La terra (I)

• problema di definire una *superficie matematica* della Terra

• come sistema di riferimento rispetto al quale riferire le coordinate di questa superficie matematica fu scelta una terna cartesiana ortogonale (X,Y,Z) definita come segue:

· origine della terna nel baricentro della massa terrestre,

· asse Z coincidente con l’asse di rotazione terrestre,

· asse X giacente nel piano contenente l’asse di rotazione e un punto arbitrario della superficie terrestre (Greenwich).

Il sistema di riferimento così definito prende il nome di *sistema geocentrico*.

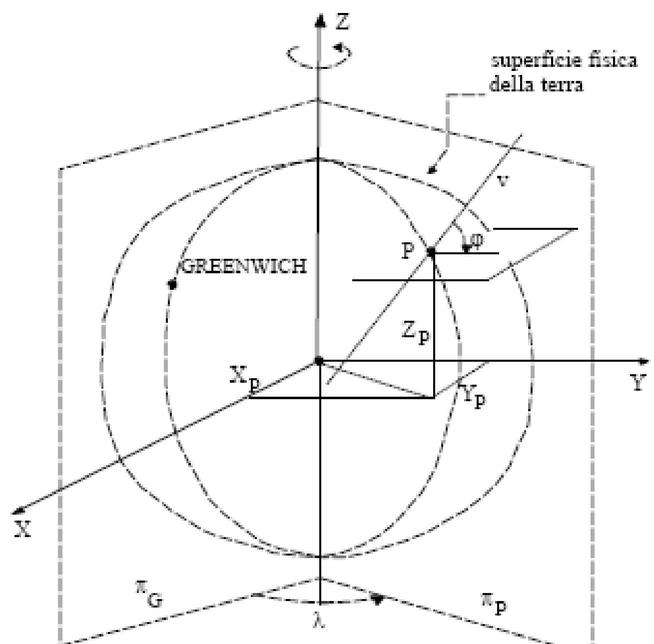
• Dato un punto P sulla superficie fisica della Terra, si definisce *piano del meridiano terrestre passante per P* il piano contenente l’asse di rotazione terrestre ed il punto P.

La terra (II)

- punto P in funzione delle sue coordinate X,Y,Z nel sistema geocentrico
- punto P in funzione di una coppia di *coordinate geografiche terrestri* la *latitudine terrestre* e la *longitudine terrestre*.

La latitudine terrestre è l'angolo che la verticale passante per il punto P forma con un generico piano ortogonale all'asse di rotazione terrestre, in particolare col piano equatoriale; la longitudine terrestre è l'angolo che il piano π_P contenente il punto P e l'asse di rotazione terrestre forma con un *piano di riferimento* della longitudine π_G, che è quello definito dall'asse di rotazione terrestre e dal piano contenente l'asse X, ovverosia il piano meridiano passante per Greenwich.

•



sistema geocentrico
latitudine e longitudine terrestri

Il geoide

• problema: definire l’espressione matematica della terra

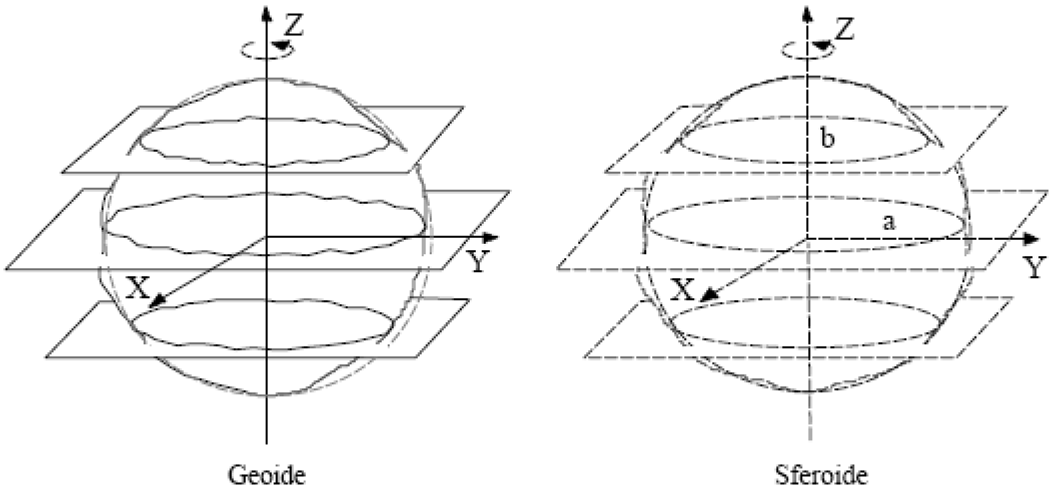
• il geoide è la superficie che si otterrebbe prolungando al di sotto delle terre emerse la superficie del mare in quiete passante per il punto di riferimento costituito dal livello medio del mare in un ben preciso punto del porto di Genova.

