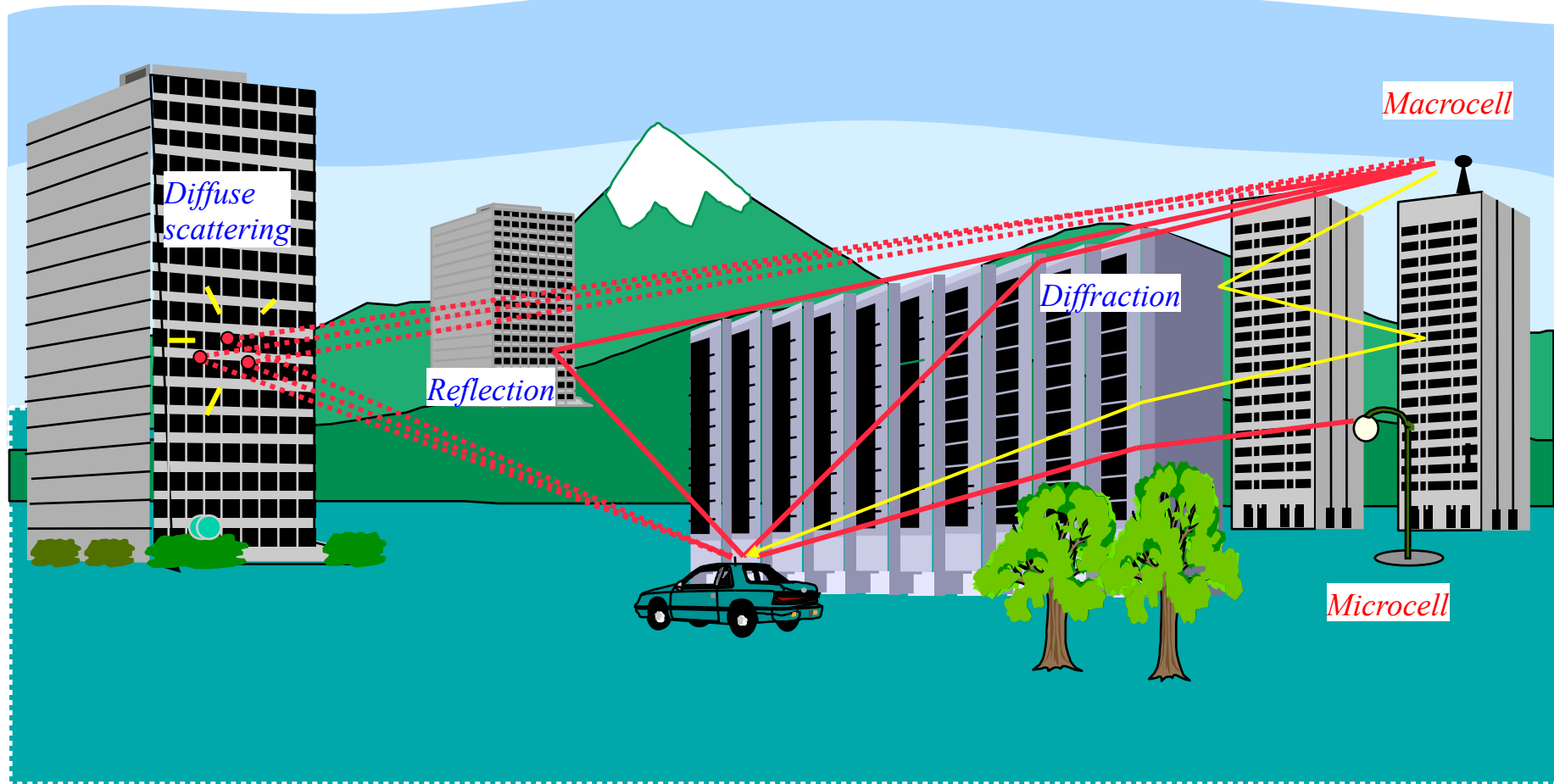


# C – IL CANALE RADIOMOBILE

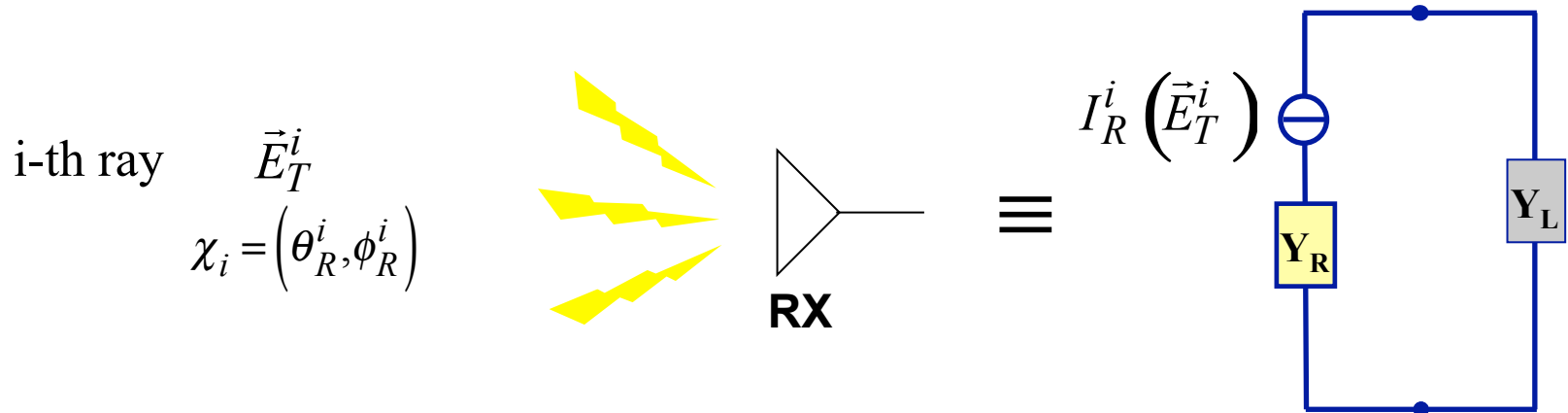
- **Caratterizzazione deterministica del canale radiomobile**
  - **Fuzioni di trasferimento del canale: caso statico e dinamico**
  - **Fading piatto e selettivo**
  - **I parametri sintetici (delay-spread, banda di coerenza ecc.).**
  - **Estensione al dominio spaziale**
  - **Autocorrelazioni**
  - **Esempi**
- **Tecniche di diversità, MIMO, e space-time coding**
  - **Tecniche di diversità**
  - **Matrice di canale e MIMO**
  - **Multiplexing gain e cenni a space-time coding.**



# Deterministic multipath channel modelling



# Received signal with 1 path



Complex number representing the received signal (current) :

$$I_R^i = -j\lambda \sqrt{\frac{\Re(Y_R) g_R(\theta_R^i, \phi_R^i)}{\pi\eta}} \left\{ \hat{p}_R(\theta_R^i, \phi_R^i) \cdot \vec{E}_T^i \right\} = |I_R^i| e^{j \arg(I_R^i)} = \rho_i e^{j\vartheta_i}$$

(of course it is a function of the current  $I_T$  at the transmitter end)

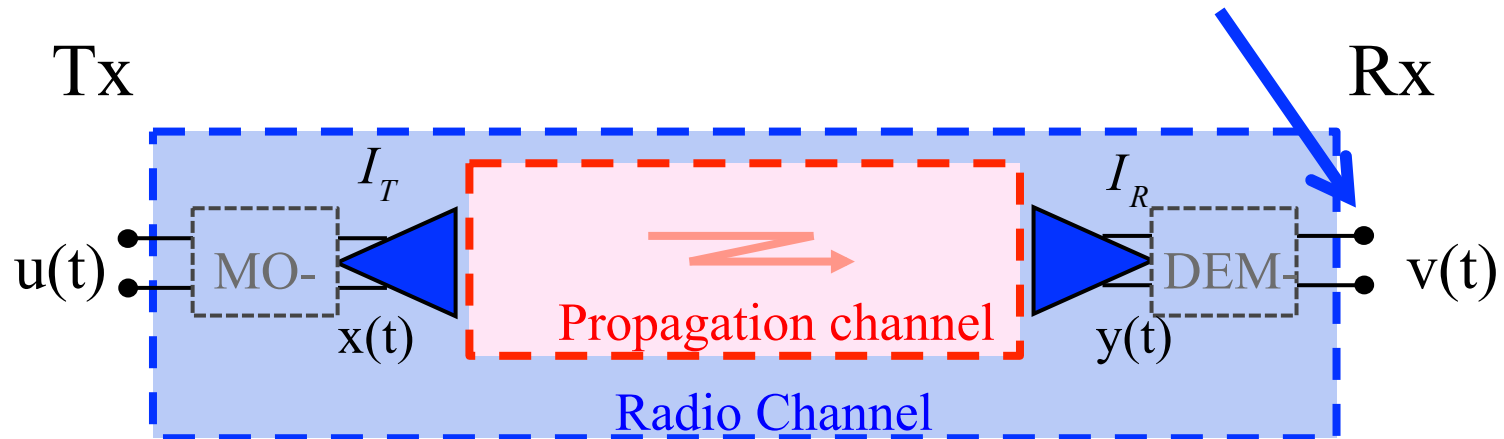
In particular we have:

$\rho_i$	amplitude	$s_i, t_i$	length, delay
$\theta_i$	phase	$\chi_i$	direction of arrival
$f_i$	<i>Doppler freq.</i>	$\psi_i$	direction of departure

# Received signal with $N_r$ paths (1/2)

$$I_R = \sum_{i=1}^{N_r} I_R^i = \sum_{i=1}^{N_r} \rho_i e^{j\vartheta_i} \quad (1)$$

- In the narrowband case the new signal at the Rx is still a sinusoid, but with amplitude and phase given by the coherent sum (1). Time does not appear.
- In the wideband case, i.e. when a transmitted signal is modulated on the carrier we have to include the MO-DEM and consider the time domain.



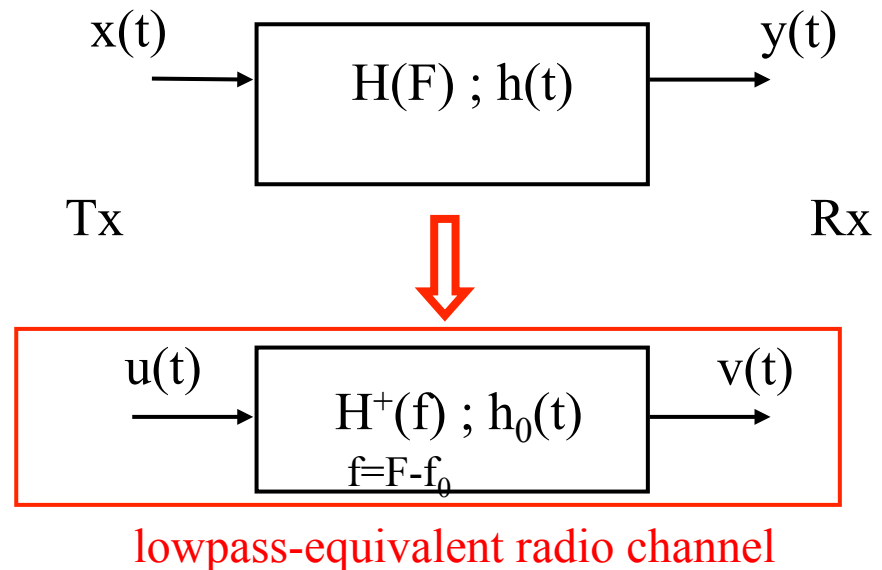
# Received signal with $N_r$ paths (2/2)

- Not only the carrier has a new amplitude and phase now, but different propagation delays of different paths create echoes of the modulating signal at the Rx!
- The **baseband- or lowpass-equivalent radio channel** must be considered now:

$$x(t) = A(t) \cos[2\pi f_o t + \alpha(t) - \varphi_o] = \\ = \text{Re}\{u(t) e^{j2\pi f_o t}\}$$

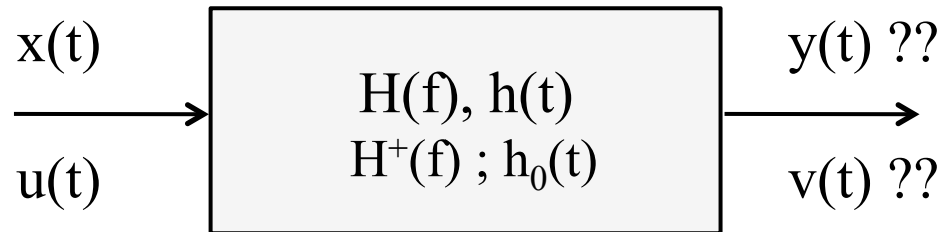
$u(t)$  signal's complex envelope:  
it contains the modulation law

$$u(t) = A(t) e^{j\alpha(t)} e^{-j\varphi_o}$$



# Input-Output Multipath Channel Functions (static case)

- ★ The presence of multipath can be formally described by the some proper “*I/O Channel Functions*” that can be associated with the radio channel
- ★ **hp1** - *discrete channel*:  $N_r$  rays/paths
- ★ **hp2**- *static channel*: channel properties don't vary in time → terminals don't move (in practice, fluctuations in time can be neglected during transmission)



- ★ The I/O channel functions establish a correspondence between the input and the output signals, i.e. formulates the effects of the environment on the propagating signal

# Channel Lowpass Impulse Response (1/2)

- ★ Hp: non distorting antennas, ampli and mo-dem (infinite bandwidth)
- ★ According to hp 1-2, the i-th path ( $i=1, \dots, N_r$ ) introduces:
  - amplitude loss ( $\rho_i$ ) due to the attenuation produced by propagation and by the interactions between the wave and the environment along the path;
  - time shift ( $t_i$ ) due to propagation delay;
  - phase shift ( $\theta_i$ ) due to the phase change along the path;

$$y_i(t) = \rho_i \cdot A(t - t_i) \cdot \cos(2\pi f_0(t - t_i) + \alpha(t - t_i) - \phi_0 + \theta_i)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N_r} y_i(t) = \Re \left( \sum_{i=1}^{N_r} \rho_i \cdot A(t - t_i) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi f_0 t_i} \cdot e^{j\alpha(t - t_i)} \cdot e^{-j\phi_0} e^{j\theta_i} \right)$$

$$y(t) = \Re \left( \underbrace{\sum_{i=1}^{N_r} \rho_i \cdot A(t - t_i) \cdot e^{j\alpha(t - t_i)} \cdot e^{-j\phi_0} \cdot e^{-j2\pi f_0 t_i} \cdot e^{j\theta_i}}_{u(t - t_i)} \cdot e^{j2\pi f_0 t} \right)$$

$v(t)$

# Channel Lowpass Impulse Response (2/2)

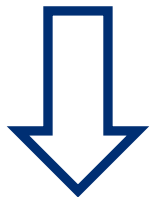
- \*  $v(t)$  represents the complex envelope of the received signal:

$$v(t) = \sum_{i=1}^{N_r} \rho_i \cdot u(t - t_i) \cdot e^{j(\theta_i - 2\pi f_0 \cdot t_i)}$$

- \*  $u(t - t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - t_i) \cdot u(t - \xi) d\xi$  (well known property of the  $\delta$ -distribution)



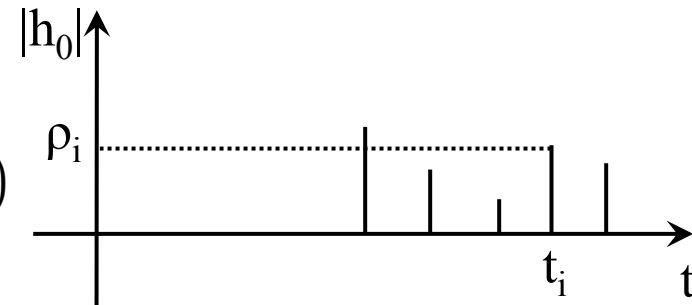
$$v(t) = \sum_{i=1}^{N_r} \rho_i \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - t_i) \cdot u(t - \xi) d\xi \cdot e^{j(\theta_i - 2\pi f_0 \cdot t_i)} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{N_r} \rho_i \delta(\xi - t_i) e^{j(\theta_i - 2\pi f_0 \cdot t_i)} u(t - \xi) d\xi$$



$$h_0(t) \equiv \sum_{i=1}^{N_r} \rho_i \delta(t - t_i) e^{j(\theta_i - 2\pi f_0 \cdot t_i)}$$

*Channel lowpass impulse response*

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\xi) \cdot u(t - \xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t - \xi) \cdot u(\xi) d\xi = h_0(t) * u(t)$$





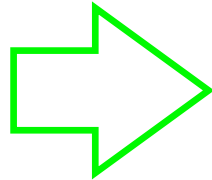
# Channel low-pass and band-pass transfer functions

- ★ The Fourier-transform of  $h_0(t)$  represents the *channel low-pass transfer function*  $H_0(f)$

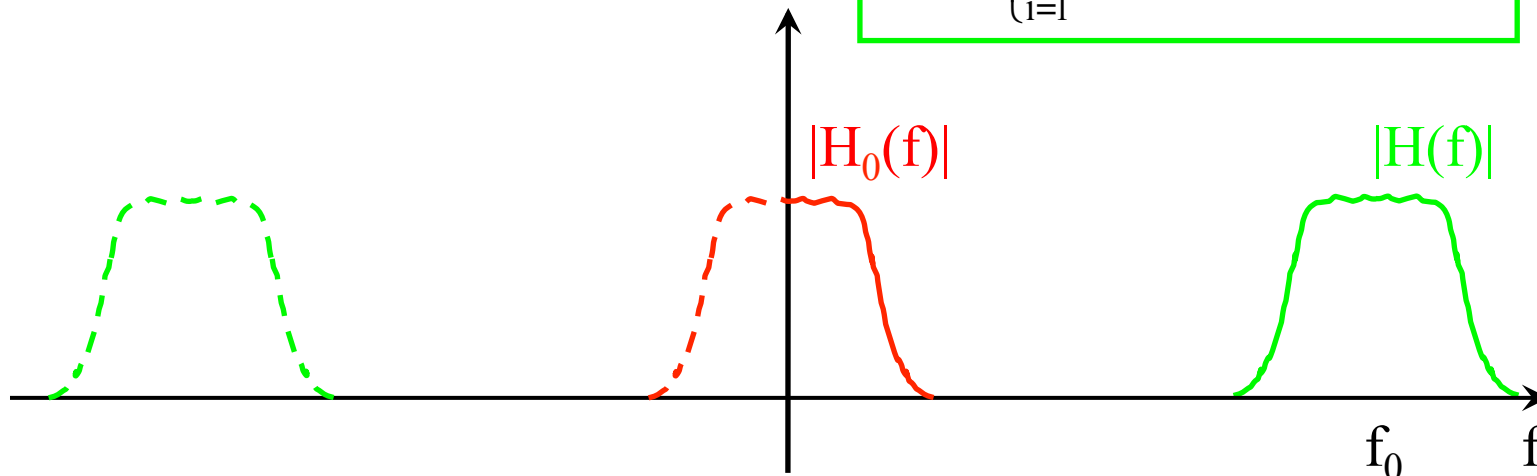
$$H_0(f) = \mathcal{F}[h_0(t)] = \sum_{i=1}^{N_r} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_i \delta(t - t_i) e^{j(\theta_i - 2\pi f_0 t_i)} \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \sum_{i=1}^{N_r} \rho_i e^{-j(2\pi(f+f_0)t_i - \theta_i)}$$

- ★  $H_0(f)$  is related to the *channel transfer function*  $H(f)$  through the following, general relation:

$$H(f) = \begin{cases} H_0(f - f_0) & f \geq 0 \\ H_0^*(-f - f_0) & f < 0 \end{cases}$$



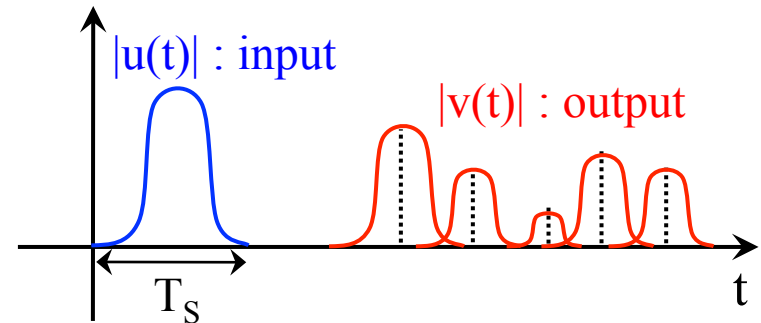
$$H(f) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N_r} \rho_i e^{-j(2\pi f \cdot t_i - \theta_i)} & f \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{N_r} \rho_i e^{-j(2\pi f \cdot t_i + \theta_i)} & f < 0 \end{cases}$$



# Channel Time Dispersion (time domain)

- ★ With reference to the signals complex envelope:

$$v(t) = \sum_{i=1}^{N_r} \rho_i \cdot u(t - t_i) \cdot e^{j(\theta_i - 2\pi f_0 \cdot t_i)}$$

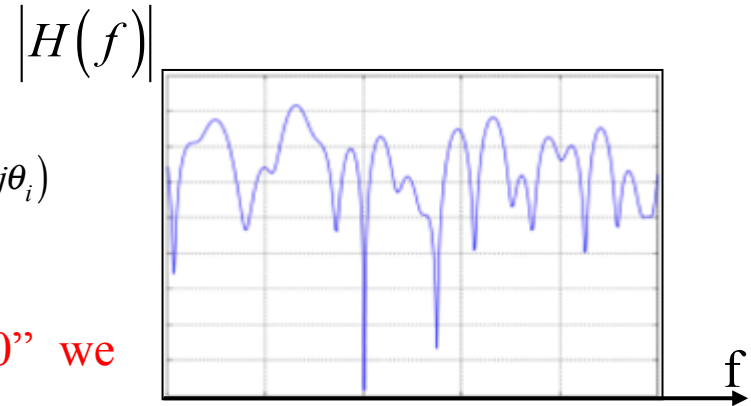


- ★ Because of the multipath and different propagation delays, the radio channel is affected by **time dispersion** at the Rx.
- ★ In digital communication systems, symbols may overlap at the receiver, thus producing the so called **intersymbol interference - ISI** (avoided only if  $T_s \gg \Delta t = t_{i,\max} - t_{i,\min}$ )

# Channel frequency selectivity (frequency domain)

Equivalent low-pass channel transfer function

$$H(f) = F\{h(t)\} = \sum_{i=1}^N \rho_i e^{-j2\pi f t_i} e^{(-j2\pi f_0 t_i + j\theta_i)}$$



Note: we neglect in what follows the footer “0” we always refer to the low-pass functions

- ★ Because of the multipath and different propagation delays, the radio channel frequency response is non-flat at the Rx → **distortion** for wideband signals or **frequency-selective fading**.
- ★ If the signal is narrowband then we have **frequency-flat fading**:

$$B \ll B_c$$

where  $B_c$  is the coherence bandwidth of the channel



# Example: 2 paths

The time origin is arbitrary, therefore we can choose  $t_1 = \theta_1 = 0$ . Then we can normalize w.r.t. the amplitude of the first path:

$$H(F) = 1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} e^{-j\{2\pi(f+f_0)t_2 - \vartheta_2\}} = 1 + \rho e^{-j\{2\pi F \Delta t - \vartheta\}}$$

Thus the frequency response module is:

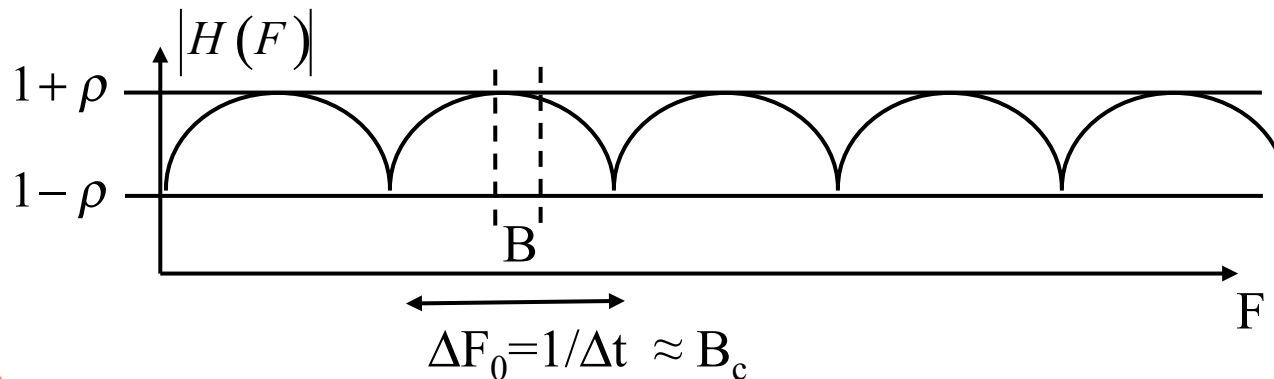
$$|H(F)| = \sqrt{[1 + \rho \cos(2\pi F \Delta t - \theta)]^2 + \rho^2 \sin^2(2\pi F \Delta t - \theta)} = \sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho \cos(2\pi F \Delta t - \theta)}$$

Notches of  $|H(F)|$ :

$$2\pi F_{0k} \Delta t - \theta = (2k + 1) \pi$$

Distance between two notches:

$$2\pi (F_{0k+1} - F_{0k}) \Delta t = 2\pi \rightarrow \Delta F_0 = (F_{0k+1} - F_{0k}) = 1/\Delta t$$



Flat fading  
condition:

$$B \ll B_c \approx \frac{1}{\Delta t}$$

# Caso dinamico

Partiamo da:

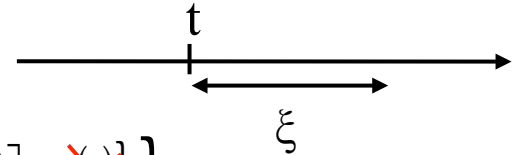
$$y(\xi) = \sum_{i=1}^{N_r} \rho_i \cdot A(\xi - t_i) \cdot \cos(2\pi f_0(\xi - t_i) + \alpha(\xi - t_i) - \phi_0 + \theta_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_r} \Re \left\{ \rho_i \cdot u(\xi - t_i) e^{j(2\pi f_0(\xi - t_i) + \theta_i)} \right\}$$

Ampiezze e ritardi sono dipendenti dal tempo causa la mobilità dei terminali.

Si chiama ora  $\xi$  il tempo dei segnali (tempo relativo o "in eccesso"), diverso dal tempo del canale  $t$  (tempo assoluto), su cui varia il canale stesso.

Si avrà perciò:



$$y(t, \xi) = \sum_i \Re \left\{ \rho_i(t) u[\xi - t_i(t)] e^{j\{2\pi f_0[\xi - t_i(t)] + \theta_i(t)\}} \right\}$$

Approssimazioni:

- $\rho_i$ ,  $\theta_i$  e  $u$  variano lentamente nel tempo assoluto  $\rightarrow$  trascurare dipendenza dal tempo assoluto
- La dipendenza del ritardo nell'esponenziale dal tempo assoluto si può linearizzare



# Caso dinamico (2)

Linearizzazione della dipendenza dei ritardi dal tempo assoluto

All'istante  $t=t_0+\Delta t$  si ha:

$$t_i(t) = \frac{s_i + \Delta s(t)}{c} \simeq \frac{s_i + \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{K}}_i \Delta t}{c} = \frac{s_i + \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{K}}_i (t - t_0)}{c} =$$

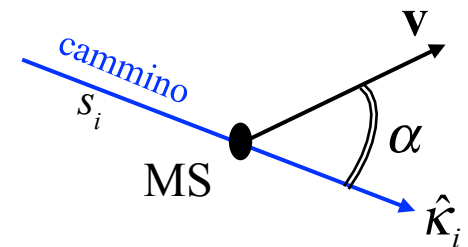
ponendo  $t_0=0$  si ha:

$$= \frac{s_i}{c} + \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{K}}_i}{c} t = t_i + \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{K}}_i}{c} t \triangleq t_i - \frac{f_i}{f_0} t$$

quindi

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{K}}_i}{c} = -\frac{f_i}{f_0} \quad \Rightarrow \quad f_i = \frac{-f_0}{c} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{K}}_i = \frac{-f_0}{c} v \cos \alpha$$

Frequenze Doppler



Ad ogni cammino è associata una frequenza Doppler



# Caso dinamico (3)

Si ottiene allora:

$$y(t, \xi) = \sum_i \Re \left\{ \rho_i u[\xi - t_i] e^{j\{2\pi f_0 \xi + 2\pi f_i t - 2\pi f_0 t_i + \vartheta_i\}} \right\}$$

da cui:  $v(t, \xi) = \sum_i \rho_i u(\xi - t_i) e^{j(2\pi f_i t - 2\pi f_0 t_i + \vartheta_i)}$

Con un procedimento del tutto analogo a quello visto per il caso statico si ottengono le espressioni delle funzioni di trasferimento del canale equivalente passabasso:

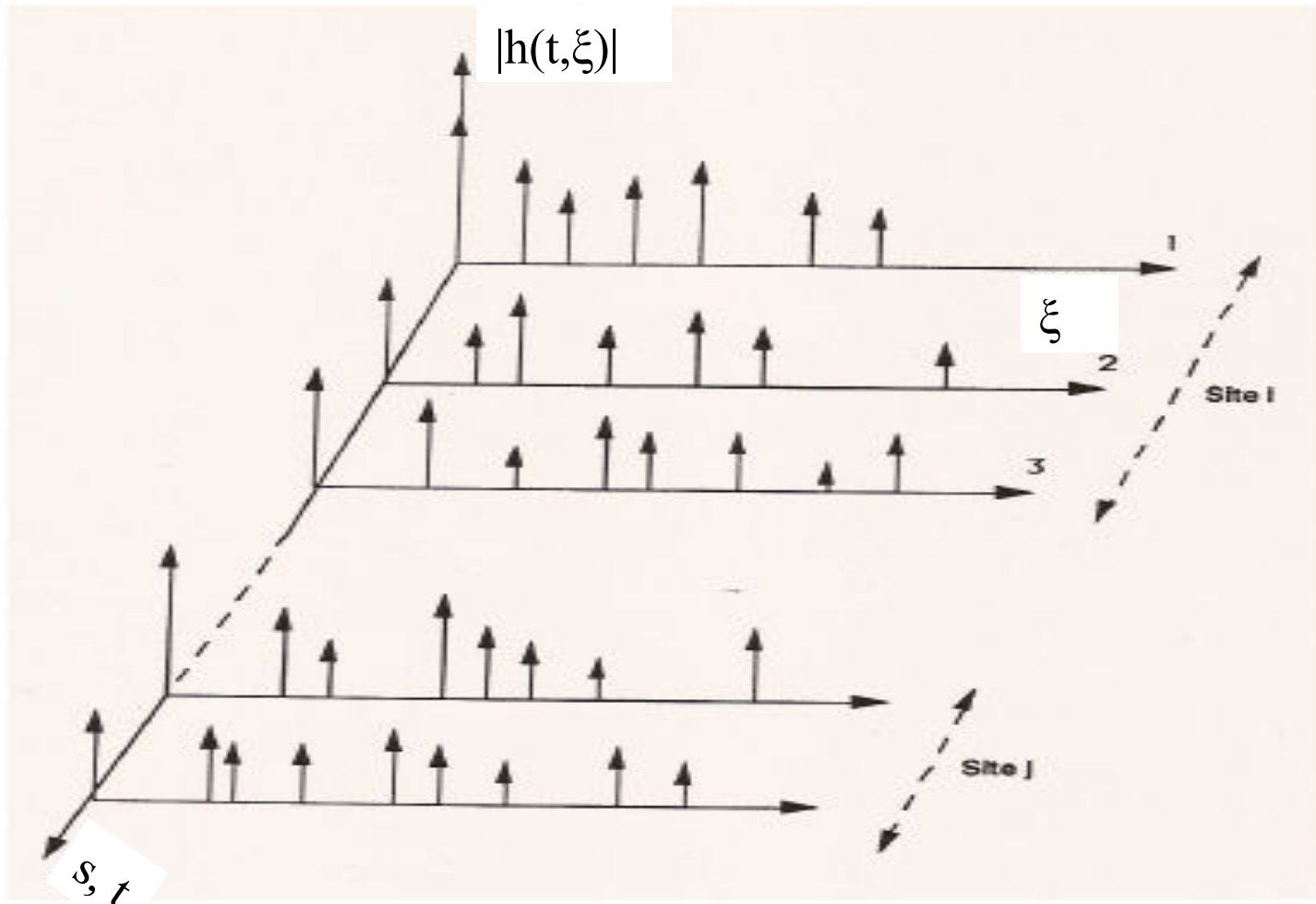
$$h(t, \xi) = \sum_i \rho_i \delta[\xi - t_i] e^{j\{2\pi f_i t - 2\pi f_0 t_i + \vartheta_i\}}$$
$$H(t, f) = \sum_i \rho_i e^{j\{2\pi f_i t - 2\pi f t_i - 2\pi f_0 t_i + \vartheta_i\}}$$

La frequenza nella seconda è la trasformata del ritardo in eccesso nella prima.

Si ha una simmetria: a causa dei ritardi dei cammini si ha una dipendenza, una “selettività” in frequenza, a causa degli spostamenti Doppler si ha una selettività nel tempo assoluto



# Esempio di risposta impulsiva tempo-variante





# Caso dinamico (4)

Analogamente a prima il canale è **non selettivo nel tempo**, e quindi si ha **fading piatto nel tempo** se:

$$T_d \ll T_c$$

Dove  $T_c$  è il **tempo di coerenza del canale** e  $T_d$  è la durata del segnale, cioè della forma d'onda che occorre riconoscere (può corrispondere a uno o più simboli in relazione alla tecnica di decodifica).



# Osservazione

Le funzioni  $h$  e  $H$  sono del tipo:

$$M(x, w) = \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) f(w) \quad \xrightarrow{x \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow y} \quad N(y, w) = \sum_{i=1}^N e^{-j2\pi y x_i} f(w)$$

**Es:**



Siccome la trasformata di Fourier di una  $\delta$  è un esponenziale, si ha sempre questa relazione tra domini apparentati da trasformata di Fourier.

Viceversa se la dipendenza funzionale è esponenziale, la trasformata di Fourier fornisce una  $\delta$ -dipendenza nel dominio trasformato.

Si puo' dire che  $M$  è di “tipo  $\delta$ ” in  $x$  ed  $N$  è di “tipo  $e$ ” in  $y$ .

Si noti inoltre che prendendo il valore di  $N(0, w)$  alla frequenza zero si ottiene la componente continua di  $M$  rispetto a  $x$ , cioè si ha:

$$N(0, w) = N(w) = \sum_{i=1}^N f(w) = \int M(x, w) dx = M(w)$$

# Osservazione (II)

Trasformando il tempo assoluto (dipendenza esponenziale) si otterrà un dominio frequenziale in cui la funzione avrà dipendenza del tipo  $\delta(v-f_i)$ , il dominio delle frequenze Doppler, che verrà identificato con l'asse  $v$ .

In definitiva si avrà quindi:

- $\xi$  tempo relativo (excess time)
- $f$  frequenza assoluta (absolute frequency)
- $t$  tempo assoluto (absolute time)
- $v$  frequenza Doppler (Doppler's frequency)

Le funzioni del canale sono di “tipo  $\delta$ ” nelle variabili “relative” e di “tipo  $e$ ” nelle variabili “assolute”



# Le 4 funzioni del canale radiomobile

Trasformata del tempo assoluto è la frequenza Doppler  $\nu$ . Si possono allora ottenere altre due funzioni del canale:

$$D(\nu, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, \xi) e^{-j2\pi\nu t} dt = \sum_i \rho_i \delta[\xi - t_i] \delta[\nu - f_i] e^{j\{-2\pi f_0 t_i + \vartheta_i\}}$$

$$F(\nu, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t, f) e^{-j2\pi\nu t} dt = \sum_i \rho_i \delta(\nu - f_i) e^{j\{-2\pi f t_i - 2\pi f_0 t_i + \vartheta_i\}}$$

Si hanno quindi 4 funzioni del canale che definiscono una circolarità tramite trasformate di Fourier:

