli e se il mezzo *non omogeneo* ha indice di rifrazione $n(\mathbf{r})$ lentamente variabile con la posizione si ipotizza una soluzione simile alla onda sferica ma generalizzata nell'ampiezza vettoriale e nel fattore di fase:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_o(\vec{r}) \cdot e^{-j\beta_o \Psi(\vec{r})} \quad (*)$$

- $\Psi(\mathbf{r})$: funzione iconale (si ipotizza $\in \mathfrak{R}$);
- Superfici equifase individuate dai punti dello spazio che soddisfano l'equazione $\Psi(\mathbf{r}) = \text{costante}$
- Si ha cioè' un fronte d'onda con curvatura variabile (e un percorso dell'onda anch'esso curvo, non più rettilineo)

Ottica Geometrica classica

Se esistono soluzioni del tipo (*) esse devono soddisfare le equazioni di Maxwell, che per un mezzo non omogeneo privo di sorgenti possono essere così riscritte:

➤ Ricordando l'identità: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{V}) - \vec{\nabla}^2 \mathbf{V}$, si ha:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times (-j\omega\mu\vec{H})$$

$$\nabla(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -j\omega\mu \nabla \times \vec{H}$$

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon_c \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E})$$

$\nabla \cdot \vec{D} = 0$ Essendo un mezzo privo di densità di carica. Quindi:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}) = 0$$

$$\epsilon_0 (\nabla \epsilon_r) \cdot \vec{E} + \epsilon_0 \epsilon_r \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\nabla \epsilon_r}{\epsilon_r} \cdot \vec{E} = -(\nabla \ln(n^2)) \cdot \vec{E} = -2(\nabla \ln(n)) \cdot \vec{E}$$

Dove si è sfruttata la definizione dell' *indice di rifrazione*:

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon_c}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r}{\epsilon_0}} = \sqrt{\epsilon_r}$$



Ottica Geometrica classica

➤ Da tali equazioni si ottiene quindi l'equazione delle onde generalizzata:

$$\nabla^2 \vec{E} + \beta_0^2 n^2 \vec{E} = -2 \nabla \left[(\nabla \ln(n)) \cdot \vec{E} \right]$$

Sostituendovi una soluzione del tipo (*), cioè:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{-j\beta_0\psi(\vec{r})}$$

e osservando che, nel caso di (*) si ha:

$$\nabla \times \vec{E} = \left(\nabla \times \vec{E}_0 - j\beta_0 \nabla \psi \times \vec{E}_0 \right) e^{-j\beta_0\psi(\vec{r})}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \left(\nabla \cdot \vec{E}_0 - j\beta_0 \nabla \psi \cdot \vec{E}_0 \right) e^{-j\beta_0\psi(\vec{r})}$$

E sfruttando alcune identità vettoriali (vedi Propagazione LA) si ottiene ->



Ottica Geometrica classica

(procedimento di Felsen-Marcuvitz [1]) la seg. espressione:

$$\vec{E}_0 \left[n^2 - |\nabla\Psi|^2 \right] - \frac{1}{j\beta_0} \left\{ \vec{E}_0 \nabla^2\Psi + 2\nabla\Psi \left[\vec{E}_0 \cdot \nabla \ln(n) \right] + 2(\nabla\Psi \cdot \nabla) \vec{E}_0 \right\} +$$
$$- \frac{1}{(j\beta_0)^2} \left\{ \nabla^2 \vec{E}_0 + 2\nabla \left[\vec{E}_0 \cdot \nabla \ln(n) \right] \right\} = 0$$

Sotto l' ipotesi $\lambda \rightarrow 0$ ($f, \beta_0 \rightarrow \infty$) (hp. asintotica dell' ottica geometrica), semplificando e uguagliando a zero separatamente Re e Im si ottengono le equazioni fondamentali dell' ottica geometrica:

$$|\nabla\Psi|^2 = n^2 \quad \text{EQUAZIONE DELL'ICONALE}$$

$$\vec{E}_0 \nabla^2\Psi + 2\nabla\Psi \left[\vec{E}_0 \cdot \nabla \ln(n) \right] + 2(\nabla\Psi \cdot \nabla) \vec{E}_0 = 0 \quad \text{EQUAZIONE DEL TRASPORTO}$$

$\Psi(r)$, iconale, è soluzione della prima equazione. Tramite la seconda si può ottenere l' ampiezza vettoriale del campo.