• Il geoide è una superficie che ha un riscontro nella realtà fisica; è possibile determinare le quote dei punti della superficie fisica della Terra partendo dal livello del mare: per questi motivi il geoide fu assunto come superficie di riferimento per l’altimetria.

Sferoide

- massa interna della Terra distribuita mediamente in modo simmetrico rispetto all'asse di rotazione Z; questa semplificazione porta alla trasformazione del **geoide** in uno *sferoide*, cioè in un solido di rotazione

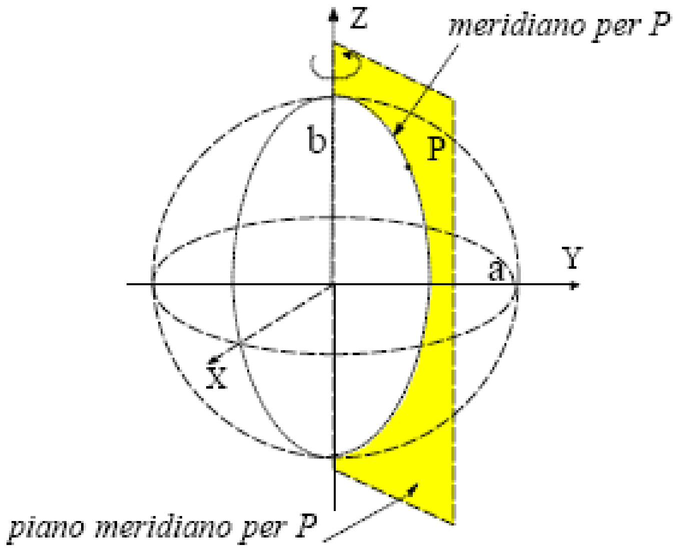
- Le sezioni dello sferoide con piani ortogonali all'asse Z sono dei cerchi. Nello sferoide si possono quindi definire un raggio *a* del cerchio che giace nel piano equatoriale e un valore *b* della distanza tra il piano equatoriale e i poli.



L'ellissoide

- Anche lo sferoide non aveva però un'equazione operativa come il geoide. I geodeti introdussero quindi un'ultima semplificazione, assumendo, come superficie di passaggio tra la superficie fisica della Terra e la sua rappresentazione cartografica, l'*ellissoide* che è la superficie generata dalla rotazione di un'ellisse di semiassi *a* e *b* uguali a quelli dello sferoide, intorno all'asse Z.

•*piano meridiano di P:* il piano contenente l'asse di rotazione Z ed il Punto P



•*meridiano di P:* l'intersezione

piano meridiano con la superficie dell'ellissoide.

Equazione dell'ellissoide

- Con riferimento al sistema *geocentrico* (X,Y,Z) precedentemente definito, l'equazione dell'ellissoide è la seguente:

$$\frac{X^2+Y^2}{a^2}+\frac{Z^2}{b^2}=1$$

semiasse equatoriale dell'ellissoide *a* = 6378388 m

semiasse polare dell'ellissoide *b* = 6356912 m

Eccentricità ellissoide

$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=0.006722$$

- il sistema GPS (Global Positioning System) utilizza invece dei diversi parametri ellissoidici denominati WGS'84 (World Geodetic System 1984) che sono i seguenti:

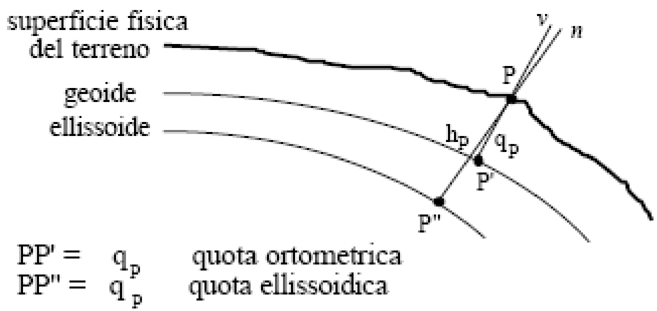
a = 6378137 m

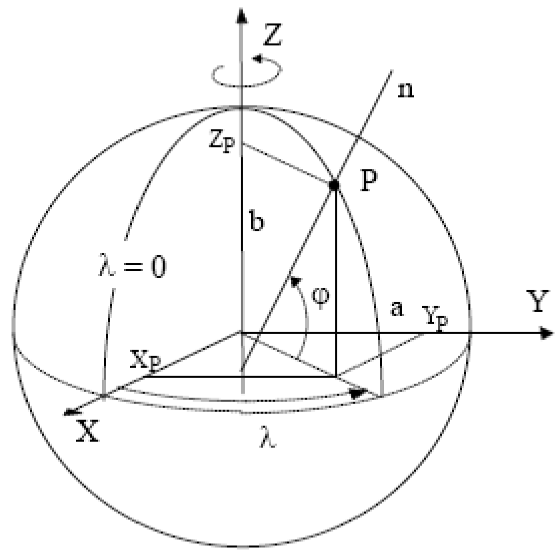
b = 6356752.314 m

- e^2 = 0.000669

Coordinate ellissoidiche

- la latitudine ellissoidica φ è l'angolo che la normale *n* all'ellissoide in P forma con il piano equatoriale dell'ellissoide
- la longitudine ellissoidica λ è l'angolo, in senso antiorario, che il piano (XZ), piano meridiano di Greenwich, forma con il piano meridiano di P.





La latitudine φ è un *valore assoluto*, mentre la longitudine λ è un *valore relativo*, perché dipende dalla scelta del piano meridiano di riferimento

- *quota ellissoidica* h_P è la distanza del punto P dall'ellissoide misurata lungo la *normale* all'ellissoide passante per P (segmento PP'')

Legame tra coordinate ellissoidiche geografiche e coordinate geocentriche

- Esistono delle relazioni che mettono in corrispondenza un punto di coordinate geografiche φ, λ e quota ellissoidica h, con le coordinate X,Y,Z che tale punto ha nel sistema cartesiano geocentrico (X,Y,Z); questo passaggio è molto utile per la determinazione delle coordinate dei punti mediante il GPS

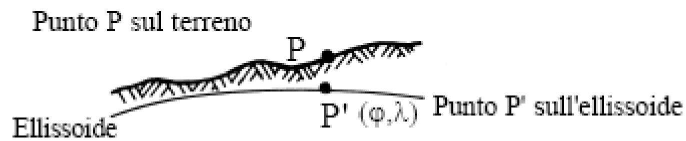
$$X = \left(\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sen^2 \varphi}} + h \right) \cos\varphi \cos\lambda$$

$$Y = \left(\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sen^2 \varphi}} + h \right) \cos\varphi sen\lambda$$

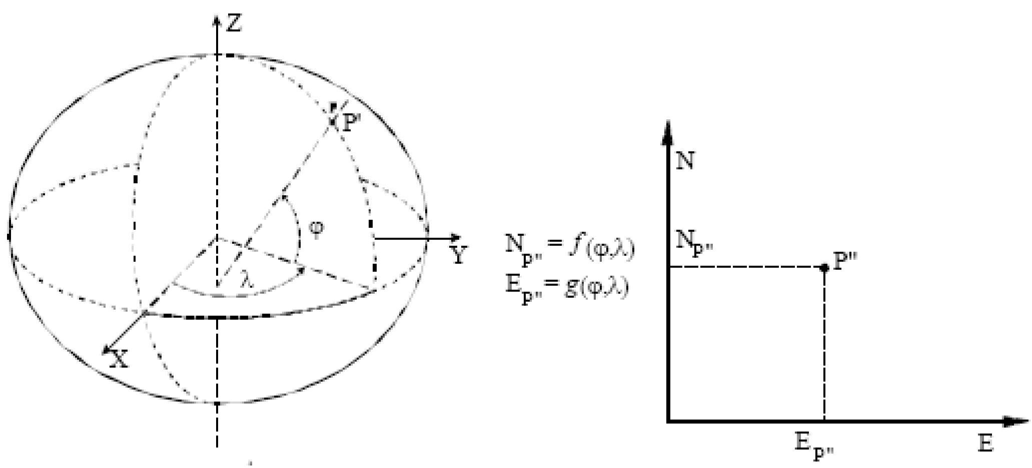
$$Z = \left(a\sqrt{1 - e^2 sen^2 \varphi} + h \right) sen\varphi$$

Problema cartografico

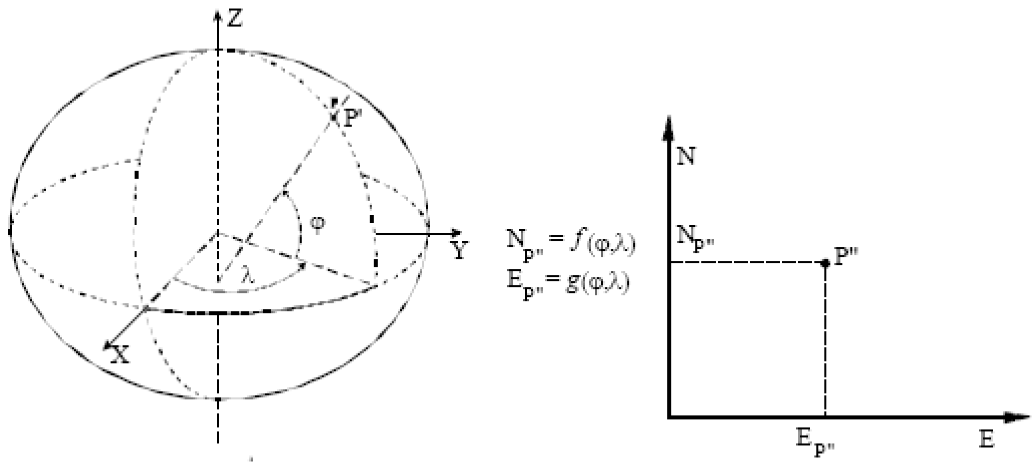
- **Geodesia**: stabilisce in che modo mettere in corrispondenza biunivoca i punti della superficie fisica della Terra con quelli dell'ellissoide.



- **Cartografia**: stabilisce invece in che modo mettere in corrispondenza biunivoca un generico punto P’ della superficie ellissoidica, dato in termine di coordinate geografiche φ ε λ, con un punto P’’ di coordinate N,E nel sistema della proiezione cartografica Gauss-Boaga.



Rappresentazione cartografica della superficie terrestre



1. **Costruzione della planimetria**: ad ogni punto P della superficie fisica della Terra, se ne fa corrispondere uno P' sull'ellissoide di coordinate geografiche φ e λ (rispettivamente **latitudine e longitudine**) Le coordinate φ e λ del punto P' dell'ellissoide vengono trasformate, in una coppia di coordinate cartesiane piane N,E nel sistema cartografico Gauss-Boaga.
2. **Costruzione dell'altimetria**: a partire da un punto che materializza la superficie del geoide si determina la quota come distanza dal geoide misurata sulla verticale

Coordinate geografiche terrestri

• per ogni generico punto P della superficie fisica della Terra è possibile determinare una coppia di coordinate *geografiche terrestri* che sono simili a quelle geografiche ellissoidiche

• sono dette latitudine *terrestre* e longitudine *terrestre*, proprio per indicare che si riferiscono a un punto fisico della superficie terrestre e che vengono misurate con riferimento alla verticale passante per il punto stesso

• il passaggio tra superficie fisica della Terra e proiezione cartografica Gauss-Boaga non è diretto, ma, si avvale di superficie matematica intermedia di passaggio che è l'*ellissoide*.

Sistemi di proiezione

- **proiezioni cartografiche**: rappresentare la superficie sferica della Terra su di un piano mantenendo alcune proprietà geometriche quali l'isogonia, l'equivalenza o l'equidistanza:

  – **U.T.M. (proiezione policilindrica inversa con 60 fusi di 6 gradi di longitudine numerati a partire dall'antimeridiano di Greenwich e 160 gradi di latitudine, 80 Nord e 80 Sud)**

  – **la Gauss-Boaga (proiezione cilindrica inversa, fusi di 6 gradi ripetto al meridiano centrale di Monte Mario, ampiezza massima Italia di 12 gradi di longitudine,sono sufficienti due fusi per rappresentarla, fuso Est e fuso Ovest)**

  – **la Lambert**

- Durante il processo di proiezione dei dati reali su un foglio di carta sono introdotti inevitabilmente degli **errori**
- le proiezioni equivalenti preservano le aree, le proiezioni conformi gli angoli, quelle equidistanti le distanze tra punti determinati.
- non esiste un sistema di proiezione preferibile in assoluto e l'adozione di un sistema piuttosto che un altro dipende dall'uso cui è destinata la cartografia e dalla zona da rappresentare

Sistemi di riferimento (I)

- **Per ogni proiezione viene definito anche un sistema di riferimento, utilizzato per il calcolo delle coordinate.**
-

•nel sistema UTM si utilizzano spicchi predeterminati ampi sei gradi in latitudine detti fusi con un sistema di coordinate ortogonali all'interno di ogni fuso (l'Italia è a cavallo dei fusi 32, 33 e 34)

•nella Gauss-Boaga, il riferimento è il meridiano passante per Monte Mario (a Roma) e vengono utilizzate coordinate chilometriche misurate convenzionalmente partendo da 1500 a sinistra e da 2520 a destra del meridiano di riferimento

- **sistema di riferimento basato su una superficie piana (x,y) ed un altro basato su una sfera (latitudine, longitudine). In latitudine: 01 indica l'Equatore, 90· il Polo Nord e -90· il Polo Sud. In longitudine: 01 indica il Primo Meridiano, che parte dal Polo Nord, passa per Greenwich (in Inghilterra) e termina al Polo Sud. La longitudine è misurata positivamente fino a 1801, spostandosi da Greenwich verso est, e negativamente in caso contrario.**

Sistemi di riferimento (II)

Sistema ECI (Earth Centered Inertial)

Sistema cartesiano ortogonale OXYZ con:

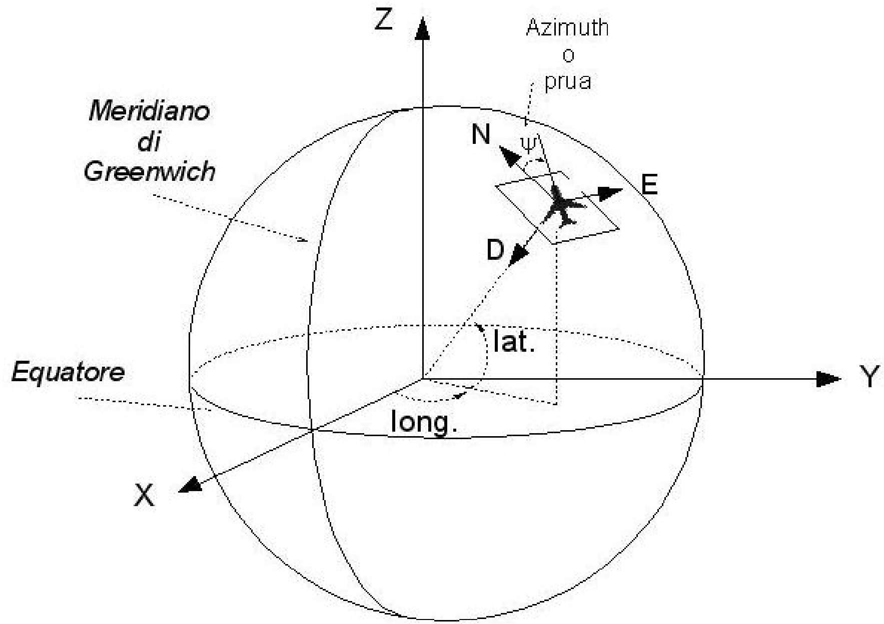
- **origine O posta nel centro della Terra**
- **asse Z coincidente con l’asse di rotazione della Terra**
- **assi X e Y giacenti sul piano equatoriale terrestre, con asse X diretto verso una stella (punto *g* della costellazione dell’Ariete)**
- **asse Y perpendicolare agli altri due in modo da formare una terna destrorsa.**

Sistema ECEF (Earth Centerd Earth Fixed).

Sistema cartesiano ortogonale OXYZ, fisso rispetto alla Terra con:

- **origine O posta nel centro della Terra**
- **asse Z coincidente con l’asse di rotazione della Terra**
- **assi X e Y giacenti sul piano equatoriale terrestre, con asse X passante per l’intersezione tra equatore e meridiano di Greenwich**
- **asse Y perpendicolare agli altri due in modo da formare una terna destrorsa.**

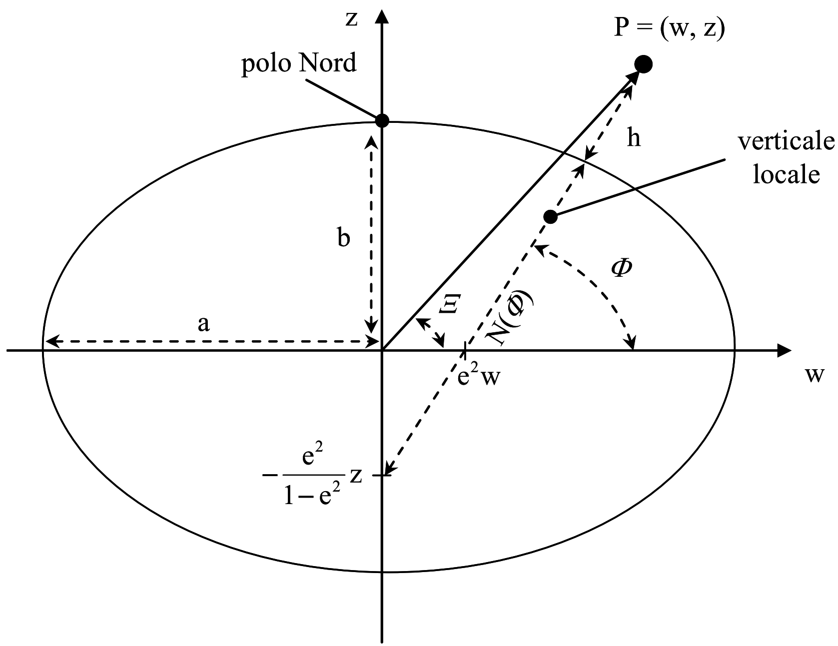
Sistemi di riferimento ECEF e NED



Le coordinate di un punto di un sistema ECEF sono individuate o dalla terna di tre coordinate ortogonali (X, Y, Z) oppure, equivalentemente, dalla terna di coordinate geocentriche (longitudine, latitudine, quota):

- **longitudine: angolo tra il piano contenente il meridiano di Greenwich ed il piano contenente il meridiano passante per il punto considerato**
- **latitudine: angolo che il segmento congiungente il punto considerato ed il centro della Terra forma con il piano equatoriale**
- **quota: distanza tra un punto qualsiasi e la sua proiezione sulla superficie della sfera rappresentante la Terra.**

WGS84



sezione verticale della Terra in corrispondenza di un generico asse equatoriale w.
In questo caso la coordinata orizzontale w vale $w = \sqrt{x^2 + y^2}$

Sempre nell'ambito del sistema ECEF, esiste un riferimento, denominato WGS84, che indica il sistema ECEF precedentemente descritto ma in cui la forma di riferimento della Terra non è una sfera bensì un ellissoide schiacciato con piano di simmetria verticale In questo caso anziché parlare di coordinate geocentriche si parla di coordinate geodetiche. La longitudine e la quota hanno la stessa definizione vista precedentemente, mentre la latitudine viene definita rispetto alla verticale locale che, a causa dello schiacciamento dell'ellissoide, non passa per il centro della Terra

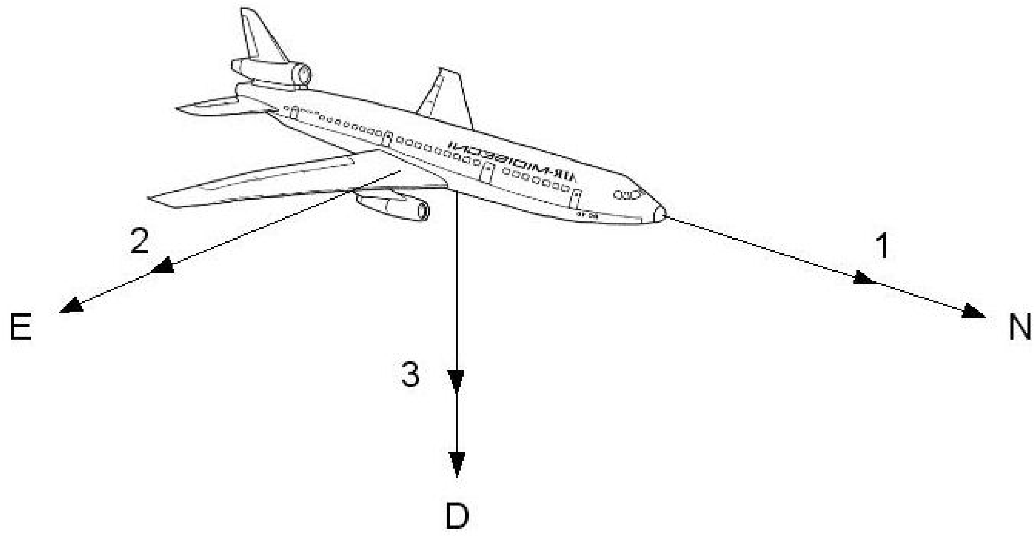
Sistema NED e Body

Sistema NED (*Nord Est Down*).
Sistema mobile definito in riferimento al piano tangente alla superficie terreste in un qualsiasi punto.
Per un aereo il sistema NED avrà:
•origine posta nel baricentro dell'aereo

- •assi N e E giacenti sul piano orizzontale, cioè quel piano parallelo al piano tangente alla Terra e passante per la proiezione di O sulla superficie terrestre
- •asse N diretto verso il Polo Nord geografico
- •asse E diretto verso Est
- •asse D perpendicolare agli altri due e rivolto verso il basso, quindi diretto verso il centro della Terra
- •L'azimuth o prua o *heading* è l'angolo definito tra l'asse N e la proiezione dell'asse longitudinale dell'aereo sul piano N-E.

Sistema Assi Corpo (*Body*).
Sistema di riferimento solidale al velivolo, con origine nel suo baricentro, e tale che:

asse 1 (X) lungo l'asse longitudinale del velivolo
asse 3 giace sul piano di simmetria verticale del velivolo ed è perpendicolare all'asse 1
asse 2 è quello trasversale al velivolo (è diretto verso l'ala destra, se si guarda il velivolo dall'alto), perpendicolarmente agli assi 1 e 2.



sistemi NED e Body in una situazione in cui sono coincidenti (velivolo livellato e diretto a Nord)

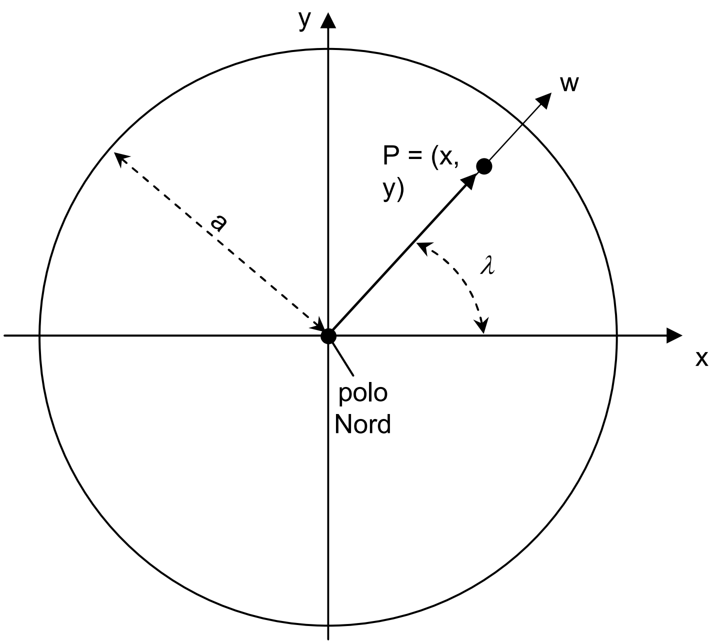
Quando il velivolo si muove gli assi "Body" si muovono in modo solidale con esso mentre gli assi "NED" restano fissi e puntano sempre nelle stesse direzioni. Le origini dei due sistemi di riferimento restano comunque coincidenti e posizionate nel baricentro del velivolo.

Durante il moto, le posizioni assunte dagli assi del sistema Body rispetto a quelle del NED definiscono l'***assetto*** del velivolo.

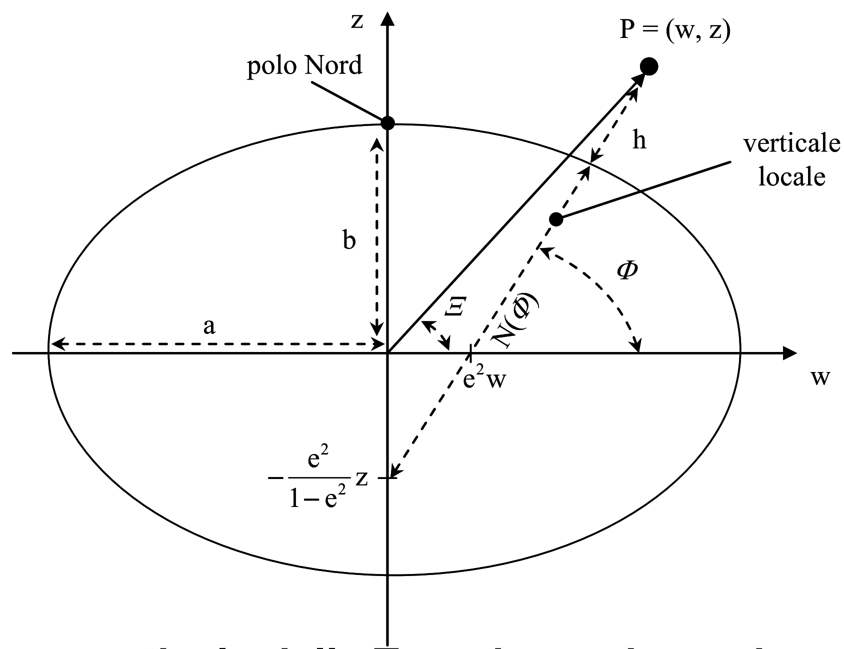
In generale per assetto si intende l'orientamento di un sistema di riferimento qualsiasi rispetto ad un altro, preso come riferimento fisso

Trasformazione da coordinate geodetiche WGS-84 a coordinate cartesiane ECEF

$(\lambda, \Phi, h) \rightarrow (x, y, z)$



sezione equatoriale della Terra



sezione verticale della Terra in corrispondenza di un generico asse equatoriale w

a = 6,378,137 m — **raggio equatoriale medio della Terra**

b = 6,356,752.3142 m — **asse minore dell'ellissoide terrestre**

eccentricità dell'ellissoide

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

λ	longitudine
Φ	latitudine geodetica
Ξ	latitudine geocentrica
h	quota sopra l'ellissoide

Trasformazione da coordinate geodetiche WGS-84 a coordinate cartesiane ECEF

$(\lambda, \Phi, h) \rightarrow (x, y, z)$

$$N(\Phi) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \Phi}}$$

distanza tra la superficie dell'ellissoide e l'asse di rotazione z calcolata lungo la verticale locale

$$\rho(\Phi) = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{\left(1 - e^2 \sin^2 \Phi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

curvatura locale dell'ellisse (nel piano verticale)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{ECEF} = \begin{pmatrix} \left(N(\Phi) + h\right) \cos \lambda \cos \Phi \\ \left(N(\Phi) + h\right) \sin \lambda \cos \Phi \\ \left(N(\Phi)(1 - e^2) + h\right) \sin \Phi \end{pmatrix}$$

$$\cos \Xi = \frac{N(\Phi) + h}{\|\mathbf{P}\|} \cos \Phi$$

Relazione tra latitudine geocentrica e geodetica

Transformazione da coordinate cartesiane ECEF a coordinate geodetiche WGS-84 (longitudine, latitudine, quota) (x, y, z) → (λ, Φ, h)

La soluzione si calcola mediante il seguente procedimento iterativo

1 - Inizializzazione :

$$\varepsilon = 0.001 \quad [m]$$

$$\hat{h} = 0$$

$$N(\Phi) = \mathrm{a}$$

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2 – Iterazione :

$$\sin(\Phi) = \frac{z}{N(\Phi)(1 - \mathrm{e}^2) + \hat{h}}$$

$$\Phi = \arctan\left(\frac{\left[z + \mathrm{e}^2 N(\Phi)\sin(\Phi)\right]}{p}\right)$$

$$N(\Phi) = \frac{\mathrm{a}}{\sqrt{1 - \mathrm{e}^2 \sin^2(\Phi)}}$$

$$h = \frac{p}{\cos(\Phi)} - N(\Phi)$$

$\Rightarrow$

If

$$h - \hat{h} > \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \hat{h} = h$$

go to 2

$$\lambda = \arctan 2(y, x)$$

3 - fine