

---

# Capitolo 7

---

## I TEOREMI FONDAMENTALI

### 7.1 Il teorema di Poynting

Il vettore

$$\mathbf{s} = \mathbf{e} \times \mathbf{h} \quad (7.1)$$

si dice **vettore di Poynting**. La sua divergenza vale:

$$\nabla \cdot \mathbf{s} = \mathbf{h} \cdot \nabla \times \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{h}$$

Utilizzando le equazioni di Maxwell si arriva a scrivere:

$$\nabla \cdot \mathbf{s} + \left( \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right) + \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_i = 0 \quad (7.2)$$

dove  $\mathbf{j}_i$  rappresenta la densità di corrente impressa e  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}$  e quella di conduzione. Se  $V$  è il volume delimitato dalla superficie chiusa  $S$  nel quale vogliamo considerare il campo, si sa che:

$$-\iiint_V \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_i \, dV$$

rappresenta la potenza istantanea relativa alle forze esterne che sostengono il campo in  $V$ . La integrazione sul volume  $V$  fa dunque ritenere di potere giungere ad un

bilancio di potenza tra ciò che è fornito al campo elettromagnetico e la sua distribuzione. Utilizzando, laddove compare  $\mathbf{s}$ , il teorema della divergenza, si ha:

$$-\iiint_V \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} \, dV = \iint_S \mathbf{s} \cdot \mathbf{i}_n \, dS + \iiint_V \left( \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right) dV + \iiint_V \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} \, dV$$

Considerando il volume  $V$  fisso, per un mezzo caratterizzato da costanti  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  costanti, e ponendo  $e = |\mathbf{e}|$  ed  $h = |\mathbf{h}|$  si ha:

$$-\iiint_V \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} \, dV = \iint_S \mathbf{s} \cdot \mathbf{i}_n \, dS + \frac{d}{dt} \iiint_V \frac{1}{2} (\varepsilon e^2 + \mu h^2) dV + \iiint_V \sigma e^2 \, dV \quad (7.3)$$

Nel caso di mezzi conduttori la quantità  $\sigma e^2$  è facilmente riconoscibile come una densità di potenza (per unità di volume) dissipata per effetto Joule. Nel caso elettrostatico,  $\varepsilon e^2/2$  e  $\mu h^2/2$  sono noti rispettivamente come densità di energia elettrostatica e magnetostatica. Si può dunque postulare che la grandezza scalare

$$w = \frac{1}{2} (\varepsilon e^2 + \mu h^2) \quad (7.4)$$

che è funzione del tempo nel caso dinamico, rappresenti la **densità di energia accumulata dal campo elettromagnetico**. Nell'equazione precedente (7.3) (detta **teorema di Poynting**), le forze esterne devono dunque fornire innanzitutto la potenza per sostenere la dissipazione joule e l'incremento di accumulo di energia elettromagnetica (c'è la derivata nel tempo). E' ora chiara l'interpretazione anche dell'ultimo termine: si tratta della potenza che esce attraverso la superficie  $S$ , diminuendo così l'accumulo. Si noti peraltro che mentre il vettore di Poynting  $\mathbf{s}$  ha effettivamente le dimensioni di densità di flusso di potenza ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) la sua interpretazione fisica va collegata con l'integrazione su una superficie chiusa  $S$ .

Peraltro resta valida anche la relazione differenziale (teorema di Poynting differenziale), come equazione di conservazione. Integrando in un tempo  $\Delta t$  oltre che in un volume  $V$  si hanno relazioni di tipo energetico.

Nel seguito per  $\mathbf{s}$  si potrà trovare la notazione **densità di flusso di potenza**, ma si deve tenere presente la precisazione sopra fatta.

---

L'estensione del teorema di Poynting a sorgenti di tipo elettrico e magnetico è immediata:

$$-\iiint_V \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{j}_{mi} \cdot \mathbf{h} \, dV = \iint_S \mathbf{s} \cdot \mathbf{i}_n \, dS + \frac{d}{dt} \iiint_V \frac{1}{2} (\varepsilon e^2 + \mu h^2) dV + \iiint_V \sigma e^2 \, dV \quad (7.5)$$

La (7.5) rappresenta un bilancio energetico, la cui interpretazione fisica può essere data nei termini seguenti:

- a - se non esistono termini impressi,  $\mathbf{j}_i$  o  $\mathbf{j}_{mi}$ , ed il volume  $V$  è interamente occupato da materiale conduttore, gli unici termini non nulli sono quelli relativi al vettore di Poynting ed alla dissipazione Joule. Deve quindi sussistere un bilanciamento reciproco fra tali contributi energetici; in particolare, poichè il calore dissipato per effetto Joule è uscente dal volume  $V$ , il contributo legato al vettore di Poynting deve essere entrante in  $V$  dall'esterno. Avendo esclusa la presenza di ogni altro tipo di apporto energetico, esso può essere solo di tipo elettromagnetico e dunque il flusso del vettore di Poynting rappresenta la potenza elettromagnetica scambiata tra l'interno e l'esterno della regione considerata.
- b - se non esistono termini impressi,  $\mathbf{j}_i$  o  $\mathbf{j}_{mi}$ , ed il volume  $V$  è interamente occupato da materiale dielettrico, gli unici termini non nulli sono quelli relativi al vettore di Poynting ed alla energia elettromagnetica. Poichè supponiamo l'assenza di scambi termici con l'esterno, anche in questo caso i due contributi energetici devono bilanciarsi; pertanto l'accumulo o la dissipazione di energia elettromagnetica immagazzinata nel volume  $V$  può essere spiegata unicamente da uno scambio di energia elettromagnetica con l'esterno, legata nuovamente al vettore di Poynting; il flusso di tale vettore può quindi venire interpretato come potenza elettromagnetica entrante oppure uscente dalla regione considerata.

Entrambe le precedenti considerazioni illustrano che la potenza elettromagnetica scambiata con l'esterno del volume  $V$  assume la forma di un flusso attraverso la superficie chiusa che lo racchiude: risulta quindi intuitivo associare un trasferimento di energia elettromagnetica a tale flusso e di conseguenza una densità di potenza trasportata al vettore di Poynting. Pertanto nel seguito si potrà trovare per  $\mathbf{s}$  la notazione **densità di flusso di potenza** e si parlerà di potenza attraverso una generica superficie  $S$  come flusso del vettore di Poynting attraverso di essa; va però tenuto ben presente che si tratta solamente di una definizione intuitiva (peraltro non in contrasto con alcun dato sperimentale) e che la esatta interpretazione fisica deve essere riferita a superfici chiuse.

Peraltro resta valida anche la relazione differenziale (**teorema di Poynting differenziale**):

$$\nabla \cdot \mathbf{s} + \left( \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right) + \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_i - \mathbf{j}_{mi} \cdot \mathbf{h} \quad (7.6)$$

che ha il significato di equazione di conservazione locale dell'energia: l'energia fornita dalle sorgenti (integrando in un tempo  $\Delta t$  oltre che in un volume  $V$ ) è uguale

alla somma di tre termini: il terzo rappresenta l'energia dissipata nel volume; il secondo, la variazione dell'energia immagazzinata nel volume; il primo, infine, l'energia trasmessa attraverso la superficie  $S$ .

D'altra parte, se si assume che siano nulli sia il termine relativo alle correnti impresse, sia quello relativo alla dissipazione Joule (in pratica, nè energia chimica o meccanica viene trasformata in energia elettromagnetica (correnti impresse), nè energia elettromagnetica viene trasformata in meccanica (calore dovuto alle dissipazione Joule)), la (7.6) assume la stessa forma delle ben note equazioni di continuità della corrente, in cui il vettore di Poynting ha preso il posto della corrente, mentre l'energia elettromagnetica quello della carica. Ciò corrisponde bene alla interpretazione fisica che si è dato dei due termini energetici: il secondo ci dice quale è la distribuzione spaziale dell'energia del campo, cioè la sua localizzazione; il vettore di Poynting invece descrive il movimento di tale energia, il suo aspetto dinamico.

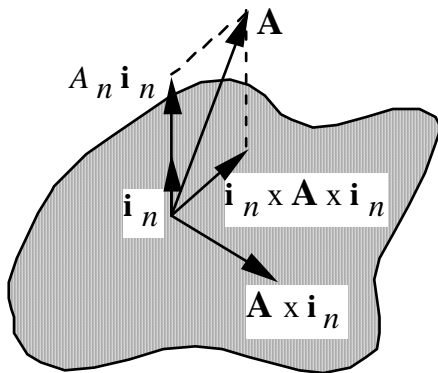


Figura 7.1

## 7.2 Teorema di unicità in una regione limitata: dominio del tempo

Si consideri un volume  $V$ , limitato da una superficie  $S$  e si supponga di conoscere in  $V$  i valori di  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$ . Dalle equazioni di Maxwell, è immediato derivare la densità  $\mathbf{j}_i$  che determina in  $V$  tale campo. Normalmente si deve però risolvere il problema

inverso: è noto  $\mathbf{j}_i$  da un certo istante in poi (da  $t=0$ ) e si vuole determinare univocamente  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  all'interno di  $S$ . Perché il problema matematico sia definito e la soluzione unica è necessario specificare le seguenti condizioni ai limiti per le soluzioni  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$ . Esse sono:

- i valori in  $t=0$  di  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$  in tutto  $V$  (**condizioni iniziali**);
- i valori, su tutti i punti di  $S$ , per  $t>0$  del vettore (**condizioni al contorno**):

$$\mathbf{e}_t = \mathbf{i}_n \times \mathbf{e} \times \mathbf{i}_n \text{ oppure } \mathbf{h}_t = \mathbf{i}_n \times \mathbf{h} \times \mathbf{i}_n.$$

( $\mathbf{i}_n$  è il versore normale ad  $S$ ). I vettori  $\mathbf{e}_t$  ed  $\mathbf{h}_t$  sono i vettori tangenti di  $\mathbf{e}$  ed  $\mathbf{h}$ , come è possibile evincere dalla figura 7.1.

La dimostrazione procede per assurdo: siano  $\mathbf{e}'$ ,  $\mathbf{h}'$  ed  $\mathbf{e}''$ ,  $\mathbf{h}''$  campi soddisfacenti alle equazioni di Maxwell per lo stesso  $\mathbf{j}_i$  e soddisfacenti entrambi alle stesse condizioni a) e b). Si consideri il campo differenza:  $\mathbf{e} = \mathbf{e}' - \mathbf{e}''$ ,  $\mathbf{h} = \mathbf{h}' - \mathbf{h}''$ . Scrivendo le equazioni di Maxwell per i due campi elettromagnetici ed effettuando la differenza equazione per equazione, si verifica direttamente che:

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\mu \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{h} = +\varepsilon \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \sigma \mathbf{e}$$

cioè  $\mathbf{e}$  ed  $\mathbf{h}$  sono una soluzione delle equazioni di Maxwell omogenee. Applicando a tale soluzione il teorema di Poynting con  $\mathbf{j}_i = 0$ , si ha:

$$0 = \iint_S \mathbf{s} \cdot \mathbf{i}_n \, dS + \frac{d}{dt} \iiint_V \frac{1}{2} (\varepsilon e^2 + \mu h^2) \, dV + \iiint_V \sigma e^2 \, dV$$

Risulta poi:

$$\iint_S \mathbf{s} \cdot \mathbf{i}_n \, dS = \iint_S (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{i}_n \, dS = 0$$

Infatti, posto:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_t + e_n \mathbf{i}_n \qquad \mathbf{h} = \mathbf{h}_t + h_n \mathbf{i}_n$$

si ha:

$$(\mathbf{e} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{i}_n = (\mathbf{e}_t + e_n \mathbf{i}_n) \times (\mathbf{h}_t + h_n \mathbf{i}_n) \cdot \mathbf{i}_n = (\mathbf{e}_t \times \mathbf{h}_t) \cdot \mathbf{i}_n$$

e per la b) o  $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}'_t - \mathbf{e}''_t$  o  $\mathbf{h}_t = \mathbf{h}'_t - \mathbf{h}''_t$  sono nulli su tutti i punti di  $S$ . Si ha pertanto:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \frac{1}{2} (\varepsilon e^2 + \mu h^2) \, dV = - \iiint_V \sigma e^2 \, dV$$

Integrando quest'ultima da  $t = 0$  a  $t$  e tenendo conto della condizione a), si ottiene:

$$\iiint_V \frac{1}{2} (\varepsilon e^2 + \mu h^2) \, dV = - \int_0^t \iiint_V \sigma e^2 \, dV \, dt$$

con l'integrale a primo membro valutato nell'istante  $t$ . Il primo membro è positivo o nullo, il secondo è negativo o nullo, quindi l'eguaglianza è possibile solo nel caso in cui siano entrambi nulli, il che implica:

$$\mathbf{e} = \mathbf{h} = 0$$

Ciò dimostra che in effetti è  $\mathbf{e}' = \mathbf{e}''$  e  $\mathbf{h}' = \mathbf{h}''$ . E' anche dimostrato che se si divide  $S$  in due parti  $S_1$  e  $S_2$  in modo che  $S_1 + S_2$  sia eguale ad  $S$ , il teorema vale anche assegnando  $\mathbf{e}_t$  su  $S_1$  e  $\mathbf{h}_t$  su  $S_2$ .

### 7.3 Teorema di Poynting per i vettori complessi

Sia il teorema di Poynting che il teorema di unicità possono essere dimostrati per i fasori, a partire dalla:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (7.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = +j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J} + \mathbf{J}_i \quad (7.8)$$

essendo:

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \right\}$$

e simili per  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{J}$  ecc...Definiamo il **vettore complesso di Poynting** come:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \quad (7.9)$$

La sua divergenza vale:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}^*}{2}$$

Moltiplicando scalarmente la (7.7) per  $\mathbf{H}^*$  e la coniugata della (7.8) per  $\mathbf{E}$ , sottraendo membro a membro, integrando sul volume  $V$ , ed applicando il teorema della divergenza, si ha:

$$\iint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{i}_n dS + j\omega \iiint_V \left( \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*}{2} \right) dV + \iiint_V \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^*}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* dV = - \iiint_V \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i^*}{2} dV \quad (7.10)$$

Per un mezzo caratterizzato da costanti  $\mu$ ,  $\varepsilon$  e  $\sigma$  costanti a tratti, ponendo  $H^2 = |\mathbf{H}|^2 = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*$  e  $E^2 = |\mathbf{E}|^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$  si ha:

$$\iint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{i}_n \, dS + j\omega \iiint_V \left( \frac{\mu H^2 - \varepsilon E^2}{2} \right) dV + \iiint_V \frac{\sigma E^2}{2} dV = - \iiint_V \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i^*}{2} dV \quad (7.11)$$

La (7.11) esprime il teorema di Poynting per i vettori complessi; essa può porsi nella forma seguente, che meglio si presta all'interpretazione dei termini che vi compaiono:

$$\iint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{i}_n \, dS + 2j\omega \iiint_V \frac{\mu H^2 - \varepsilon E^2}{4} dV + \iiint_V \frac{\sigma E^2}{2} dV = - \iiint_V \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i^*}{2} dV \quad (7.12)$$

Al secondo membro riconosciamo una potenza complessa  $P_C$  che compete alle sorgenti impresse di tipo elettrico, come visto nella (5.25):

$$P_C = P + jQ = - \iiint_V \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i^*}{2} dV \quad (7.13)$$

Nel caso siano presenti sorgenti elettriche e magnetiche, l'espressione del teorema di Poynting assume la seguente forma:

$$\iint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{i}_n \, dS + 2j\omega \iiint_V \frac{\mu H^2 - \varepsilon E^2}{4} dV + \iiint_V \frac{\sigma E^2}{2} dV = - \iiint_V \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i^* + \mathbf{J}_{mi} \cdot \mathbf{H}^*}{2} dV \quad (7.14)$$

Al secondo membro riconosciamo una potenza complessa  $P_C$  che compete alle sorgenti impresse di tipo elettrico e magnetico, come visto nella (5.28):

$$P_C = P + jQ = - \iiint_V \left\{ \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i^*}{2} + \frac{\mathbf{J}_{mi} \cdot \mathbf{H}^*}{2} \right\} dV \quad (7.15)$$

Al flusso del vettore complesso di Poynting attraverso la superficie  $S$  si dà il nome di potenza complessa  $P_{CS}$  attraversante la superficie  $S$  stessa:

$$P_{CS} = P_S + jQ_S = - \iint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{i}_n \, dS = - \iint_S \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \cdot \mathbf{i}_n \, dS \quad (7.16)$$

Possiamo riconoscere a  $P_S = \text{Re}\{P_{CS}\}$  il significato fisico di potenza attiva media che fluisce attraverso la superficie  $S$ :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left( \iint_S \mathbf{e} \times \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_n dS \right) dt = \operatorname{Re} \{P_{CS}\} = P_S \quad (7.17)$$

Indicata con  $\mathbf{T}$  l'energia magnetica immagazzinata all'istante  $t$  nel volume  $V$  e con  $\mathbf{U}$  l'energia elettrica immagazzinata al medesimo istante nello stesso volume:

$$\mathbf{T}(t) = \iiint_V \frac{\mu \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}}{2} dV \quad \mathbf{U}(t) = \iiint_V \frac{\varepsilon \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}}{2} dV \quad (7.18)$$

Calcolando i valori medio  $\mathbf{T}_m$  e  $\mathbf{U}_m$  di tali grandezze su un periodo  $T$  si ha:

$$\mathbf{T}_m(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{T}(t) dt = \iiint_V \frac{\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*}{4} dV \quad (7.19)$$

$$\mathbf{U}_m(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{U}(t) dt = \iiint_V \frac{\varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{4} dV \quad (7.20)$$

Infine, indicata con  $P_j$  la potenza attiva dissipata in calore nel volume  $V$ , si ha:

$$P_j(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \iiint_V \sigma \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} dV \right) dt = \iiint_V \frac{\sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{2} dV \quad (7.21)$$

Tenuto conto delle relazioni precedenti si ha:

$$P + jQ = P_S + jQ_S + 2j\omega(\mathbf{T}_m - \mathbf{U}_m) + P_j \quad (7.22)$$

che si scinde nelle due eguaglianze:

$$P = P_S + P_j \quad (7.23)$$

$$Q = Q_S + 2\omega(\mathbf{T}_m - \mathbf{U}_m) \quad (7.24)$$

Dalla prima equazione si deduce che la potenza attiva  $P$  erogata dalle correnti impresse entro  $V$  è uguale alla somma della potenza attiva  $P_S$  uscente da  $S$  e dalla potenza attiva  $P_j$  dissipata in calore nel volume  $V$ . In questo corso noi esamineremo solamente mezzi in cui la potenza dissipata  $P_j$  risulta positiva o nulla, qualunque sia il campo. Essi vengono detti mezzi "passivi".



Se la potenza dissipata è nulla il mezzo viene detto "senza perdite"; altrimenti è detto "dissipativo".