Equazione dei Raggi

Risolvendo l'equazione dell'iconale è possibile calcolare la funzione iconale $\Psi(\mathbf{r})$ in ogni punto $(x,y,z) \rightarrow$ le superfici equifase (fronte d'onda) $\Psi(\mathbf{r})=\text{costante} \rightarrow$ le traiettorie del segnale, cioè i raggi

Def: **Raggio ottico (o elettromagnetico)**: ogni linea dello spazio perpendicolare in ogni punto alla superficie d'onda.

Detto $\hat{s}(x,y,z)$ il versore che individua la direzione locale di propagazione (ed $s(x,y,z)$ la coordinata curvilinea sul raggio) si ha evidentemente:

$$\hat{s} = \frac{\vec{\nabla}\Psi}{|\vec{\nabla}\Psi|} = \frac{\vec{\nabla}\Psi}{n}$$

Indicata con $\mathbf{r}(s)$ l'equazione parametrica del raggio, risulta per altro:

$$\hat{s} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}$$

Quindi uguagliando i due secondi membri si ha:

$$n \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \vec{\nabla}\Psi \quad \text{\underline{Equazione dei raggi}}$$



Equazione differenziale dei Raggi

Ri-derivando l' equazione dei raggi rispetto ad s si ottiene:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \right) = \frac{d}{ds} (\nabla \Psi) = \nabla \left(\frac{d\Psi}{ds} \right) = \nabla (\nabla \Psi \cdot \hat{s}) = \nabla (n \hat{s} \cdot \hat{s}) = \nabla n$$

Cioè:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla n$$

Equazione differenziale dei raggi

L' equazione differenziale dei raggi permette di determinare la traiettoria dei raggi conoscendo il solo andamento di $n(\mathbf{r})$ a differenza dell' equazione dei raggi.



Traiettoria dei Raggi

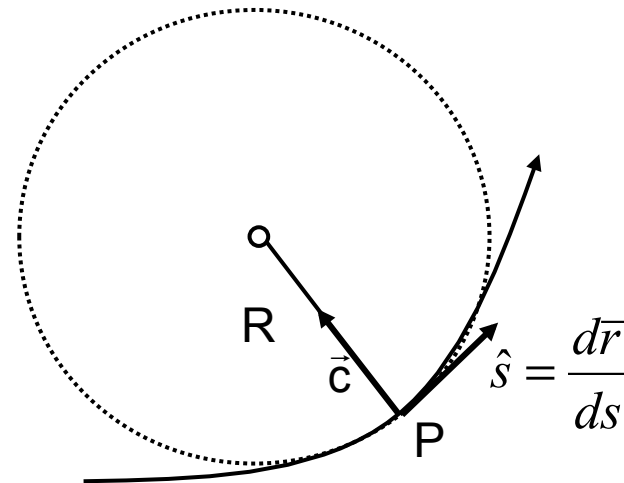
- In ogni punto della traiettoria si può definire il vettore curvatura:

$$\vec{c} = \frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2} = \frac{d\hat{s}}{ds}$$

detto R il raggio di curvatura locale (raggio del *cerchio osculatore*), si può dimostrare inoltre che:

$$\vec{c} = |\vec{c}| \cdot \hat{c} = \frac{1}{R} \hat{c}$$

- Il vettore \vec{c} e' perpendicolare in ogni punto al versore \hat{s} e punta verso il centro del cerchio osculatore



Traiettoria dei Raggi

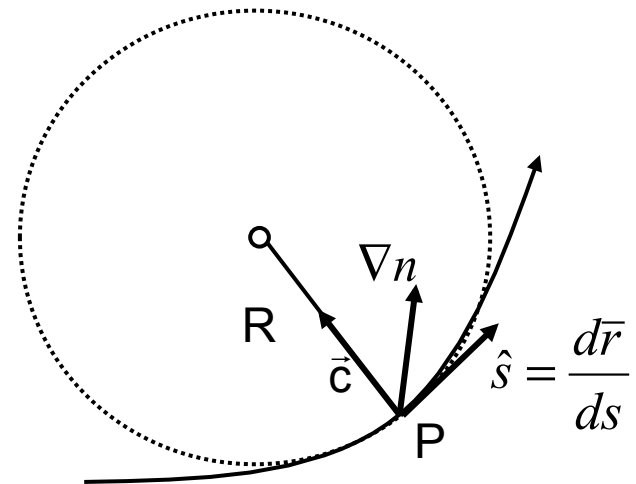
➤ Dall' equazione differenziale dei raggi e in base alle definizioni date:

$$\nabla n = \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \frac{dn}{ds} \hat{s} + n \vec{c} \quad \text{moltiplicando scalarmente per } \hat{c} \Rightarrow$$

$$\nabla n \cdot \hat{c} = n |\vec{c}|$$

⇓

$$|\vec{c}| = \frac{1}{R} = \frac{\nabla n}{n} \cdot \hat{c}$$



Poiché il primo membro è evidentemente positivo, se ne deduce che l'angolo fra \vec{c} e ∇n è sempre minore di $\pi/2$ ➔ il raggio tende sempre a piegare verso la regione ad indice di rifrazione più alto. L'equivalente nel caso discreto è dato dalla Legge di Snell.

Esempio: mezzo a indice di rifrazione costante $n(\mathbf{r})=\text{costante}$
L'equazione differenziale dei raggi si riduce in questo caso a:

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{a}s + \vec{b}$$

con \mathbf{a}, \mathbf{b} vettori costanti definiti dalle condizioni al contorno.

Inoltre considerando l'equazione precedente della curvatura, nel caso di mezzi ad indice di rifrazione costante, si ottiene:

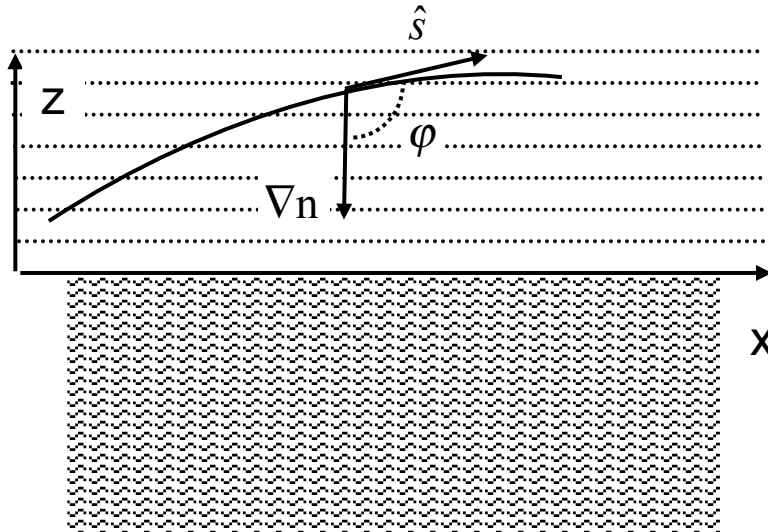
$$\frac{1}{R} = \frac{\nabla n}{n} \cdot \hat{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{il raggio è rettilineo}$$

In un *mezzo omogeneo* le *traiettorie* sono dunque *rettilinee*.

L'ottica geometrica contiene come caso particolare la propagazione in spazio libero, e le soluzioni () contengono onde piane e sferiche*



Esempio: mezzo a stratificazione piana: $n = n(z)$ es: $\nabla n = -|\nabla n| \hat{\mathbf{i}}_z$



Moltiplicando vettorialmente x $-\hat{\mathbf{i}}_z$ l' eq. dei raggi :

$$\frac{d}{ds} \left(-\hat{\mathbf{i}}_z \times n \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{ds} \right) = -\underbrace{\hat{\mathbf{i}}_z \times \nabla n}_{=0} = 0$$

Quindi:

$$(-\hat{\mathbf{i}}_z \times n \hat{\mathbf{s}}) = \overline{\text{cost}} \Rightarrow n \sin(\varphi) = \text{cost} = q$$

Il raggio si mantiene sempre su uno stesso piano. Volendo si può ricavare l' espressione cartesiana

$$\mathbf{r}(s) = x(s) \hat{\mathbf{i}}_x + z(s) \hat{\mathbf{i}}_z \quad (\text{eq. parametrica incognita})$$

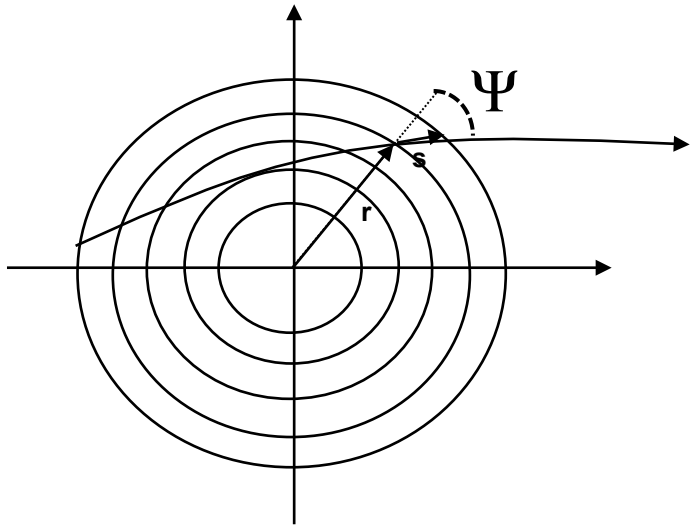
$$\hat{\mathbf{s}}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \hat{\mathbf{i}}_x + \frac{dz}{ds} \hat{\mathbf{i}}_z = (\text{geom.}) = \text{sen} \varphi \hat{\mathbf{i}}_x + \text{cos} \varphi \hat{\mathbf{i}}_z$$

$$\frac{dx}{dz} = \text{tg} \varphi = \frac{n \cdot \text{sen} \varphi}{n \cdot \text{cos} \varphi} = \frac{q}{\pm n \sqrt{1 - \text{sen}^2 \varphi}} = \frac{q}{\pm \sqrt{n^2 - q^2}} \Rightarrow x = x_0 \pm \int_{z_0}^z \frac{q}{\sqrt{n^2(z) - q^2}} dz$$



NB: per $n(z) = Kz$ l' espressione è analitica (arcoshz); q dipende dall' inclinaz. iniz. del raggio

Esempio: mezzo a stratificazione sferica: $n = n(r) \Leftrightarrow \nabla n = \frac{dn}{dr} \hat{r}$



Moltiplicando vettorialmente l'equazione differenziale dei raggi per \mathbf{r} si ottiene:

$$\frac{d}{ds} (\vec{r} \times n \hat{s}) = \vec{r} \times \nabla n = 0$$

segue immediatamente

$$(\vec{r} \times n \hat{s}) = \overline{\text{cost}} \Rightarrow n \cdot r \cdot \sin(\Psi) = \text{costante}$$

tale relazione (*legge di Snell* per mezzi a simmetria sferica) e' alla base della propagazione troposferica cioè della propagazione nella fascia più bassa dell'atmosfera, utile per i sistemi radiomobili terrestri.

Il Principio di Fermat

- Si considerino in un dato mezzo 2 punti P_1 e P_2 ed un percorso che li colleghi; si definisce cammino ottico (elettromagnetico) il seguente funzionale:

$$L \equiv \int_{P_1}^{P_2} n(s) ds \quad (\text{Il valore dipende ovviamente da } P_1, P_2 \text{ e dal percorso scelto})$$

- Vale il principio di Fermat: "Il cammino ottico e' stazionario per raggi effettivi", ovvero le traiettoria effettiva di un raggio minimizza (o, molto raramente, massimizza) il cammino ottico.

OSSERVAZIONE: Il principio di Fermat può rappresentare una valida alternativa all' equazione differenziale dei raggi per determinare le traiettorie dei raggi ottici.

Ad esempio, in un mezzo omogeneo ($n=\text{costante}$), il cammino ottico può essere riscritto come

$$L \equiv \int_{P_1}^{P_2} n ds = n \int_{P_1}^{P_2} ds = n \cdot \ell$$

dove ℓ rappresenta la lunghezza del percorso scelto; e' allora evidente che il percorso a lunghezza minima e' quello rettilineo ➔ traiettorie rettilinee.



Onda Piana Locale (1/3)

➤ A partire dalla $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot e^{-j\beta_0\Psi(\vec{r})}$

è utile osservare la disposizione vettoriale della terna \mathbf{s} , \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 partendo dalle equazioni di Maxwell ($\mathbf{J}_i \approx 0$) e ricordando che:

$$\nabla \times (\Phi \bar{\mathbf{A}}) = \Phi \nabla \times \bar{\mathbf{A}} + \nabla \Phi \times \bar{\mathbf{A}}$$

e che quindi per \mathbf{E} e \mathbf{H} si ottiene:

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = (\nabla \times \bar{\mathbf{E}}_0 - j\beta_0 \nabla \Psi \times \bar{\mathbf{E}}_0) e^{-j\beta_0\Psi(\vec{r})}$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = (\nabla \times \bar{\mathbf{H}}_0 - j\beta_0 \nabla \Psi \times \bar{\mathbf{H}}_0) e^{-j\beta_0\Psi(\vec{r})}$$

Onda Piana Locale (2/3)

E quindi:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} & \xrightarrow{\vec{H}=\vec{H}_0 e^{-j\beta_0\Psi(\vec{r})}} \nabla\Psi \times \vec{H}_0 + \frac{\epsilon_r}{\eta_0}\vec{E}_0 = \frac{1}{j\beta_0} \nabla \times \vec{H}_0 \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} & \xrightarrow{\vec{E}=\vec{E}_0 e^{-j\beta_0\Psi(\vec{r})}} \nabla\Psi \times \vec{E}_0 - \eta_0\vec{H}_0 = \frac{1}{j\beta_0} \nabla \times \vec{E}_0 \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow[\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \text{trascuro i secondi} \\ \text{membri dell'eq. precedente}}]{\quad} \left\{ \begin{aligned} \vec{E}_0 &= \frac{n}{\epsilon_r} \eta_0 \vec{H}_0 \times \hat{s} = \frac{\eta_0}{n} \vec{H}_0 \times \hat{s} = \eta \vec{H}_0 \times \hat{s} \\ \vec{H}_0 &= \frac{\hat{s} \times \vec{E}_0}{\eta} \end{aligned} \right.$$

essendo $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_0}}$ l'impedenza caratteristica del vuoto e $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu \epsilon_0}{\epsilon \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_0}} \frac{1}{n} = \frac{\eta_0}{n}$

per un mezzo qualunque.

\vec{E}_0 , \vec{H}_0 , \hat{s} formano una terna ortogonale destrorsa e la relazione che lega i 3 vettori e' la stessa valida per onde piane uniformi



Onda Piana Locale (3/3)

- Analogamente l' espressione del vettore di Poynting è identica a quella valida per onde piane uniformi.

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{H}^*}{2} = \frac{|\vec{E}_0|^2}{2\eta} \hat{s}$$

L' Energia si propaga lungo i raggi ottici

- Le $\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot e^{-j\beta_0\psi(\vec{r})}$ $\vec{H}(\vec{r}, \omega) = \vec{H}_0(\vec{r}) \cdot e^{-j\beta_0\psi(\vec{r})}$

rappresentano dunque soluzioni delle equazioni di Maxwell che localmente godono delle stesse proprietà delle onde piane uniformi, dove \hat{s} fa le veci del versore corrispondente al vettore d' onda.

Si parla pertanto di Onde Piani Locali.

Come per le onde piane anche per le onde piane locali vale che l' intensità (densità di potenza, cioè modulo del vettore di Poynting) vale:

$$I = \frac{1}{2\eta} |\vec{E}_0|^2 = \frac{1}{2\eta} |\vec{E}|^2$$



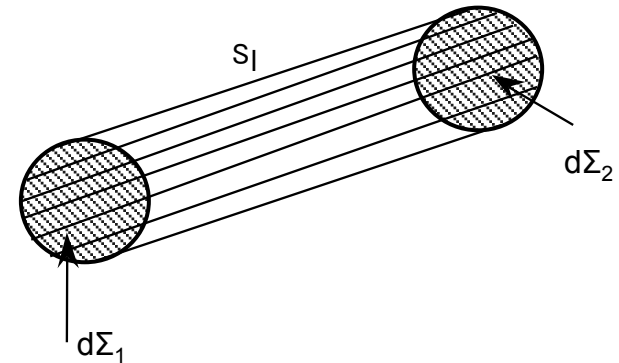
Variazione del campo lungo i raggi

➤ Si vuole ricavare la legge di intensità dell'ottica geometrica, che è un'evoluzione dell'espressione dell'intensità in termini di tubi di flusso

➤ Tubo di flusso dell'energia: superficie chiusa costituita lateralmente da una famiglia di raggi ed ortogonalmente da due porzioni di superficie d'onda

➤ Applicando il teorema di Poynting (conservazione dell'energia) ad un tubo di flusso di sezioni

sufficientemente piccole da poter considerare su di esse $\mathbf{S} \approx$ costante e supponendo mezzo privo di perdite



$$0 = \oint_{\Sigma} \vec{S} \cdot \hat{n} \, d\Sigma = \int_{d\Sigma_1} \vec{S} \cdot \hat{n} \, d\Sigma + \underbrace{\int_{\Sigma_l} \vec{S} \cdot \hat{n} \, d\Sigma}_{=0} + \int_{d\Sigma_2} \vec{S} \cdot \hat{n} \, d\Sigma = -|\vec{S}_1| \cdot d\Sigma_1 + |\vec{S}_2| \cdot d\Sigma_2 \Rightarrow |\vec{S}_1| \cdot d\Sigma_1 = |\vec{S}_2| \cdot d\Sigma_2$$

$$\Rightarrow I_1 \cdot d\Sigma_1 = I_2 \cdot d\Sigma_2$$

Legge di intensità dell'ottica geometrica

Spreading Factor

- L' intensità è inversamente proporzionale alle superficie di base del tubo di flusso

si definisce quindi il *Fattore di Divergenza*:

$$A = \sqrt{\frac{|\vec{S}_2|}{|\vec{S}_1|}} = \frac{|\vec{E}_2|}{|\vec{E}_1|} = \lim_{d\Sigma_1, d\Sigma_2 \rightarrow 0} \sqrt{\frac{d\Sigma_1}{d\Sigma_2}} \quad \text{Spreading Factor (Fattore di Divergenza)}$$

Tale grandezza tiene conto dell' eventuale attenuazione dovuta all' allargamento del fronte d' onda con la propagazione. La potenza portata da ogni raggio può diminuire con la distanza anche se il mezzo e' privo di perdite poiché, man mano che l' onda avanza, l' energia viene distribuita su una superficie sempre più ampia.

Bibliografia:

- [1] L. Felsen, N. Marcuvitz, *Radiation and scattering of waves*, The Institute of electrical and electronics engineers (1994)
- [2] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, 1993.
- [3] M. Kline, I. Kay, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics*, Interscience, New York, 1965.
- [4] T. Halliday, R. Resnick, *Fisica*, Casa Ed. Ambrosiana, vol. II.
- [5] H. L. Bertoni, *Radio Propagation for Modern Wireless Systems*, Prentice Hall, 2000.
- [6] J. B. Keller, *Geometrical Theory of Diffraction*, Journal of the Optical Society of America, Vol. 52, Nro 2, February 1962.
- [7] A. J. W. Sommerfeld, *Optics*, Academic Press, 1954
- [8] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, Wiley, 1989
- [9] R. G. Kouyoumjian, *The geometrical theory of diffraction and its application in Numerical and Asymptotic Techniques in Electromagnetics*, R. Mittra (Ed.), Springer, New York, 1975, capitolo 6.
- [10] E. Knott, J.F. Shaeffer, M. T. Tuley, *Radar Cross Section*, Artech House, 1993
- [11] P. Beckmann, A. Spizzichino, *The scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*, New York, Pergamon, 1963

