
Capitolo 4

LE EQUAZIONI DI MAXWELL IN FORMA DIFFERENZIALE

4.1 La divergenza di un vettore

Le equazioni di Maxwell in forma integrale si scrivono:

$$\oint_{\ell} \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_{\ell} d\ell = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{b} \cdot \mathbf{i}_n dS \quad (4.1)$$

$$\oint_{\ell} \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_{\ell} d\ell = +\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_n dS + \iint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}_n dS \quad (4.2)$$

$$\oiint_S \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_n dS = \iiint_V \tilde{\rho} dV \quad (4.3)$$

$$\oiint_S \mathbf{b} \cdot \mathbf{i}_n dS = 0 \quad (4.4)$$

Le (4.3), (4.4) sono eguaglianze scalari. Per passare da esse ad una espressione puntuale è necessario scegliere una superficie S piccola e poi far tendere a zero il volume che racchiude.

Partendo dalla (4.3), si può considerare costante $\tilde{\rho}$ nel volume V e scrivere:

$$\oiint_S \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_n dS \cong V \tilde{\rho} \quad (4.5)$$

con il \cong che diventa eguale per $V \rightarrow 0$. Si può ora dividere per V e portare al limite:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint_S \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_n dS = \tilde{\rho} \quad (4.6)$$

Per definizione il 1° membro della (4.6) è la **divergenza** del vettore \mathbf{d} . In generale:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \triangleq \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_n dS \quad (4.7)$$

e la (4.3) può assumere la forma puntuale:

$$\operatorname{div} \mathbf{d} = \tilde{\rho} \quad (4.8)$$

Analogamente si può poi scrivere:

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0 \quad (4.9)$$

Dalla divergenza si può trovare una utile espressione in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Con riferimento alla Figura 4.1 si costruisce il cubetto centrato sull'origine di lati Δx , Δy , Δz . Si parte inoltre dall'espressione del generico vettore \mathbf{A} attraverso i versori cartesiani:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i}_x + A_y \mathbf{i}_y + A_z \mathbf{i}_z \quad (4.10)$$

con $A_i = A_i(x, y, z) \quad i = x, y, z$.

Si ha in tal caso:

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow 0} \left[+\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_z \left(A_z \left(0, 0, \frac{\Delta z}{2} \right) - A_z \left(0, 0, -\frac{\Delta z}{2} \right) \right) \Delta x \Delta y \right. \\ \left. + \mathbf{i}_y \cdot \mathbf{i}_y \left(A_y \left(0, \frac{\Delta y}{2}, 0 \right) - A_y \left(0, -\frac{\Delta y}{2}, 0 \right) \right) \Delta z \Delta x \right. \\ \left. + \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{i}_x \left(A_x \left(\frac{\Delta x}{2}, 0, 0 \right) - A_x \left(-\frac{\Delta x}{2}, 0, 0 \right) \right) \Delta z \Delta y \right] \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \end{aligned} \quad (4.11)$$

dove si è trascurata la variazione di ogni componente sulla faccia elementare del cubo, a favore della variazione rispetto alla relativa coordinata. Ciò perché le eventuali variazioni rispetto a x e y essendo analoghe sulle due facce parallele porterebbero al limite per Δz tendente a zero all'elisione dei contributi. Si può allora scrivere:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \left[\frac{A_z \left(\frac{\Delta z}{2} \right) - A_z \left(-\frac{\Delta z}{2} \right)}{\Delta z} + \frac{A_y \left(\frac{\Delta y}{2} \right) - A_y \left(-\frac{\Delta y}{2} \right)}{\Delta y} + \frac{A_x \left(\frac{\Delta x}{2} \right) - A_x \left(-\frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} \right] = \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \quad (4.12)$$

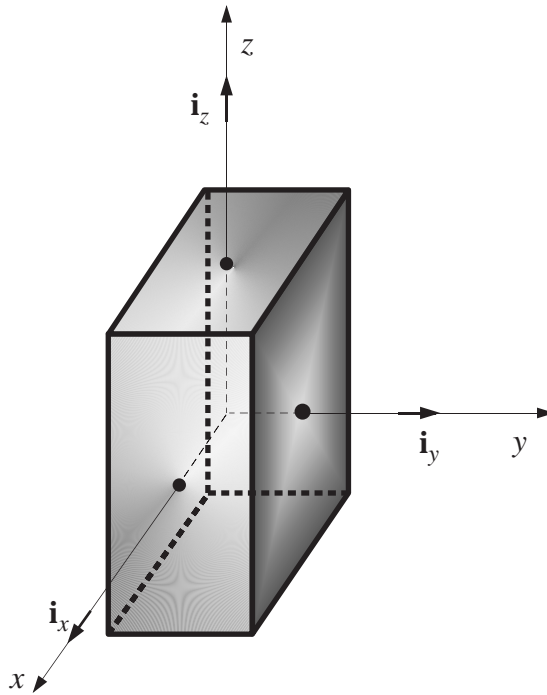


Figura 4.1 Cubetto di riferimento per trovare l'espressione della divergenza in un riferimento cartesiano ortogonale.

Introducendo il vettore simbolico ∇ :

$$\nabla \triangleq \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.13)$$

e interpretando le derivate parziali come componenti si può scrivere:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (4.14)$$

Poichè attraverso il vettore simbolico ∇ si possono esprimere altri operatori, oltre alla divergenza, spesso nei testi è utilizzata la notazione che lo contiene.

4.2 Il gradiente di una funzione scalare

Attraverso ∇ e una formulazione del tipo (4.7) si può arrivare ad un altro operatore che genera un vettore a partire da uno scalare: il **gradiente**. Si scrive:

$$\text{grad } \varphi \triangleq \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{i}_n \varphi \, dS \quad (4.15)$$

In modo perfettamente analogo al caso della divergenza si dimostra che:

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} \varphi + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} \varphi + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \varphi = \nabla \varphi \quad (4.16)$$

La definizione è coerente con quella ottenibile a partire dalle proprietà dei campi conservativi. Se infatti nella (4.15) si sceglie una superficie S con due facce contrapposte tangenti alla superficie $\varphi = \text{costante}$, e per il resto chiusa con una superficie cilindrica, si può agevolmente ottenere:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathbf{i}_n \quad (4.17)$$

con \mathbf{i}_n normale alla superficie dove φ è costante.

Al proposito si può ricordare che la proprietà di base dei campi conservativi è, detta \mathbf{F} una forza di campo,

$$\oint F_S \, ds = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (4.18)$$

ovvero il lavoro su una linea chiusa è zero. Ne consegue che

$$\int_A^B F_S \, ds = f(A, B) \quad (4.19)$$

non è dipendente dal percorso ma funzione solo degli estremi; può dunque porsi eguale alla differenza $U_A - U_B$ con U funzione di punto ad un sol valore.

Si ha allora:

$$-\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = U_B - U_A \quad (4.20)$$

In forma infinitesima si può scrivere:

$$-F_s ds = dU \quad F_s = -\frac{dU}{ds} \quad (4.21)$$

Le tre componenti cartesiane in un punto sono dunque:

$$F_x = -\frac{dU}{dx} ; F_y = -\frac{dU}{dy} ; F_z = -\frac{dU}{dz} \quad (4.22)$$

In modo compatto

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U \quad (4.23)$$

La direzione di $\text{grad } U$ è la normale alla superficie $U = \text{costante}$, come si può evincere dalla (4.21).

4.3 Il rotore o rotazionale di un vettore

Un ulteriore operatore è quello che può far passare la (4.1) in forma puntuale. Si consideri la Figura 4.2, dove la curva ℓ è un rettangolo con lati Δx , Δy sul piano xy . Si scelga come superficie ΔS quella posta sul piano stesso; il risultato è comunque non dipendente dalla superficie ΔS scelta, come confermato dalla (4.4). In tal caso è $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_z$.

Il secondo membro della (4.1) può essere assimilato a $-\frac{d}{dt} b_z \Delta x \Delta y$ in vista del fatto che si farà tendere ΔS a zero. Per il primo membro si ha, evidenziando la dipendenza da x e y :

$$e_x(0,0) \Delta x + e_y(\Delta x,0) \Delta y - e_x(0,\Delta x) \Delta x - e_y(0,0) \Delta y$$

La scelta degli argomenti è fatta in modo da mettere in evidenza la variazione che risulterà significativa al tendere di Δx o Δy a zero. Si ha infatti:

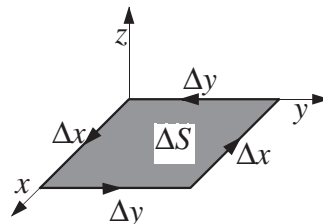


Figura 4.2 Superficie elementare ΔS e relativa curva di appoggio scelta

$$-\frac{d}{dt} b_z = \frac{[e_y(\Delta x, 0) - e_y(0, 0)]}{\Delta x} - \frac{[e_x(0, \Delta y) - e_x(0, 0)]}{\Delta y}$$

Al limite si ha, per Δx e Δy tendenti a zero:

$$-\frac{d}{dt} b_z = \frac{\partial}{\partial x} e_y - \frac{\partial}{\partial y} e_x \quad (4.24)$$

Si può definire il 2° membro della (4.24) come la componente secondo z di un vettore, che chiamiamo $\text{rot } \mathbf{e}$:

$$\text{rot } \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_z = \frac{\partial}{\partial x} e_y - \frac{\partial}{\partial y} e_x \quad (4.25)$$

Scegliendo in successione la normale alla superficie ΔS come \mathbf{i}_x e \mathbf{i}_y , si ha analogamente:

$$\text{rot } \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_x = \frac{\partial}{\partial y} e_z - \frac{\partial}{\partial z} e_y \quad (4.26)$$

$$\text{rot } \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_y = \frac{\partial}{\partial z} e_x - \frac{\partial}{\partial x} e_z \quad (4.27)$$

Si è così compiutamente definito un nuovo vettore, $\text{rot } \mathbf{e}$, ottenuto a partire dal vettore \mathbf{e} . La forma vettoriale compatta della (4.1) risulta dunque, in forma puntuale:

$$\text{rot } \mathbf{e} = -\frac{d}{dt} \mathbf{b} \quad (4.28)$$

E' immediato verificare che con la introduzione del vettore simbolico ∇ il rotazionale di un vettore \mathbf{A} può esprimersi come:

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

dove si è introdotta la formula operativa di calcolo di un prodotto vettoriale attraverso lo sviluppo, a partire dalla prima riga, di un determinante.

Si ricorda che in generale:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

come può agevolmente verificarsi, esprimendo \mathbf{A} e \mathbf{B} attraverso componenti cartesiane e sfruttando le proprietà di circolazione delle terne cartesiane.

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y &= \mathbf{i}_z \\ \mathbf{i}_y \times \mathbf{i}_z &= \mathbf{i}_x \\ \mathbf{i}_z \times \mathbf{i}_x &= \mathbf{i}_y \end{aligned} \quad (4.31)$$

Del rot \mathbf{A} esiste una definizione parallela a quella (4.15) del gradiente e a quella (4.7) della divergenza. Essa si presenta come:

$$\text{rot } \mathbf{A} \triangleq \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{i}_n \times \mathbf{A} \, dS \quad (4.32)$$

Si può agevolmente dimostrare la equivalenza della (4.32) all'espressione cartesiana (4.29) utilizzando la medesima Figura 4.1. La (4.32) è, come le sue analoghe, più generale e, assunta come definizione, consente l'introduzione dell'operatore prescindendo dalla sua rappresentazione in un particolare sistema di coordinate.

Analogamente a quanto fatto per la (4.1) si ottiene per la (4.2):

$$\nabla \times \mathbf{h} = \frac{d}{dt} \mathbf{d} + \mathbf{j} \quad (4.33)$$

Va sottolineato che la presenza di \mathbf{j} a secondo membro è indice del fatto che \mathbf{d} , a differenza di \mathbf{b} , non è in generale a divergenza nulla. Dalle espressioni ricavate è infatti immediato verificare che:

$$\text{div rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (4.34)$$

Utilizzando la (4.8) e la (4.33) si ha allora:

$$\text{div} \left(\mathbf{j} + \frac{d}{dt} \mathbf{d} \right) = 0 = \text{div } \mathbf{j} + \frac{d}{dt} \text{div } \mathbf{d} = \text{div } \mathbf{j} + \frac{d}{dt} \tilde{\rho}$$

da cui conseguono le equazioni di conservazione della carica elettrica in forma differenziale e integrale:

$$\text{div } \mathbf{j} = - \frac{d}{dt} \tilde{\rho} \quad (4.35)$$

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}_n \, dS = - \iiint_V \frac{d}{dt} \tilde{\rho} \, dV \quad (4.36)$$

Prima di concludere il paragrafo, è opportuno citare che due delle importanti relazioni integrali introdotte implicitamente passano sotto il nome di teorema di Gauss (o della divergenza):

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_n \, dS \quad (4.37)$$

e di teorema di Stokes (o del rotore):

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_n \, dS = \oint_{\ell} \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_\ell \, d\ell \quad (4.38)$$

La loro validità è implicitamente sostenuta da come abbiamo introdotto i relativi operatori differenziali.

E' infine:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \times \nabla \varphi = 0 \quad (4.39)$$

come è possibile verificare direttamente delle espressioni ottenute in coordinate cartesiane.

AVVERTENZE - Per dare senso fisico e semplificare la matematica relativa nel capitolo non è sempre totalmente evidenziata la differenza tra l'operatore (gradiente, divergenza, rotazionale) e la sua rappresentazione in un sistema di coordinate, ad esempio cartesiano. E' possibile partire da definizioni, come le (4.7), (4.32) che prescindono dal sistema di coordinate scelto e poi dimostrare la validità di relazioni come le (4.33), (4.38) ecc. senza utilizzare una rappresentazione particolare degli operatori. Ciò garantisce che le proprietà non sono dipendenti dalla particolare rappresentazione degli operatori che si utilizza.

Una teoria elettromagnetica assiomatica può prendere come dato di partenza l'insieme delle equazioni di Maxwell in forma differenziale, invece che derivarle da quelle in forma integrale. Da esse, con l'aggiunta delle cosiddette condizioni di continuità di cui si parlerà in seguito, è possibile derivare tutte le conseguenze integrali e differenziali di utilità.

La trattazione qui esposta non ha probabilmente nascosto che le equazioni di Maxwell, quattro in forma integrale o differenziale, non sono tra loro indipendenti. Ad esempio la (4.4) è implicata dalla (4.1), almeno nella forma $\iint_S \mathbf{b} \cdot \mathbf{i}_n \, dS = \text{costante}$, per la sua stessa consistenza. Le equazioni veramente indipendenti sono le prime due: su questo però non si insisterà oltre in questo contesto.

4.4 - Le equazioni di Maxwell generalizzate

La previsione dell'esistenza delle onde elettromagnetiche costituisce il risultato più importante della Teoria Elettromagnetica ideata da J.C. Maxwell nel secolo scorso. Tale teoria costituisce tutt'oggi lo strumento essenziale per la modellizzazione matematica dei fenomeni macroscopici connessi alla propagazione delle onde elettromagnetiche, dalle frequenze più basse fino a quelle ottiche.

Partendo da alcune considerazioni fenomenologiche già sviluppate in altri corsi, nei capitoli e paragrafi precedenti si è giunti a derivare ed a formulare le equazioni di Maxwell, sia nella loro espressione integrale che in quella differenziale, in quella forma storicamente legata alle esperienze di scienziati del valore di Faraday o Ampère, nonché agli studi di Maxwell.

D'altra parte, una volta acclarata la validità scientifica delle equazioni di Maxwell, si può ritenere che esse siano l'espressione sintetica in forma matematica di tutte le leggi dell'universo che regolano l'accadere dei fenomeni elettromagnetici macroscopici e non-relativistici. A partire dalle equazioni di Maxwell, possiamo ora dirigere lo sguardo verso direzioni a noi ignote e ricavare, tramite gli strumenti matematici che possediamo, deduzioni e conclusioni altrettanto valide quanto lo sono le osservazioni sperimentali. La via che si è percorsa finora è detta *induttiva*, in quanto si è cercato di ricavare le leggi teoriche a partire da alcuni dati fenomenologici. Dalla conoscenza delle equazioni di Maxwell è ora possibile procedere per via *deduttiva*; in altri termini, è possibile dare una descrizione dei fenomeni elettromagnetici assumendo come postulato la validità di tali equazioni, quindi senza fare più alcun riferimento ai loro presupposti fenomenologici.

In tale accezione, le equazioni di Maxwell hanno quindi uno squisito sapore matematico ed una buona eleganza formale. Per sottolineare maggiormente questa loro fondazione puramente matematica, esse verranno qui introdotte in una nuova forma, nella quale alcune delle grandezze presenti avranno una valenza puramente matematica, senza alcun aggancio fenomenologico reale.

Come già detto in chiusura del capitolo 3, a volte per schematizzare le sorgenti e gli utilizzatori possono servire correnti magnetiche e cariche magnetiche; poiché la loro introduzione permette di rendere simmetriche le equazioni di Maxwell, conviene definire fin da subito questi nuovi concetti puramente matematici.

Introducendo densità fittizie di corrente magnetica e di carica magnetica, \mathbf{j}_m (V/m²) e ρ_m (Wb/m³) rispettivamente, le equazioni di Maxwell generalizzate, in forma differenziale, si possono scrivere così:

$$\nabla \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) \quad (4.40)$$

$$\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = +\frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (4.41)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = +\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \quad (4.42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = +\tilde{\rho}_m(\mathbf{r}, t) \quad (4.43)$$

Nello scrivere queste equazioni si è fatto uso delle notazioni basate sul vettore simbolico ∇ , introdotto nei precedenti paragrafi.

E' evidente che queste equazioni si riducono alle normali equazioni di Maxwell (4.1-4.4) quando si pone $\mathbf{j}_m = 0$ e $\rho_m = 0$. L'equazione di Lorentz viene a sua volta generalizzata come segue:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) + \tilde{\rho}_m(\mathbf{r}, t) \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) \quad (4.44)$$

e quella di continuità della corrente magnetica diventa:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \tilde{\rho}_m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (4.45)$$

in analogia a quella della corrente elettrica (4.35).

Il motivo dell'introduzione delle densità di corrente e di carica magnetica è duplice: da un lato vi sono distribuzioni di campi elettromagnetici che possono formalmente attribuirsi a sorgenti magnetiche, dall'altro, l'uso di queste cariche e correnti fittizie è utile per i teoremi di equivalenza, che verranno sviluppati nel seguito.

La ovvia generalizzazione delle due equazioni integrali (3.18) e (3.14), includendo cariche e correnti magnetiche, è la seguente:

$$\oiint_S \mathbf{b} \cdot \mathbf{i}_n \, dS = \iiint_V \tilde{\rho}_m \, dV = \tilde{q}_m \quad (4.46)$$

$$\oint_\ell \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_\ell \, d\ell = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{b} \cdot \mathbf{i}_n \, dS - \iint_S \mathbf{j}_m \cdot \mathbf{i}_n \, dS \quad (4.47)$$

mentre per l'equazione di continuità della corrente magnetica si ha:

$$\oiint_S \mathbf{j}_m \cdot \mathbf{i}_n dS + \frac{\partial \tilde{q}_m}{\partial t} = 0 \quad (4.48)$$

La formulazione integrale è quella che si può ritenere il frutto dell'esperienza: data la presenza di operatori integrali non soffre di problemi di discontinuità, come già evidenziato. Invece, la formulazione differenziale è una astrazione teorica dovuta a Maxwell ed evidentemente non è valida se alcune delle componenti dei campi sono discontinue. Tale formulazione, e tutto ciò che ne deriva, va dunque applicata solo a regioni dello spazio dove i vettori sono continui. Ciò può costringere a spezzare in più parti i procedimenti di soluzione: è necessario realizzare successivamente il collegamento applicando le cosiddette condizioni di continuità.

4.5 Condizioni di continuità

Mediante le formulazioni integrali è possibile determinare quali condizioni sono imposte alle singole componenti di campo in corrispondenza di una superficie che separa due distinte regioni.

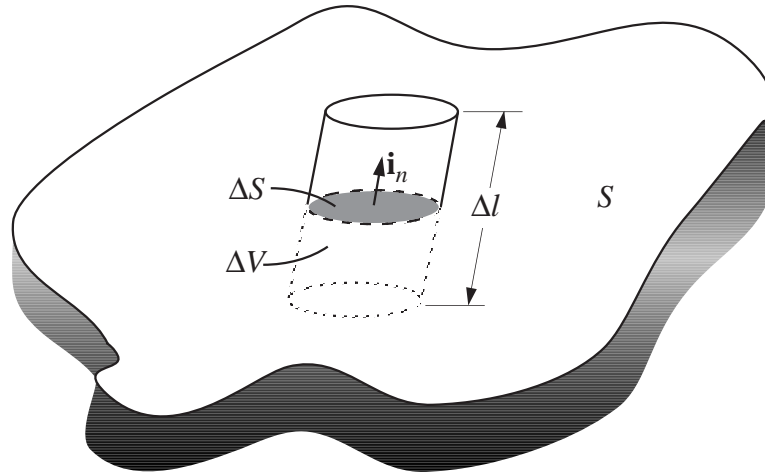


Figura 4.3 - Volume di integrazione ΔV per lo studio delle variazioni delle induzioni e delle densità di corrente in corrispondenza di piccoli spostamenti spaziali.

Le cosiddette condizioni di continuità possono derivarsi dalla formulazione integrale mediante opportuni ragionamenti al limite.

Consideriamo ora la Figura 4.3 ove sono rappresentate schematicamente due regioni dello spazio separate da una superficie S . Questa può essere o un'effettiva superficie fisica di separazione tra mezzi diversi o una superficie ideale (in questo

caso vi è un unico mezzo): il versore normale ad essa, \mathbf{i}_n è orientato dalla faccia 1 alla faccia 2.

Sia data inoltre una porzione di superficie, ΔS , sufficientemente piccola perché su ciascuna delle sue due facce campi e induzioni possano ritenersi spazialmente costanti. In tali condizioni, le equazioni (4.3) e (4.36) per $\Delta \ell \rightarrow 0$ e a meno di infinitesimi superiori rispetto a ΔS , forniscono:

$$\begin{aligned}\Delta S(\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) &= \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \iiint_{\Delta V} \tilde{\rho} dV = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \tilde{\rho} \Delta \ell \Delta S \\ \Delta S(\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) &= -\frac{\partial}{\partial t} \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \iiint_{\Delta V} \tilde{\rho} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \tilde{\rho} \Delta \ell \Delta S\end{aligned}$$

con ovvio il significato degli indici 1 e 2 apposti ai simboli delle grandezze. Queste due ultime equazioni mettono in luce un risultato assai interessante: se su ΔS sono presenti distribuzioni superficiali di carica elettrica, con densità $\tilde{\rho}_S[\text{C/m}^2]$, debbono valere le seguenti relazioni:

$$(\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) \cdot \mathbf{i}_n = \tilde{\rho}_S \quad (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \cdot \mathbf{i}_n = 0 \quad (4.49a,b)$$

$$(\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) \cdot \mathbf{i}_n = -\frac{\partial \tilde{\rho}_S}{\partial t} \quad (4.49c)$$

Ne consegue che solo in assenza di tali distribuzioni di carica le componenti normali a S delle induzioni e delle densità di corrente sono continue, anche se le caratteristiche del mezzo cambiano bruscamente attraversando S .

Consideriamo ora la Figura 4.4; il segmento Δa , intersezione di S con $\Delta \Sigma$, è supposto così piccolo da giustificare l'ipotesi di campi costanti su esso; di nuovo, la superficie S che seziona $\Delta \Sigma$ è una superficie fisica di separazione tra due mezzi diversi o anche una pura superficie geometrica. E' anche chiaro, dalla figura, il significato dei versori \mathbf{i}_t , \mathbf{i}_b e \mathbf{i}_n : considerati in quest'ordine, essi formano una terna sinistrorsa e sono tali che $\mathbf{i}_t \wedge \mathbf{i}_b = \mathbf{i}_n$.

Considerando ora le equazioni (4.1) e (4.2), per $\Delta \ell \rightarrow 0$ e a meno di infinitesimi superiori in Δa si ha:

$$\begin{aligned}\Delta a(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{i}_t &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \iint_{\Delta \Sigma} \mathbf{b} \cdot \mathbf{i}_b dS \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} b_b \Delta \ell \Delta a \\ \Delta a(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{i}_t &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \iint_{\Delta \Sigma} \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_b dS \right) + \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \iint_{\Delta \Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}_b dS \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} d_b \Delta \ell \Delta a + \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} j_b \Delta \ell \Delta a\end{aligned}$$

Se attraverso il segmento Δa in esame fluiscono densità superficiali di corrente elettrica \mathbf{j}_S [A/m] si ha:

$$\mathbf{i}_t \cdot (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) = 0 \qquad \mathbf{i}_t \cdot (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) = \mathbf{j}_S \cdot \mathbf{i}_b$$

Poichè $\mathbf{i}_t = \mathbf{i}_b \times \mathbf{i}_n$ nella seconda si ha:

$$\mathbf{i}_b \times \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) = \mathbf{j}_S \cdot \mathbf{i}_b = \mathbf{i}_n \times (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{i}_b$$

per le proprietà del prodotto misto.

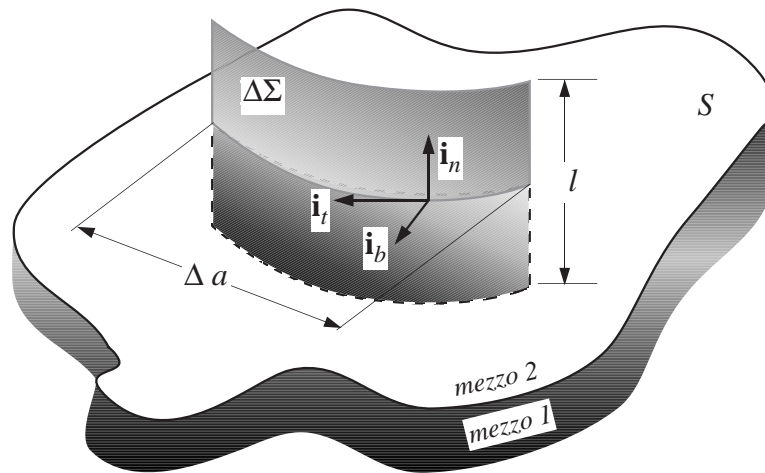


Figura 4.4 Superficie di integrazione per lo studio della variazione del campo in corrispondenza di piccoli spostamenti spaziali.

Peraltro sia \mathbf{i}_t che \mathbf{i}_b sono arbitrarie su S (basta cambiare orientazione a $\Delta\Sigma$), ed allora le relazioni precedenti valgono per ogni componente dei campi che sia sul piano tangente, o, più compattamente per il componente tangente:

$$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) = 0 \qquad \mathbf{i}_n \times (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) = \mathbf{j}_S \qquad (4.50a,b)$$

Pertanto il componente tangente di \mathbf{e} è continuo, mentre quello di \mathbf{h} è discontinuo solo se ci sono correnti superficiali.

Le applicazioni di tutte queste relazioni si vedranno tra breve quando si considereranno le relazioni costitutive, che differenziano i vari mezzi sede di campo elettromagnetico. Le superficie S considerate avranno quindi il significato di superficie dove cambiano bruscamente le caratteristiche del mezzo.

Altre cause di discontinuità possono derivare dalla dipendenza dal tempo, ma di ciò non ci occuperemo per ora.

Applicando le equazioni di Maxwell generalizzate in forma integrale al caso di discontinuità spaziali e introducendo la grandezza \mathbf{j}_{mS} , densità di corrente magnetica superficiale, diventano simmetriche anche le relazioni di continuità:

$$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) = -\mathbf{j}_{mS} \quad \mathbf{i}_n \times (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) = \mathbf{j}_S \quad (4.51)$$

$$\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) = \tilde{\rho}_S \quad \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) = \tilde{\rho}_{mS} \quad (4.52)$$

$$\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) = -\frac{\partial \tilde{\rho}_S}{\partial t} \quad \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{j}_{m2} - \mathbf{j}_{m1}) = -\frac{\partial \tilde{\rho}_{mS}}{\partial t} \quad (4.53)$$

dove \mathbf{i}_n rappresenta il versore normale alla superficie di discontinuità.

Le applicazioni di tutte queste relazioni sono particolarmente utili quando si considerano anche le relazioni costitutive, che differenziano i vari mezzi sede di campo elettromagnetico (in tal caso, le superficie S considerate hanno quindi il significato di superficie dove cambiano bruscamente le caratteristiche del mezzo). A questo proposito precisiamo fin d'ora che, qualora non precisato altrimenti, supporremo sempre di considerare **mezzi stazionari** (le cui caratteristiche non variano nel tempo, per esempio per effetto della presenza del campo elettromagnetico stesso), **isotropi** (le cui caratteristiche sono uguali in tutte le direzioni), **omogenei** (le cui caratteristiche sono uguali in tutti i punti dello spazio occupato dal mezzo), **lineari** (quando alla combinazione lineare delle cause, secondo assegnati coefficienti, corrisponde la combinazione lineare degli effetti, secondo gli stessi coefficienti). Per tali mezzi, le relazioni costitutive assumono la semplice forma:

$$\mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{e} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{e} \quad \mathbf{b} = \mu \mathbf{h} = \mu_0 \mu_r \mathbf{h} \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} \quad (4.54)$$

dove i parametri ε_0 e μ_0 sono la costante dielettrica e la permeabilità magnetica nel vuoto: $\varepsilon_0 = 1/36 \pi 10^{-9}$ F/m; $\mu_0 = 4 \pi 10^{-7}$ H/m; $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ e $\mu = \mu_0 \mu_r$ sono la permittività elettrica e la permeabilità magnetica del mezzo, diversi, in generale, da ε_0 e μ_0 , come espresso dalle costanti ε_r e μ_r , dette costanti relative del mezzo; σ [S/m] infine rappresenta la conducibilità del materiale.

Il sistema di equazioni di Maxwell (4.40)-(4.43), assieme alle equazioni (4.54), esprimono i principi generali della teoria elettromagnetica e sufficienti per descrivere i diversi fenomeni elettromagnetici particolari. Sottolineiamo che il sistema di equazioni di Maxwell, considerato di per sè, non possiede delle soluzioni definite. Una ben precisa soluzione, cioè l'insieme di $\mathbf{e}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{h}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{b}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{d}(\mathbf{r},t)$, nonché dei termini $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{j}_m(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\rho}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\rho}_m(\mathbf{r},t)$ come funzioni concrete delle coordinate spaziali

e temporali, non esiste fintantochè non si impongono delle condizioni aggiuntive che caratterizzano una certa situazione reale. In altri termini, posto che un problema su di un fenomeno elettromagnetico da studiare sia stato correttamente enunciato, il risolverlo si traduce in un problema matematico che comprende le equazioni di Maxwell e le condizioni aggiuntive per le quali esista una soluzione che descriva tale fenomeno.

4.6 Sorgenti e utilizzatori

Consideriamo ora la forza di Lorentz ed esaminiamo le considerazioni energetiche che ne derivano. Si abbia una distribuzione di cariche $\tilde{\rho}(\mathbf{P})$ che si muovono con velocità $\mathbf{u}(\mathbf{P})$. La densità di corrente \mathbf{j} risulta dunque espressa dalla:

$$\mathbf{j} = \tilde{\rho} \mathbf{u}$$

Il lavoro elementare dL fatto dalle forze di Lorentz nel tempo dt in un volume V contenente una distribuzione di carica elettrica di densità $\tilde{\rho}(\mathbf{P})$ e velocità $\mathbf{u}(\mathbf{P})$ è dato dalla:

$$dL = \iiint_V (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) dV dt = \iiint_V (\tilde{\rho} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}) dV dt = \iiint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{e} dV dt$$

da cui l'espressione della potenza istantanea dL/dt :

$$\frac{dL}{dt} = \iiint_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{e} dV \quad (4.55)$$

Nel seguito, si avrà a che fare con equazioni ove una parte di \mathbf{j} , tutta al finito, verrà considerata come un termine noto e si parlerà di essa come di una densità di corrente elettrica impressa, \mathbf{j}_i :

$$\mathbf{j}_i = \tilde{\rho}_i \mathbf{u} \quad (4.56)$$

sostenuta da forze di natura non elettrica ed indipendente dalle proprietà del mezzo in cui ha sede. Per motivi termodinamici il lavoro svolto dalle forze impresse è uguale a quello assorbito dalle forze di Lorentz agenti su $\tilde{\rho}_i$ e quindi nel tempo dt e nel volume V esso vale:

$$- \iiint_V \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{e} dV dt \quad (4.57)$$

Le forze che sostengono le correnti impresse in tutto lo spazio, V_∞ , forniscono una potenza media sempre positiva:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{T} \int_0^T \iiint_{V_\infty} \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{e} dV dt \right] > 0 \quad (4.58)$$

tuttavia, è in generale possibile scrivere

$$\mathbf{j}_i = \mathbf{j}_i^s + \mathbf{j}_i^u \quad (4.59)$$

essendo \mathbf{j}_i^s una funzione vettoriale di punto, definita in V_∞ associata con una potenza media positiva,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{T} \int_0^T \iiint_{V_\infty} \mathbf{j}_i^s \cdot \mathbf{e} dV dt \right] > 0 \quad (4.60)$$

che verrà detta sorgente, e \mathbf{j}_i^u una funzione vettoriale di punto, definita in V_∞ , associata con una potenza media negativa,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{T} \int_0^T \iiint_{V_\infty} \mathbf{j}_i^u \cdot \mathbf{e} dV dt \right] < 0 \quad (4.61)$$

che verrà detta utilizzatore.

I termini di corrente impressa sono normalmente i termini noti del problema della determinazione dei campi e.m. in un mezzo di date proprietà (con qualche eccezione per quanto riguarda la corrente impressa dell'utilizzatore: in tale caso il termine non viene più considerato forzante, ma determinato dal problema).

ESERCIZI

- 1 Si calcoli l'espressione del campo elettrico \mathbf{e} in base alla seguente espressione del potenziale $V(x,y)$:

$$V = -2xy - 5x^2 + 6y^2$$

Si calcoli il valore del potenziale nei punti A e B dell'esercizio 3 del capitolo 3 (3.3) in base all'espressione di V fornita sopra; in particolare si confronti il risultato ottenuto con quanto si è ricavato in quella sede.

- 2 Si calcoli il rotore del campo elettrico dell'esercizio 3 del capitolo 3:

$$\mathbf{e} = (10x + 2y)\mathbf{i}_x + (2x - 12y)\mathbf{i}_y$$

Si commenti il risultato alla luce della (4.28).

- 3 Si calcoli la divergenza dei seguenti campi vettoriali:

$$\mathbf{v}_1 = (10x + 2xy)\mathbf{i}_x - (5y + y^2)\mathbf{i}_y - (5z + x^2)\mathbf{i}_z$$

$$\mathbf{v}_2 = (10x^2 + 2y)\mathbf{i}_x + (2x - 10y^2)\mathbf{i}_y$$

$$\mathbf{v}_3 = (x^3 + 20xy^2)\mathbf{i}_x + (3yz^2 - 4y^3)\mathbf{i}_y - (8zy^2 + z^3)\mathbf{i}_z$$

e si indichi quali di essi sono solenoidali.

- 4 Verificare analiticamente le seguenti identità vettoriali:

$$\nabla \times \nabla \varphi = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

- 5* Utilizzando l'operatore differenziale "nabla" ∇ , definito dalla (4.13), si fornisca una giustificazione basata sull'analisi vettoriale delle due precedenti identità vettoriali:

$$\nabla \times \nabla \varphi = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla (\varphi \psi) = \psi \nabla (\varphi) + \varphi \nabla (\psi)$$

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla \varphi$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$

- 6 Dire per quali mezzi è valida la seguente equazione:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

- 7* Due mezzi isotropi sono separati da una superficie piana S. All'interno del mezzo 2 non esiste campo. Dire come è diretto il campo elettrico e magnetico nel mezzo 1 in prossimità alla superficie di separazione S. Qualora siano note la densità di carica superficiale ρ_S e la densità di corrente superficiale \mathbf{j}_S , determinare anche il modulo di \mathbf{E} e di \mathbf{H} .

- 8*** Due mezzi isotropi, di costanti elettromagnetiche ε_1, μ_1 e ε_2, μ_2 rispettivamente, sono separati da una superficie piana S ; determinare la relazione fra le direzioni delle linee di forza di \mathbf{E} e di \mathbf{H} nei due mezzi, in assenza di densità di carica superficiale e di densità di corrente superficiale.