Anche per quanto riguarda la potenza dissipata per effetto Joule si può introdurre un termine legato alle componenti magnetiche, analogo a quello già presente del tipo  $\sigma E^2/2$  dovuto a componenti di tipo elettrico; osservando infatti che tale termine è pari a  $\omega \epsilon_0 \epsilon'' E^2/2$ , si può scrivere per tale dissipazione magnetica l'espressione  $\omega \mu_0 \mu'' H^2/2$ . Dalla (5.34)-(5.35), si nota che, in un mezzo senza perdite, la costante dielettrica  $\epsilon_c$  e quella magnetica  $\mu_c$ , in generale complesse, devono essere reali. Ciò è confermato anche dalla seguente espressione di  $P_J$ , valida in generale:

$$P_J = \omega \frac{\epsilon_0 \epsilon'' |\mathbf{E}|^2}{2} + \omega \frac{\mu_0 \mu'' |\mathbf{H}|^2}{2} \quad (7.25)$$

Il caso più rilevante in cui risulta opportuno considerare tale termine è quello relativo ai materiali magnetici; poichè peraltro essi non saranno esaminati in dettaglio all'interno di questo corso, tale precisazione risulta essenziale soprattutto ai fini della completezza e per non alterare la simmetria esistente fra componente elettrica e componente magnetica del campo.

Dalla (7.24) si ha che la potenza reattiva  $Q$  è la somma della potenza reattiva attraversante la superficie  $S$ ,  $Q_S$ , e della differenza fra i valori medi in un periodo dell'energia magnetica e dell'energia elettrica immagazzinante nel volume  $V$ , moltiplicata per  $2\omega$ . La potenza reattiva, divisa per  $2\omega$ , rappresenta pertanto un'energia di scambio tra sorgenti ed ambiente esterno: questa energia è successivamente immagazzinata sotto forma prevalentemente magnetica o elettrica. Se nel periodo considerato i valori medi delle due forme di energie non sono uguali, devono essere i generatori ad assicurare l'equilibrio, fornendo energia all'ambiente esterno durante una parte del periodo, e ricevendola nella restante parte.

Un insieme di sorgenti e/o di utilizzatori si dice in risonanza quando la potenza reattiva totale è nulla cioè quando è:

$$Q = 0 \quad (7.26)$$

Se tutte le sorgenti sono al finito, si dimostra che  $Q_S$  tende a zero al tendere all'infinito dei punti di  $S$ , cioè per  $V$  che tende a  $V_\infty$ ; al limite la condizione di risonanza diviene quindi,

$$\mathbf{T}_m = \mathbf{U}_m \quad (7.27)$$

## 7.4 Teorema di unicità per il campo E.M. complesso

La differenza fondamentale, rispetto al caso nel dominio del tempo considerato nel paragrafo 7.2, consiste nella presenza delle sole condizioni al contorno e, quindi, nell'assenza di condizioni iniziali (ad esempio, all'istante  $t=0$ ); infatti le soluzioni per i campi sinusoidali corrispondono a campi **a regime** e cioè esistenti (e variabili nel tempo con legge sinusoidale) da tempo infinito.

La determinazione del campo elettromagnetico in una certa regione  $V$  dello spazio è ovviamente subordinata alla conoscenza del mezzo che occupa tale porzione di spazio ed alla corretta individuazione delle sorgenti impresse presenti al suo interno. Tuttavia, tali informazioni non risultano sufficienti; infatti ciò che accade all'interno del volume dipenderà altresì dal mezzo e dalle eventuali sorgenti collocate all'esterno della regione considerata. Si tratta quindi di definire quali sono le ulteriori informazioni che, in qualche modo, consentano di tenere conto del mondo circostante. Esse consistono nell'assegnare le **condizioni al contorno**, cioè nel definire quali sono i valori assunti sulla superficie  $S$ , che delimita  $V$ , da certe componenti del campo. Potrebbe però accadere che esse siano sovrabbondanti, cioè impongano troppi vincoli al campo e perciò inficino l'esistenza stessa di una valida soluzione. Si è quindi soliti definire come **problema ben posto** quello nel quale vengano assegnate le condizioni al contorno che sono strettamente necessarie per individuare la soluzione.

Le condizioni ai limiti che individuano univocamente (come deve essere se si desidera che i risultati della teoria coincidano con quelli sperimentali) la soluzione corrispondente ad una data  $\mathbf{J}_i$  (e/o  $\mathbf{J}_{mi}$ ) nei punti di una regione limitata  $V$  sono, nell'ipotesi  $\sigma \neq 0$ , soltanto quelle al contorno. Infatti, si supponga che  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{H}'$  ed  $\mathbf{E}''$ ,  $\mathbf{H}''$  siano due soluzioni delle equazioni di Maxwell complesse scritte con il dato  $\mathbf{J}_i$  (e/o  $\mathbf{J}_{mi}$ ), tali che sia:

$$\mathbf{E}'_t = \mathbf{E}''_t \quad \text{o} \quad \mathbf{H}'_t = \mathbf{H}''_t, \quad (7.28)$$

nei punti della superficie  $S$  delimitante  $V$  (il pedice  $t$  sta ad indicare che si tratta del componente tangente ad  $S$ ). Il campo elettromagnetico differenziale, di intensità:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}'' - \mathbf{E}' \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}'' - \mathbf{H}' \quad (7.29)$$

è una soluzione delle equazioni di Maxwell omogenee ( $\mathbf{J}_i = \mathbf{J}_{mi} = 0$ ) a cui sono associate condizioni al contorno omogenee; ad essa si può perciò applicare il teorema di Poynting. Dalla relazione così scritta si ha allora:

$$\operatorname{Re} \left\{ \iint_S \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \cdot \mathbf{i}_n dS \right\} + \iiint_V \frac{\sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{2} dV = 0$$

$$\operatorname{Im} \left\{ \iint_S \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \cdot \mathbf{i}_n dS \right\} + 2\omega \iiint_V \frac{\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* - \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{4} dV = 0$$

Dato che sul contorno il componente tangente di  $\mathbf{E}$  o di  $\mathbf{H}$  deve risultare identicamente nullo si ha:

$$\iint_S \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \cdot \mathbf{i}_n dS = \iint_S \frac{\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*}{2} \cdot \mathbf{i}_n dS = 0$$

e di conseguenza:

$$\iiint_V \frac{\sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{2} dV = 0 \quad (7.30)$$

$$\iiint_V \frac{\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* - \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{4} dV = 0 \quad (7.31)$$

Nell'ipotesi  $\sigma \neq 0$ , dalla (7.30) si deduce che in  $V$  deve essere  $\mathbf{E} = 0$ ; di conseguenza, dalla (7.31) segue anche che deve essere  $\mathbf{H} = 0$ . Ciò mostra che in tal caso entro  $S$  vi è una ed una sola soluzione che soddisfa a date condizioni al contorno (cioè assume prefissati valori di  $\mathbf{E}_t$  o di  $\mathbf{H}_t$  nei punti di  $S$ ). È importante sottolineare che l'ipotesi di mezzo con perdite ( $\sigma \neq 0$ ) in  $V$ , è essenziale; infatti se è  $\sigma = 0$  la (7.30) è identicamente soddisfatta qualunque sia  $\mathbf{E}$  e la (7.31) si limita ad imporre l'uguaglianza dell'energia elettrica e magnetica mediamente immagazzinate in un periodo entro  $V$ .

Soluzioni di questo tipo sono possibili all'interno di domini chiusi, che prendono allora il nome di cavità risonanti; in particolare, sul contorno possono esistere condizioni di campo elettrico tangente nullo (**conduttore elettrico perfetto**), oppure di campo magnetico tangente nullo (**conduttore magnetico perfetto**). Una peculiarità di tali soluzioni, su cui si tornerà nel seguito, è che esse possono esistere

solo per particolari valori di  $\omega$ , che prendono il nome di pulsazioni di risonanza proprie della cavità.

Nel seguito, per poter ritenere valido il teorema di unicità si supporrà sempre  $\sigma \neq 0$  e quando si parlerà di  $\sigma = 0$  si intenderà in realtà  $\sigma$  piccolo quanto si voglia, ma mai nullo.

Le condizioni al contorno possono assumere forme diverse in parti diverse del contorno; il fatto essenziale è che esse siano una partizione dell'intera superficie  $S$  che delimita  $V$ . Le condizioni al contorno possono tuttavia venire espresse nella loro forma più generale nel modo seguente:

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{E} - Z_S \mathbf{H}_t = \mathbf{V} \quad (7.32)$$

$$\mathbf{H} \times \mathbf{i}_n - Y_S \mathbf{E}_t = \mathbf{W} \quad (7.33)$$

dove  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  sono vettori assegnati, tangenti alla superficie  $S$  considerata,  $\mathbf{E}_t$  e  $\mathbf{H}_t$  rappresentano i componenti tangenziali del campo su di  $S$ ,  $\mathbf{i}_n$  è la normale uscente da  $S$ ,  $Z_S$  e  $Y_S$  sono funzioni complesse a parte reale positiva. I casi particolari più comuni sono i seguenti:

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{E} = \mathbf{V} \quad \text{Assegnazione del campo elettrico tangenziale} \quad (7.34)$$

$$\mathbf{H} \times \mathbf{i}_n = \mathbf{W} \quad \text{Assegnazione del campo magnetico tangenziale} \quad (7.35)$$

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{Condizione di parete elettrica} \quad (7.36)$$

$$\mathbf{H} \times \mathbf{i}_n = \mathbf{0} \quad \text{Condizione di parete magnetica} \quad (7.37)$$

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{E} = Z_S \mathbf{H}_t \quad \text{Condizione d'impedenza (} Z_S \text{ è detta impedenza della parete)} \quad (7.38)$$

$$\mathbf{H} \times \mathbf{i}_n = Y_S \mathbf{E}_t \quad \text{Condizione d'ammettenza (} Y_S \text{ è detta ammettenza della parete)} \quad (7.39)$$

Qualora  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  siano nulli, le condizioni al contorno vengono dette **omogenee**, **inomogenee** in caso contrario. Esempi di condizioni omogenee sono la condizione di

parete elettrica (magnetica) e la condizione di impedenza (ammettenza), che esamineremo ora più in dettaglio.

Infatti, un caso particolarmente importante è quello in cui il volume è limitato da un conduttore elettrico perfetto, tale cioè che in esso  $\sigma \rightarrow \infty$ . Nell'interno di un tale materiale  $\mathbf{E} = 0$ , altrimenti la densità di corrente indotta dal campo sarebbe infinita. Alla superficie di separazione  $S_2$  tra il mezzo che riempie il volume  $V$  e il conduttore perfetto, il componente tangenziale del campo elettrico dev'essere continuo. La condizione al contorno per un tale conduttore è dunque la (7.36).

Il duale del conduttore elettrico perfetto è il conduttore magnetico perfetto; per esso la condizione al contorno diventa in analogia la (7.37).

Tornando alla (7.36), essa è a volte assunta come definizione di conduttore elettrico perfetto. In esso, per campi variabili nel tempo, anche  $\mathbf{H}$  è nullo e non solo  $\mathbf{E}$ . Ma se si ponesse anche  $\mathbf{i}_n \times \mathbf{H} = 0$  su  $S_2$ , all'interno di  $V$  tutto il campo elettromagnetico sarebbe nullo (vedi teorema di unicità). Pertanto il componente tangente di  $\mathbf{H}$  è discontinuo e ciò è giustificato dalla presenza di una densità di corrente superficiale, come evidenziato dalle condizioni di continuità.

Una condizione al contorno si definisce di tipo impedenza se viene specificata una combinazione lineare tra le componenti tangenziali del campo elettrico e magnetico sulla superficie stessa, omogenea se tale combinazione lineare è nulla, isotropa se il coefficiente della combinazione è scalare; queste sono le ipotesi che sono presenti nella (7.38) e (7.39). Queste condizioni contengono, come caso particolare, quelle di campo elettrico tangente nullo ( $Z_S = 0$ ) o magnetico tangente nullo ( $Y_S = 0$ ) sul contorno. La componente del vettore di Poynting secondo  $\mathbf{i}_n$  è data, nei due casi, da

$$S_n = Z_S |\mathbf{H} \times \mathbf{i}_n|^2 \qquad S_n = Y_S |\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}|^2$$

Se si vuole che la parte reale di  $S_n$  sia positiva (flusso di potenza attiva nel verso di  $\mathbf{i}_n$ ), devono essere positive le parti reali,  $R_S$  e  $G_S$ , della impedenza superficiale, definita come  $Z_S = R_S + jX_S$ , e dell'ammettenza superficiale,  $Y_S = G_S + jB_S$ .

Si è visto che per specificare il campo elettromagnetico è necessario assegnare il componente tangente del campo elettrico o di quello magnetico sulla superficie limitante il volume dove il campo viene calcolato. D'altra parte, se nell'interno del volume  $V$  sono presenti superfici di discontinuità spaziale per i parametri del mezzo, i componenti tangenti dei campi e le componenti normali delle induzioni devono essere ivi continue. In quest'ultimo caso, basta imporre la continuità dei componenti tangenti dei campi perché sia automaticamente assicurata la continuità delle componenti normali delle induzioni. Ciò dipende dal fatto che le equazioni di Maxwell alle divergenze sono conseguenza di quelle ai rotori, in assenza di densità di carica e corrente. Introdotto sulla superficie di discontinuità un sistema cartesiano

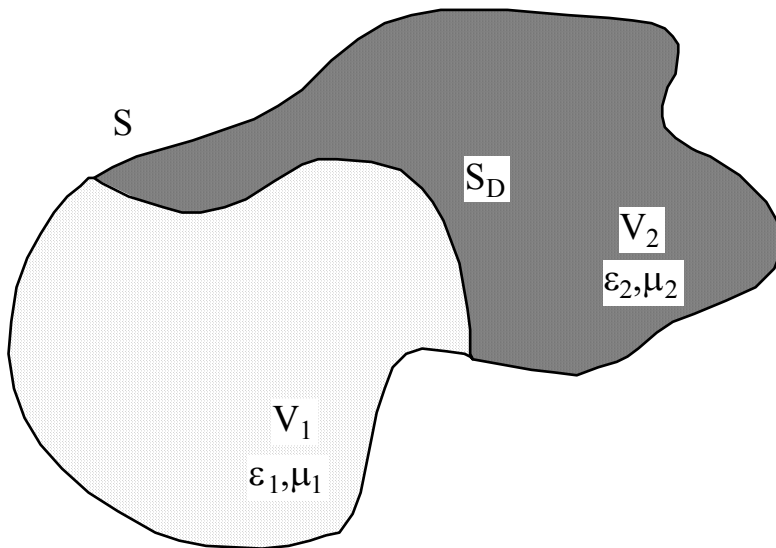


Figura 7.2

localmente ortogonale, con l'asse  $z$  parallelo alla normale, si può mostrare che le componenti secondo  $z$  delle induzioni sono esprimibili in funzione delle componenti tangenti dei campi (di conseguenza, l'assicurare la continuità di queste ultime implica la continuità delle prime).

Nulla di strano, poi, se sulle superfici di discontinuità si rende necessaria la continuità

dei componenti tangenti sia del campo elettrico sia di quello magnetico, mentre le condizioni al contorno richiedono solo la conoscenza del componente di uno qualunque dei due. Si tratta infatti di condizioni sostanzialmente diverse: quelle al contorno servono per determinare la soluzione delle equazioni di Maxwell, quelle di continuità per prolungare il campo da una regione all'altra.

Per trovare la soluzione del volume  $V$  si procede, in linea di principio, come segue: si risolvono le equazioni di Maxwell in ciascuna regione omogenea, rimanendo indeterminate le costanti di integrazione; successivamente si specificano queste ultime imponendo le condizioni al contorno su  $S$  e quelle di continuità (per le componenti tangenziali dei campi) sulle superfici di discontinuità eventualmente presenti in  $V$ .

Nella Figura 7.2 è mostrata la superficie  $S$  dove si impongono le condizioni al contorno, i due volumi  $V_1$  e  $V_2$  caratterizzati da diverse coppie di  $\varepsilon$ ,  $\mu$  e la superficie di discontinuità  $S_D$  dove le soluzioni ottenute separatamente per  $V_1$  e  $V_2$  vanno rese continue in accordo con le condizioni di continuità. Ciò vale anche se si risolvono equazioni derivate da Maxwell, come ad esempio quella di Helmholtz.

Se anziché una regione limitata  $V$ , si considera tutto lo spazio  $V_\infty$ , il campo elettromagnetico, associato con una data  $\mathbf{J}_i$  (e/o  $\mathbf{J}_{mi}$ ) situata al finito in un mezzo avente  $\sigma \neq 0$ , è unico se al posto delle condizioni al contorno si impongono le seguenti condizioni:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \mathbf{E} = 0 \quad (7.40)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \mathbf{H} = 0 \quad (7.41)$$

nelle quali si è indicata con  $r$  la distanza di un punto qualsivoglia  $P$  di  $V_\infty$  da un punto arbitrario  $O$ , al finito, scelto come origine. Si supponga infatti che esistano due campi  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{H}'$  ed  $\mathbf{E}''$ ,  $\mathbf{H}''$ , che soddisfino le equazioni di Maxwell scritte con lo stesso termine noto e tali che per entrambi valgano le (7.40), (7.41); il campo di differenza di intensità  $\mathbf{E}=\mathbf{E}'-\mathbf{E}''$ ,  $\mathbf{H}=\mathbf{H}'-\mathbf{H}''$  soddisfa esso pure alle (7.40), (7.41). Per il teorema di Poynting, tenuto presente che  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  sono una soluzione delle equazioni di Maxwell omogenee, si ha anche, per un  $V$  qualsivoglia:

$$\operatorname{Re} \left\{ \iint_S \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \cdot \mathbf{i}_n dS \right\} + \iiint_V \frac{\sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{2} dV = 0 \quad (7.42)$$

$$\operatorname{Im} \left\{ \iint_S \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \cdot \mathbf{i}_n dS \right\} + 2\omega \iiint_V \frac{\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* - \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{4} dV = 0 \quad (7.43)$$

Facendo tendere tutti i punti di  $S$  all'infinito,  $S \rightarrow \infty$  e quindi  $V$  a  $V_\infty$ , dalla (7.42) segue:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left\{ \iint_S \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \cdot \mathbf{i}_n dS \right\} + \lim_{V \rightarrow V_\infty} \iiint_V \frac{\sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{2} dV = 0$$

Peraltro, dato che il modo di tendere all'infinito dei punti di  $S$  è arbitrario, si può assumere la  $S$  stessa coincidente con la superficie di una sfera di raggio  $r$  e centro in  $O$ , cosicchè la equazione precedente può porsi nella forma:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left\{ \iint_{4\pi} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \cdot \mathbf{i}_r r^2 d\Omega \right\} + \lim_{V \rightarrow V_\infty} \iiint_V \frac{\sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*}{2} dV = 0 \quad (7.44)$$

Passando al limite, il primo termine tende a zero, mentre il secondo, se  $\sigma$  è diverso da zero ed  $\mathbf{E}$  è finito, tende all'infinito; poiché la (7.44) richiede l'annullarsi del secondo membro,  $\mathbf{E}$  dovrà risultare identicamente nullo, il che comporta anche  $\mathbf{H}$  identicamente nullo. Le condizioni di radiazione (7.40) e (7.41) valgono anche quando il mezzo non è omogeneo, purchè le disomogeneità e le sorgenti siano confinate in una regione finita.

N.B. - Nel caso delle equazioni di Maxwell nel dominio del tempo, a causa della velocità finita della propagazione delle onde elettromagnetiche, dal momento della accensione dei generatori (in un istante finito), fino ad un qualunque istante, l'energia e i campi sono confinati in una porzione limitata di spazio. All'infinito dunque (o meglio al tendere di  $V$  a  $V_\infty$ ), l'integrale di flusso del vettore di Poynting è certamente nullo per i campi differenza. Ciò assicura il soddisfacimento della nullità dei componenti tangenti e dunque l'unicità. Per il caso di vettori sinusoidali invece si è in

stato stazionario (l'istante iniziale è a  $t = -\infty$ ) e ciò richiede la condizione di regolarità all'infinito.

## 7.5 - Teorema di equivalenza

Grazie alle precisazioni sviluppate nel precedente paragrafo, siamo ora in grado di dimostrare un altro importante teorema, detto di **equivalenza o di Love**. Prima però di arrivare alla sua formulazione, è opportuno introdurre la nozione di lamine equivalenti: esse infatti risultano particolarmente utili per semplificare l'approccio ai problemi aventi condizioni al contorno non omogenee; in pratica tali problemi possono essere ricondotti all'analisi di problemi con condizioni al contorno omogenee, avendo cura però di sostituire i termini noti  $\mathbf{V}$  o  $\mathbf{W}$ , presenti nelle (7.32) e (7.33), con opportune sorgenti fittizie, poste a ridosso del contorno e costituite da **lamine** (o **densità superficiali**) di corrente magnetica o elettrica di densità pari proprio ai termini noti  $\mathbf{V}$  o  $\mathbf{W}$ , appena eliminati.

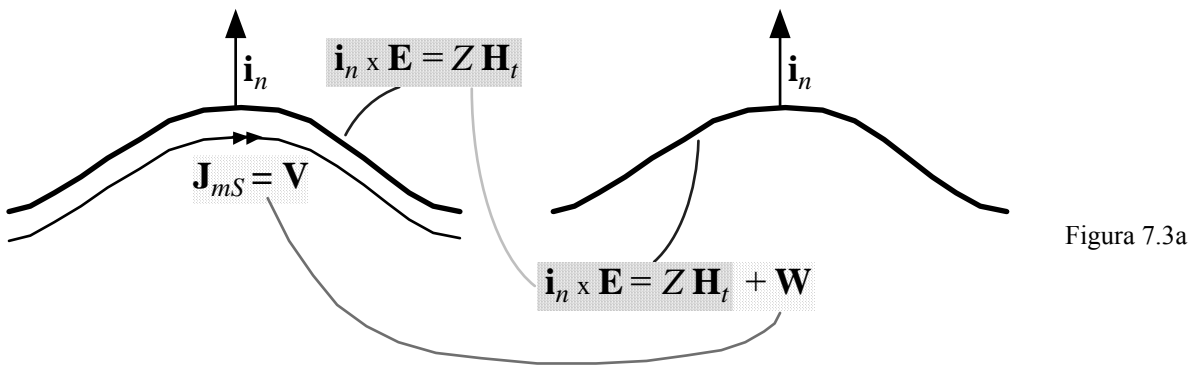


Figura 7.3a

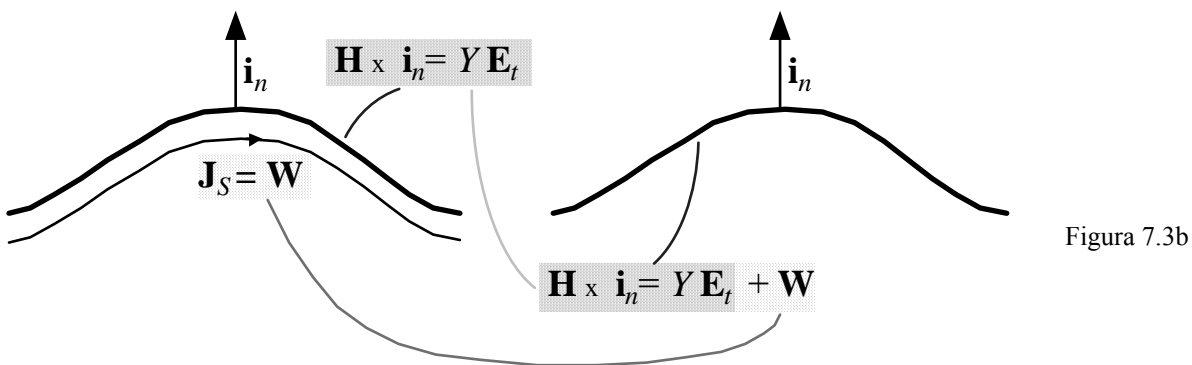


Figura 7.3b

La Figura 7.3a illustra il caso di una superficie su cui vale una condizione del tipo (7.32): la parte sinistra indica la situazione di condizione al contorno omogenea e sorgente fittizia fornita dalla lamina  $\mathbf{J}_{ms}$ , mentre la parte destra rappresenta la situazione di partenza con condizione al contorno non omogenea. Poiché una densità superficiale di tipo magnetico rende discontinuo il componente tangente del campo



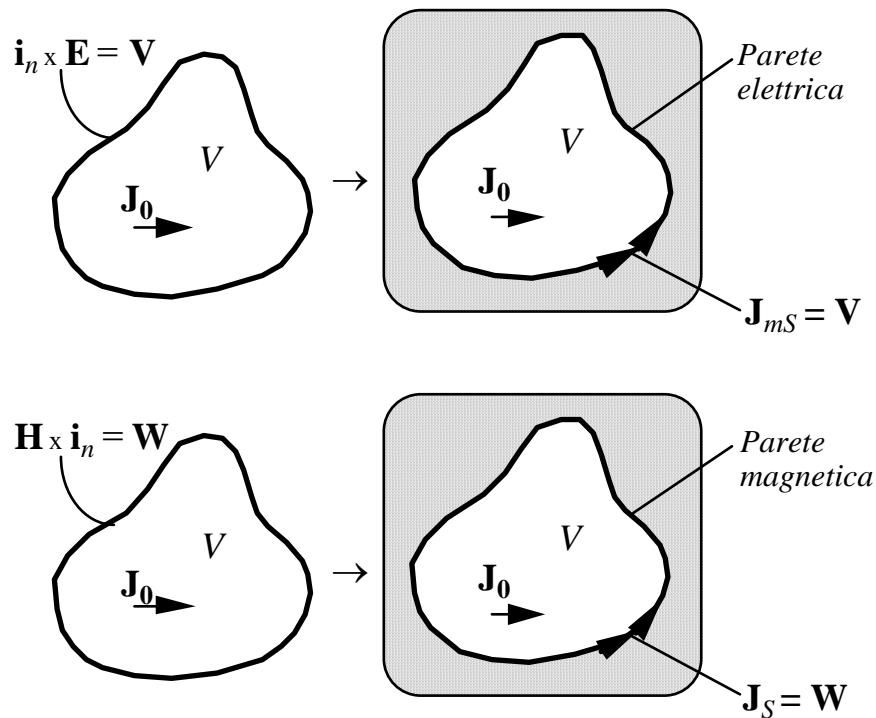


Figura 7.4

elettrico  $\mathbf{E}$ , come mostrato dalle condizioni di continuità (4.51), la situazione fittizia che si è venuta a costruire risulta del tutto equivalente a quella effettiva riportata nella parte destra. Infatti il componente tangente di  $\mathbf{E}$  (indicato dall'espressione  $\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}$ ) passa, per effetto della introduzione della lamina, dal valore  $Z_s \mathbf{H}_t$  al valore  $Z_s \mathbf{H}_t + \mathbf{V}$ , così come richiesto dalla originaria condizione al contorno.

La Figura 7.3b illustra la analoga trasformazione nel caso di una condizione del tipo (7.33).

Un caso particolarmente interessante di applicazione di tale procedimento è illustrato in Figura 7.4. Le condizioni al contorno in essa presentate suppongono un valore nullo per le impedenze ( $Z_s = 0$ ) o le ammettenze ( $Y_s = 0$ ) e perciò viene assegnato unicamente il valore del campo elettrico tangenziale  $\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}$  oppure del campo magnetico tangenziale  $\mathbf{H} \times \mathbf{i}_n$ . È immediato verificare che la presenza di una parete elettrica oppure di una parete magnetica associata alle opportune densità superficiali di corrente elettrica o magnetica equivalgono completamente alle originarie condizioni al contorno: abbiamo cioè introdotto delle sorgenti equivalenti.

Consideriamo ora la sorgente  $\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_{mi}$  interna a un volume  $V$  limitato da una superficie  $S$  (pura superficie geometrica, che ha l'unico scopo di separare il volume  $V$  dallo spazio esterno; vedi Figura 7.5, dove con  $\mathbf{J}$  si sono indicate tutte le sorgenti  $\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_{mi}$ ). La sorgente produce un campo  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  in tutto lo spazio; sia  $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$  il suo valore nei punti della superficie. Introduciamo a questo punto un altro campo  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ , definito in tutto lo spazio, tale che, in presenza di correnti impresse sulla superficie  $S$ , di densità:

$$\mathbf{J}_S = \mathbf{i}_n \times \mathbf{H}_S \qquad \mathbf{J}_{mS} = \mathbf{E}_S \times \mathbf{i}_n, \qquad (7.45)$$

e in assenza delle sorgenti originarie  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{J}_{mi}$  esso valga

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{H}_1 = 0 \quad \text{all' interno di } V;$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}; \mathbf{H}_1 = \mathbf{H} \quad \text{al di fuori di } V.$$

Si vuol sapere se tale campo è soluzione delle equazioni di Maxwell (se cioè è un campo elettromagnetico) e se può riguardarsi come prodotto dalle correnti superficiali (7.45).

All'esterno di  $V$  il campo  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$  coincide con  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , che certamente è soluzione delle equazioni di Maxwell. In  $V$  non vi sono sorgenti, e il campo nullo  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{H}_1 = 0$  è ancora una possibile soluzione delle equazioni di Maxwell. Attraversando la superficie  $S$ , il campo subisce una discontinuità, come dev'essere in presenza di distribuzioni superficiali di correnti elettriche e magnetiche, e l'ammontare della discontinuità è conforme alle condizioni stabilite;  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{H}_1$  è dunque una soluzione delle equazioni di Maxwell in presenza delle nuove sorgenti  $\mathbf{J}_S$ ,  $\mathbf{J}_{mS}$ . Per il teorema di unicità, tale soluzione è anche l'unica.

La conclusione è la seguente (**teorema di equivalenza**):

*Il campo elettromagnetico, all'esterno di una superficie chiusa  $S$ , è esprimibile in termini di sorgenti equivalenti  $\mathbf{J}_S$ ,  $\mathbf{J}_{mS}$ , che possono essere determinate a partire dalla conoscenza su essa delle componenti tangenziali dei campi.*

Questa è la formulazione elettromagnetica del principio di Huygens-Kirchhoff, che considera ciascun punto investito dal campo come nuova sorgente per la successiva produzione del campo stesso.

L'importanza del teorema di equivalenza risiede nel fatto che, in parecchie applicazioni, la distribuzione del campo prodotto dalle assegnate sorgenti su  $S$  può essere ragionevolmente approssimata con una scelta opportuna della superficie; dopodichè, le sorgenti equivalenti, e quindi i campi all'esterno di  $S$ , sono calcolabili e spesso in modo abbastanza semplice. Ne esiste anche una versione con campi nulli all'esterno: di ciò si discuterà più avanti.

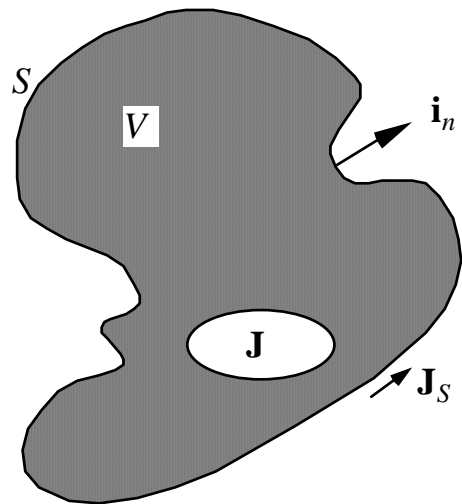


Figura 7.5

## 7.6 - Teorema di reciprocità

Un altro teorema importante è quello detto di reciprocità. Sia dato un mezzo, per semplicità isotropo, nel quale siano presenti due diverse sorgenti: la sorgente  $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_{m1}$  che produce il campo  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ , e la sorgente  $\mathbf{J}_2, \mathbf{J}_{m2}$ , che produce il campo  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ . Consideriamo la divergenza

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) = +\mathbf{H}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{H}_1$$

ed eliminando i rotori utilizzando le equazioni di Maxwell, risulta:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) = +(\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{J}_{m1}) - (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{J}_{m2}).$$

Integrando su un volume  $V$  limitato da una superficie  $S$  di normale uscente  $\mathbf{i}_n$ , si ha:

$$\begin{aligned} \iint_S (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{i}_n dS &= \\ &= \iiint_V (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{J}_{m1}) dV - \iiint_V (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{J}_{m2}) dV \end{aligned} \quad (7.46)$$

Questa è la formulazione generale del **teorema di reciprocità**. Le due particolarizzazioni più importanti si hanno in queste due situazioni:

- 1)  $V \rightarrow V_\infty$
- 2) dentro  $V$  si ha  $\mathbf{J}_i = \mathbf{J}_{mi} = 0$ .

Mentre il secondo caso, come si vedrà nel seguito, consente di stabilire delle relazioni cui devono soddisfare le matrici rappresentative di giunzioni passive, nel primo, grazie alle condizioni di regolarità all'infinito si ha:

$$\iiint_V (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{J}_{m1}) dV = \iiint_V (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{J}_{m2}) dV \quad (7.47)$$

Ciascuno degli integrali di volume prende anche il nome di **reazione** (Rumsey, 1954) dei campi sulle sorgenti; il teorema di reciprocità, nella formulazione data dalla (7.47), afferma in sostanza che **le reazioni dei campi sulle sorgenti sono uguali**. In generale le reazioni non rappresentano potenze assorbite poichè non c'è il coniugato. La relazione di potenza deriva nel caso di campi e correnti in fase. In questa situazione particolare: se nel primo termine  $\mathbf{J}_2$  è visto funzionare come utilizzatore, la reazione rappresenta la potenza assorbita dalla corrente impressa  $\mathbf{J}_2$  in tutta la zona dove è diversa da zero, in presenza del campo  $\mathbf{E}_1$  generato dalla sorgente  $\mathbf{J}_1$ , che

dunque opera come eccitatore. Analogamente per il secondo integrale. Poichè le correnti impresse possono schematizzare le antenne in trasmissione e ricezione, si dimostra la equivalenza della utilizzazione dell'una o dell'altra come ricevente e, rispettivamente, trasmittente.

## 7.7 - Sorgenti magnetiche e sorgenti elettriche

In natura non esistono nè cariche nè sorgenti magnetiche libere. Si è già detto però che la loro introduzione nel modello matematico delle equazioni di Maxwell può portare ad allargare il campo delle schematizzazioni fisiche possibili ed a semplificare la dimostrazione di alcuni teoremi. Restringendosi, al solito, al caso dei vettori sinusoidali e dei relativi fasori, si può arrivare a scrivere le equazioni di Maxwell nel seguente modo (vedi le (5.36)-(5.37)):

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mu_c \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{J}_{mi}(\mathbf{r}) \quad (7.48)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = +j\omega \varepsilon_c \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_i(\mathbf{r}) \quad (7.49)$$

Nella soluzione di questo problema, data la linearità delle equazioni stesse e dei coefficienti che vi compaiono, si possono risolvere separatamente i due casi:

- 1)  $\mathbf{J}_i \neq 0, \mathbf{J}_{mi} = 0$
- 2)  $\mathbf{J}_i = 0, \mathbf{J}_{mi} \neq 0$

Successivamente si può procedere alla somma dei due risultati. Il primo caso è quello già studiato. Il secondo è il cosiddetto caso duale.

Se si scrivono le (7.48) - (7.49) nel primo caso e poi si effettuano le sostituzioni:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E} & \mathbf{J}_{mi} \rightarrow \mathbf{J}_i & \mu_c \rightarrow \varepsilon_c \\ -\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H} & \mathbf{J}_i \rightarrow -\mathbf{J}_{mi} & \varepsilon_c \rightarrow \mu_c \end{array} \quad (7.50)$$

si riottengono relazioni identiche alle (7.48) - (7.49).

Le due relazioni possono ora essere interpretate, anche da un punto di vista dimensionale, come le relazioni imposte ad  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  dal mezzo  $\mu_c, \varepsilon_c$ , in presenza della sorgente  $\mathbf{J}_{mi}$ . Se dunque si disponeva della soluzione del caso di partenza, si dispone anche della soluzione del caso duale, solo facendo attenzione alle dimensioni dei

diversi vettori che si scambiano e della variazione delle proprietà del mezzo<sup>1</sup> (lo scambio  $\epsilon_c, \mu_c$ ).

E' ovvio che tutto ciò deve rimanere valido anche per le eventuali condizioni al contorno: esse quindi devono essere rese opportunamente congruenti con la situazione duale; ad esempio, la presenza al contorno di un conduttore elettrico perfetto nel caso duale viene sostituita da un conduttore magnetico perfetto (se nel primo vale la (7.36), nel caso duale deve valere la (7.37)).

## 7.8 Teorema delle immagini

Nel paragrafo precedente si è esaminata la possibilità di costruire altre soluzioni dalle equazioni di Maxwell, a partire da una soluzione nota, sfruttando la simmetria di queste fra grandezze di tipo elettrico e di tipo magnetico. Nel seguito vedremo che esistono altri tipi di simmetrie (in particolare simmetrie spaziali) delle equazioni di Maxwell, che consentono di ottenere nuove soluzioni sulla base di altre già note.

Un campo vettoriale  $\mathbf{V}$  può avere due tipi di simmetria rispetto ad un piano (ad esempio  $xy$ ), solitamente classificate come pari e dispari e così individuate:

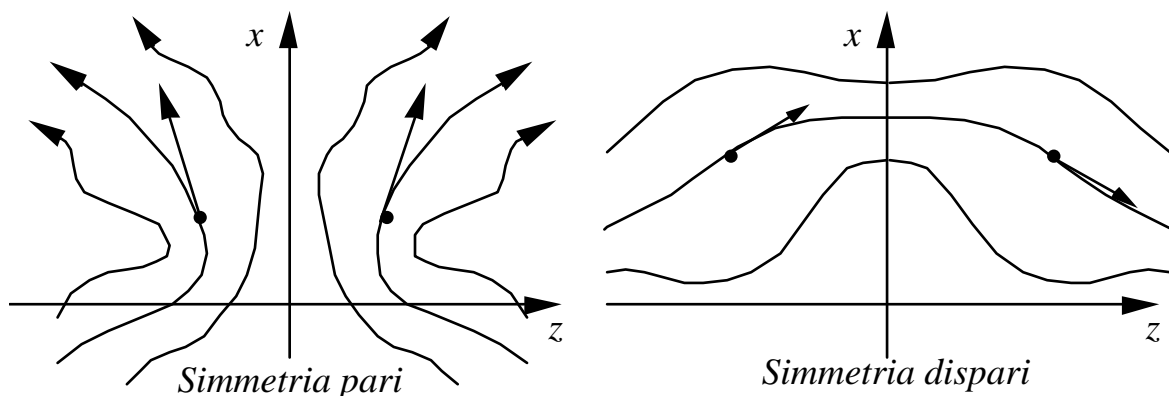


Figura 7.6

Simmetria pari

$$V_x(x,y,z) = V_x(x,y,-z)$$

$$V_y(x,y,z) = V_y(x,y,-z)$$

$$V_z(x,y,z) = -V_z(x,y,-z)$$

Simmetria dispari

$$V_x(x,y,z) = -V_x(x,y,-z)$$

$$V_y(x,y,z) = -V_y(x,y,-z)$$

$$V_z(x,y,z) = V_z(x,y,-z)$$

Si può affermare quanto segue:

<sup>1</sup> In presenza di condizioni al contorno al finito nello scenario vanno considerate anche le varianti di queste che intervengono nel problema duale.

*Correnti elettriche (magnetiche) simmetriche rispetto a un piano, agenti in un mezzo omogeneo isotropo illimitato, generano campi simmetrici. La simmetria del campo elettrico (magnetico) è dello stesso tipo di quella delle correnti, quella del campo magnetico (elettrico) è di tipo opposto.*

Si può notare direttamente dalla Figura 7.6 che i campi a simmetria dispari presentano un andamento ortogonale al piano di simmetria quando lo attraversano. Esaminiamo dunque il caso di sorgenti elettriche a simmetria dispari; considerando il campo elettrico generato da tali sorgenti, esso dovrà avere la stessa simmetria dispari; perciò sul piano di simmetria esso avrà unicamente componente ortogonale al piano, mentre la sua componente tangente sarà nulla; pertanto sul piano di simmetria soddisferà la condizione di parete elettrica  $\mathbf{i}_n \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ . Questa stessa condizione risulta verificata anche nel caso di sorgenti magnetiche a simmetria pari (vedi Figura 7.7); infatti ora il campo elettrico avrà simmetria opposta (si tratta di sorgenti magnetiche) e quindi sarà di tipo dispari, ricadendo nel caso appena visto.

Queste considerazioni possono venire ora rovesciate per consentire una notevole semplificazione nel calcolo del campo, qualora ci si trovi in presenza di condizione di parete elettrica. Infatti, se sorgenti elettriche a simmetria dispari producono una condizione di parete elettrica sul piano di simmetria, questo significa, di converso, che il campo prodotto da una sorgente di tipo elettrico, in presenza di una parete elettrica, può venire ottenuto introducendo una sorgente elettrica opportunamente simmetrica rispetto a quella originaria. Si consideri quindi il caso di un semispazio delimitato da un piano perfettamente conduttore

(Figura 7.8a). La presenza della parete conduttrice introduce una condizione al contorno identica a quella che si ha sullo stesso piano ( $z=0$ ) nella equivalente situazione di Figura 7.8b. In essa, il piano conduttore è stato completamente rimosso e pertanto il mezzo che prima occupava solo un semispazio ora occupa l'intero spazio; inoltre, sono state introdotte

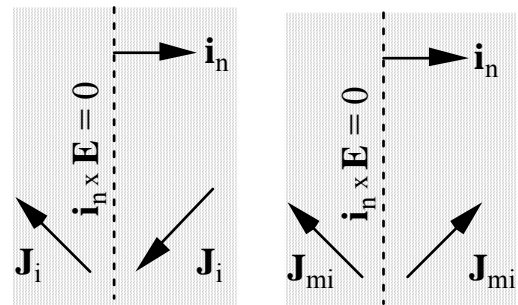


Figura 7.7

delle nuove correnti elettriche  $\mathbf{J}_i^*$  in modo tale da costituire, assieme a  $\mathbf{J}$ , una campo di corrente a simmetria dispari rispetto al piano rimosso. Per il teorema di equivalenza visto al paragrafo 7.5, il campo elettromagnetico all'esterno della superficie  $S$ , individuata dal piano conduttore (il semispazio  $z>0$ ), è completamente individuato qualora siano note le componenti tangenti dei campi su di essa. Perciò le due situazioni considerate in Figura 7.8 sono equivalenti da un punto di vista elettromagnetico, in quanto nel semispazio  $z>0$  il mezzo, le sorgenti e le condizioni al

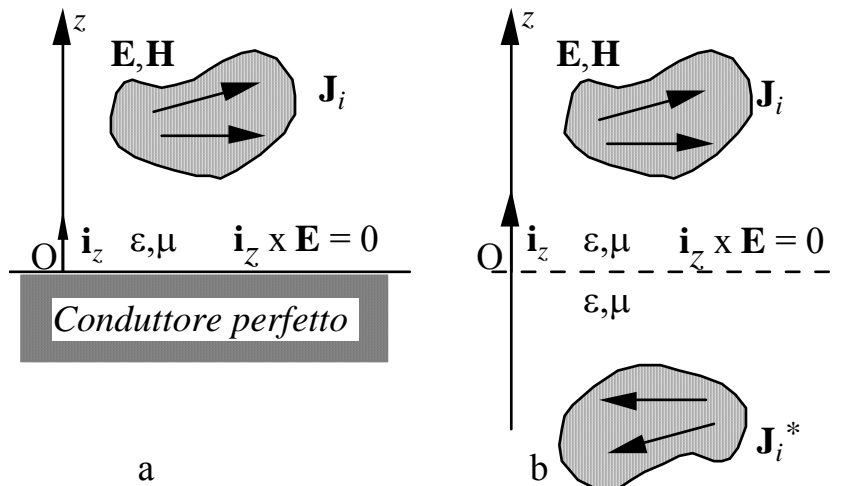


Figura 7.8

contorno sono del tutto identiche. Le correnti  $\mathbf{J}_i^*$ , così introdotte, vengono dette le **immagini** delle correnti effettivamente presenti in  $z > 0$ .

Nel caso siano presenti sorgenti di tipo *magnetico*, perché si venga a creare un campo *elettrico* a simmetria *dispari* ( $\mathbf{i}_n \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ) è necessario che le effettive correnti  $\mathbf{J}_{mi}$  formino con quelle immagine  $\mathbf{J}_{mi}^*$  un campo di corrente a simmetria *pari* con le correnti agenti in  $z > 0$  (Figura 7.9).

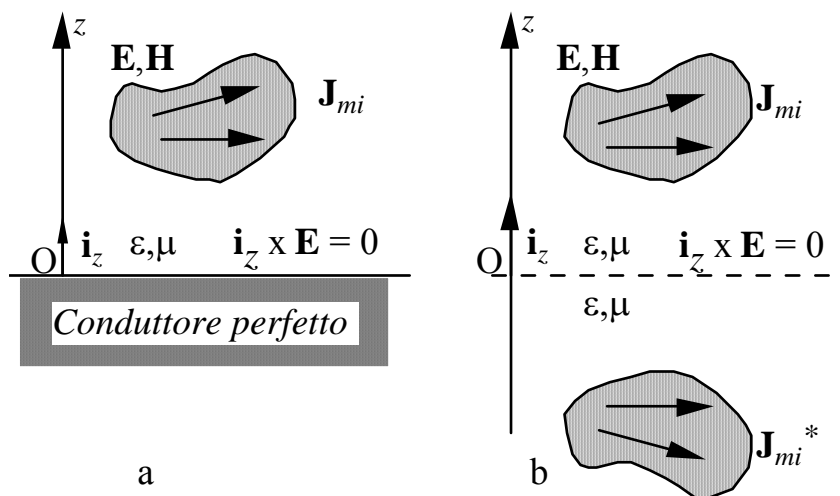


Figura 7.9

La **REGOLA DELLE IMMAGINI** può quindi venire così formulata:

*Il campo generato da una sorgente agente in un semispazio contenente un mezzo omogeneo isotropo, delimitato da una parete piana perfettamente conduttrice, è identico a quello che verrebbe generato nello stesso semispazio dalla sorgente e dalla sua immagine, agenti in un mezzo illimitato di caratteristiche uguali a quelle del mezzo esistente nel semispazio d'interesse. Le sorgenti effettive e le immagini*

costituiscono un campo a simmetria dispari nel caso di sorgenti elettriche, a simmetria pari nel caso di sorgenti magnetiche.

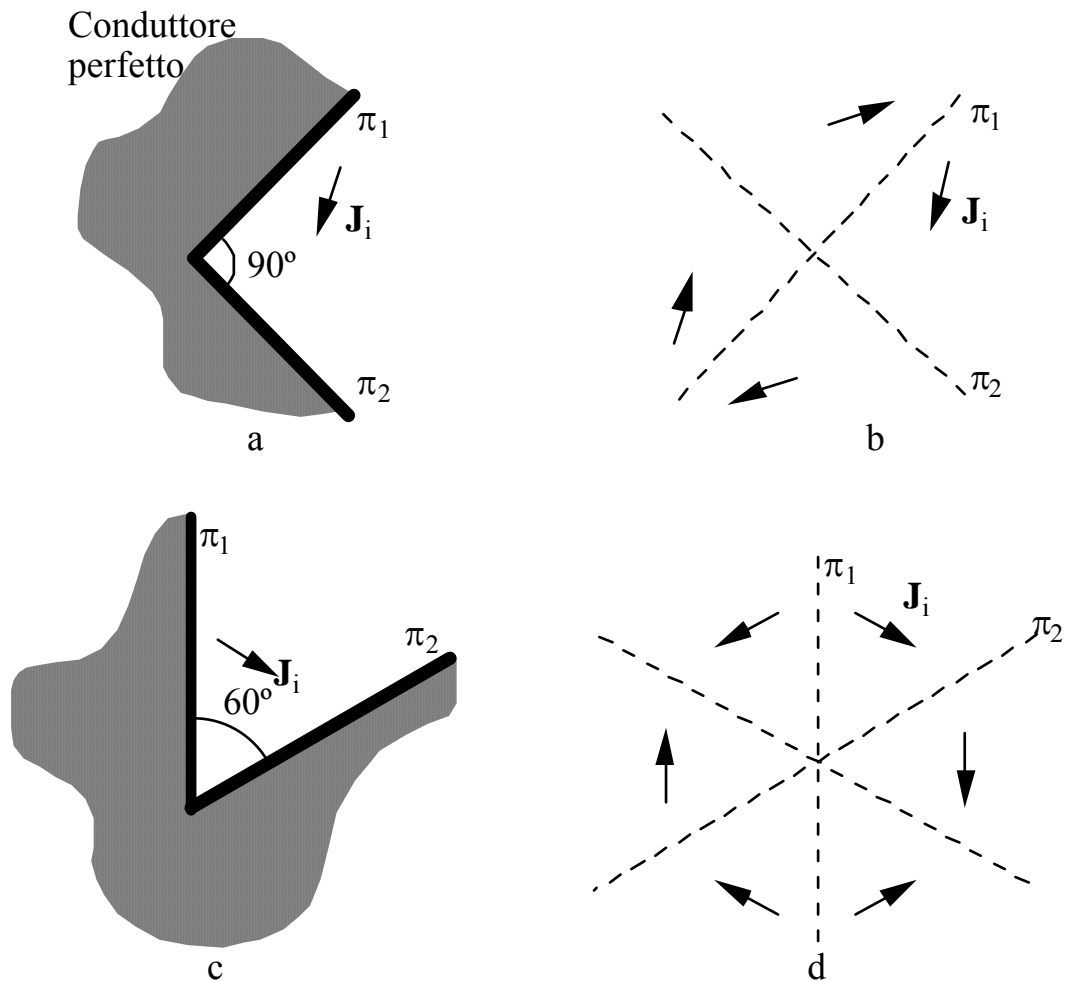


Figura 7.10

Le immagini costituiscono un esempio di sorgenti equivalenti: si sostituisce la presenza di un certo campo su di una superficie con la sorgente opportuna che riproduce su tale superficie lo stesso campo.

Spesso il teorema delle immagini viene utilizzato per semplificare l'analisi di situazioni che a prima vista sono di una certa complessità. Nel caso di un piano metallico infinitamente esteso l'analisi si presenta semplificata in quanto si tratta di mettere in conto l'effetto della sorgente effettiva e della sua *speculare* rispetto al piano (con opportuna attenzione alla simmetria da adottare); tale effetto, analogo a quello di uno specchio, porta a chiamare campo incidente quello prodotto dalla sorgente effettiva in assenza del piano conduttore e campo riflesso quello prodotto dall'immagine.



Tuttavia, questo stesso principio può essere adottato anche per risolvere in modo semplice alcune situazioni particolari in cui i piani conduttori sono più di uno. Ad esempio nella Figura 7.10 abbiamo due semipiani conduttori  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , posti a  $90^\circ$  o  $60^\circ$  fra loro. Il campo generato da tale sorgente nella porzione di piano compresa fra i due piani può essere calcolato sostituendo i piani con opportune sorgenti immagine (tre o cinque rispettivamente). La metodologia usata per la loro identificazione è quella solita: considerata la sorgente effettiva e dapprima il piano  $\pi_1$ , è possibile costruirsi, nella Figura 7.10b, una prima sorgente immagine a simmetria dispari rispetto a  $\pi_1$  (quella più in alto in Figura 7.10b) ed eliminare il piano  $\pi_1$ , avendo cura di costruirsi anche l'immagine del semipiano  $\pi_2$  rispetto a  $\pi_1$ ; considerando ora il piano  $\pi_2$ , possiamo costruirci rispetto ad esso le immagini della sorgente effettiva e della prima immagine ottenuta, ottenendo le ultime due sorgenti immagini, a simmetria dispari rispetto alle prime due. Un ragionamento analogo può essere ripetuto per la Figura 7.10d, facendo però attenzione a creare anche delle opportune immagini dei piani conduttori che non vengono eliminati, in modo da rispettare le simmetrie dispari sia rispetto al piano  $\pi_1$  che al piano  $\pi_2$ <sup>2</sup>.

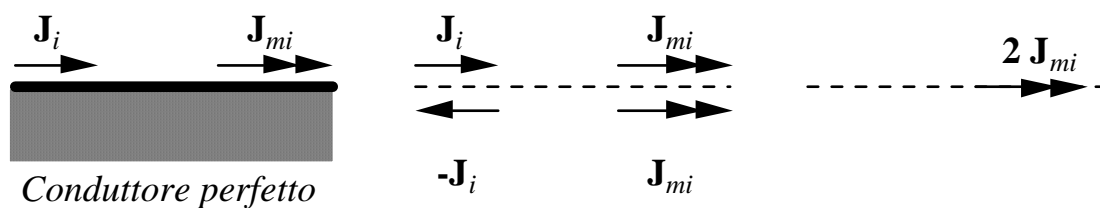


Figura 7.11

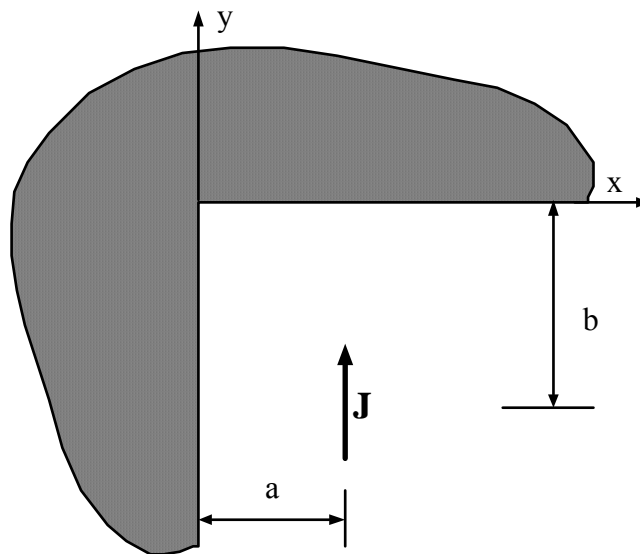
La Figura 7.11 mostra invece cosa accade quando si ha a che fare con elementi di corrente posti molto in prossimità del piano conduttore e paralleli ad esso. In tale situazione, l'immagine della corrente elettrica ha direzione opposta ed è a distanza infinitesima rispetto a quella effettiva: il campo risultante è perciò nullo. Nel caso invece della corrente magnetica, la sua immagine è concorde in segno con essa; quindi il campo risultante al di sopra del piano metallico è uguale a quello che si avrebbe in assenza di piano conduttore per effetto di un elemento di corrente magnetica di intensità doppia. Ovviamente tali considerazioni possono essere estese in modo analogo al caso di densità superficiali di corrente elettrica o magnetica, poste in prossimità di un piano metallico. Si ottiene nuovamente che la densità superficiale di corrente elettrica produce campo nullo, mentre quella magnetica fornisce un

<sup>2</sup> In sostanza si suddivide l'angolo giro in tanti settori di ampiezza pari a quella dell'angolo compreso fra i due semipiani conduttori; in tal modo si ottengono campi che soddisfano le corrette condizioni al contorno. E' altresì evidente che è possibile considerare le immagini in questo modo semplificato solamente quando tale angolo è un sottomultiplo di  $\pi$ .

campo pari a quello generato da una densità magnetica doppia in assenza di piano conduttore.

## ESERCIZI

- 1** Si ha una sorgente, caratterizzata dalla densità di corrente elettrica  $\mathbf{J}$ , posta in prossimità del soffitto di una stanza, avente pareti perfettamente conduttrici, dove  $a=1$  m e  $b=1,73$  m.
- Trovare le immagini di tale sorgente.
  - Dato il generico punto  $P(x,-b)$ , e nell'ipotesi che il campo elettrico proveniente dalla sorgente sia un'onda piana polarizzata linearmente nella direzione di  $y$ , dare una rappresentazione grafica dei vettori di campo elettrico che compongono il campo totale, valutare gli sfasamenti reciproci e il rapporto dell'ampiezza di ognuno rispetto a quello di ampiezza maggiore.
  - Come il punto b, ma nel caso di polarizzazione secondo l'asse  $z$ .



- 2** Come per l'esercizio 1, ma nel caso  $a=2$  m e  $b=2$  m e di un punto  $P$  di coordinate  $(c,-c)$ .

**3** Trovare le immagini nel seguente caso:

